Capitolo 2

Proprietà generali delle mappe ingresso/uscita

2.1 Premessa

In linea di principio, un sistema sarà assimilato alla sua *mappa ingresso-uscita* $\mathcal{A}$, ovvero alla corrispondenza che assegna ad ogni funzione di ingresso $U(\cdot)$, appartenente ad un opportuno insieme di ingressi "ammissibili" $\mathcal{U}$, una funzione di uscita $y(\cdot)$.
Supporremo, inoltre, salvo nell'ultimo capitolo, che i sistemi siano "a tempo continuo", ovvero che le funzioni di ingresso e di uscita siano definite sull'asse reale, o quanto meno su semirette del tito $[a, +\infty) \subset \mathbb{R}$. In realtà, questo quadro concettuale apparentemente semplice dovrà essere ampliato e, per certi versi, modificato per descrivere adeguatamente alcune proprietà e trattare numerosi problemi tipici dei Controlli Automatici.

1. La rappresentazione di ingressi e uscite come funzioni del tempo non è sempre conveniente, né sufficiente. In taluni casi si dovrà ricorrere alla teoria delle distribuzioni, e pensare alla mappa ingresso/uscita come ad una corrispondenza fra distribuzioni "applicate" in ingresso e distribuzioni "rilevate" in uscita. In altri, converrrà trasformare secondo Laplace i seganli di ingressoe di uscita, e in tal caso si dovranno introdurre condizioni sul supporto e sulla crescita dei segnali, per garantire l'esistenza delle trasformate.

2. In generale, la dinamica di un sistema si studia a partire da un istante iniziale T e si ipotizza di conoscere l'ingresso dall'istante T in poi. Tuttavia l'uscita, anche ristretta alla semiretta $T, +\infty)$, può dipendere dalla sollecitazione alla quale il sistema è stato sottoposto prima dell'istante T, per cui non è in generale univoca la mappa che determina la funzione di uscita a partire dalla retrizione dell'ingresso.
Il ricorso a modelli di stato, tipico della Teoria dei Sistemi, ovvia a questo inconveniente in modo radicale, perché lo stato all'istante T contiene tutta l'informazione sulla "storia del sistema" precedente l'istante T necessaria per calcolare l'uscita in $[T, +\infty)$.
Nell'ambito dei Controlli Automatici, il problema viene affrontato in modi diversi, a seconda del modello matematico impiegato per rappresentare la mappa ingresso/uscita.

α) In taluni casi, l'ingresso $u(\cdot)$, ristretto a $[T, +\infty)$, viene interpretato come una "distribuzione regolare" a supporto in $[T, +\infty)$ e sommato ad alcuni termini "impulsivi" all'istante T, che producono successivamente a T gli stessi effetti dell'ingresso che ha preceduto l'istante T.

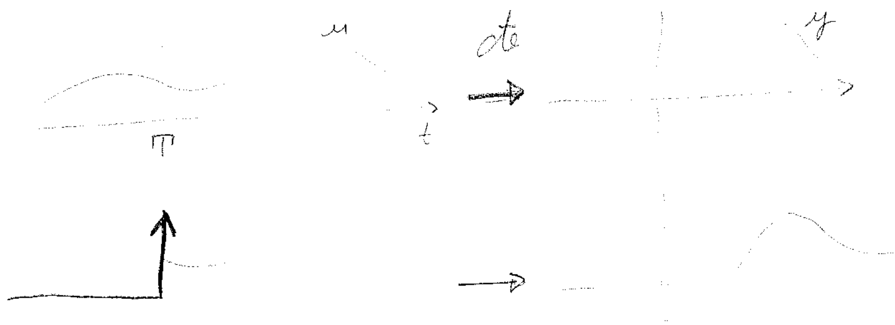


Figura 2.1.1

Naturalmente, ciò richiede di ampliare l'insieme degli ingressi ammissibili con le distribuzioni.

β) In altri casi, si descrive il legame ingresso/uscita con un'equazione differenziale in $u(\cdot$ e $y(\cdot)$

$$f(y, y^{(1)}, \dots, y^{(n)}, u, u^{(1)}, \dots, u^{(m)}) = 0$$

Una rappresentazione di questo tipo non fornisce un legame univoco fra u e y. Per determinare univocamente $y(\cdot)$, oltre ad $u(\cdot)$ occorre specificare $y(\cdot)$, y$^{(1)}(\cdot), \dots, y^{(n-1)}(\cdot)$ in un punto dell'asse dei tempi. Nei casi "buoni" è allora unica la soluzione dell'equazione. Il vantaggio consiste nel fatto che proprio l'assegnazione delle condizioni iniziali in T consente di trascurare i valori di ingresso per $t < T$ nel calcolare l'uscita su $[T, +\infty)$.

γ) Il ricorso alle trasformate di Laplace presuppone di avere ingressi nulli per $t < 0$ e la trattazione dei casi in cui ciò non succede può essere affrontata ricorrendo a trasformate di distribuzioni.

3. Talvolta conviene concatenare ingressi diversi, ovvero considerare, a partire da due ingressi $u_1(\cdot), u_2(\cdot) \in \mathcal{U}$, un ingresso così definito

$$(u_{1n}Tu_2)(t) = \begin{cases} u_1(t) & \text{per } t < T \\ u_2(t) & \text{per } t \geq T \end{cases}$$

In questo caso nel punto T l'ingresso $u_{1n}Tu_2$ presenta generalmente delle discontinuità, e ciò può dar luogo a problemi quando si ricorra a modelli con equazioni differenziali.

2.2 Mappe ingresso/uscita e loro proprietà

Fissiamo un quadro di riferimento piuttosto semplice e al suo interno formalizziamo le principali proprietà di cui può essere dotata una mappa i/u.

1. Il sistema ha un ingresso e un'uscita scalari[1], ovvero $u(\cdot)$ e $y(\cdot)$ prendono valori in $\mathbb{R}$.

2. Gli ingressi sono funzioni del tempo con "supporto compatto a sinistra" ovvero, per ogni ingresso
$$u(\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto u(t)$$
che considereremo, esiste un istante b prima del quale esso è identicamente nullo.

3. In corrispondenza all'ingresso nullo l'evoluzione dell'uscita è la funzione identicamente nulla, e ogni altro ingresso del tipo specificato al punto (2) determina univocamente la funzione d'uscita $y(\cdot)$.

4. L'insieme $\mathcal{U}_R$ delle funzioni applicabili non sarà soggetto, in prima battuta, a condizioni aggiuntive oltre a quella sul supporto[2], cosicché il sistema verrà visto come una mappa $\mathcal{A}$ che associa ad ogni funzione $u(\cdot) \in \mathcal{U}_R$ una funzione d'uscita $y(\cdot) = \mathcal{A}(u(\cdot))$.

5. per il momento, non faremo ipotesi particolari sull'insieme delle funzioni d'uscita.

Moltissime mappe i/u di sistemi fisici o tecnologici sono dotate della proprietà di causalità e molte posseggono anche la proprietà di invarianza (o almeno la posseggono in modo approssimato per intervalli considerevoli di tempo). Per definirle, conviene introdurre due operatori di proiezione, sul passato e sul futuro di un istante temporale T.

Definizione 2.2.1 [Operatori di proiezione sul passato e sul futuro di T] *Sia $T \in \mathbb{R}$. Per ogni funzione $f(\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ poniamo*

$$(\mathcal{P}_T f)(t) = \begin{cases} f(t) & \text{se } t < T \\ 0 & \text{se } t \geq T \end{cases}, \qquad (\mathcal{F}_T f)(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < T \\ f(t) & \text{se } t \geq T \end{cases} \tag{2.1}$$

$\mathcal{P}_T$ e $\mathcal{F}_T$ si dicono, rispettivamente, la proiezione sul passato e la proiezione sul futuro di T.

- Esercizio 2.2.1 (i) Ogni segnale $f(\cdot)$ può scriversi come $f = \mathcal{P}_T f + \mathcal{F}_T f$;
(ii) l'operatore $\mathcal{F}_T$ può essere scritto come $\mathrm{id} - \mathcal{P}_T$, con id l'operatore identità.

Definizione 2.2.2 [Mappa i/u causale] *La mappa i/u $\mathcal{A} : \mathcal{U}_R \to \mathcal{Y} : u(\cdot) \mapsto y(\cdot)$ è causale per ogni $T \in \mathbb{R}$ e per ogni $u(\cdot) \in \mathcal{U}_R$ si ha*

$$\mathcal{P}_T\Big(\mathcal{A}u\Big) = \mathcal{P}_T\Big(\mathcal{A}(\mathcal{P}_T u)\Big) \tag{2.2}$$

ossia l'ingresso $u(\cdot)$ e la sua proiezione sul passato fino all'istante T producono fino all'istante T la medesima uscita.

Si noti che nella definizione di causalità i valori assunti dall'ingresso u su $[T, +\infty)$ sono irrilevanti a determinare il valore dell'uscita su $(-\infty, T)$.

[1]quanto diremo si estende tuttavia senza serie difficoltà al caso in cui gli ingressi e le uscite hanno valori vettoriali

[2]In molti casi, tuttavia si supporrà che $\mathcal{U}_R$ contenga soltanto funzioni continue a tratti

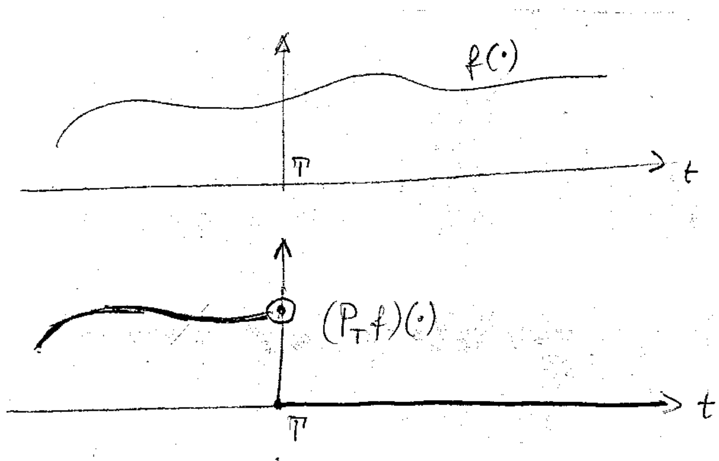


Figura 2.2.1

- ESERCIZIO 2.2.2 Se $\mathcal{A} : \mathcal{U}_R \to \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ è causale, allora
  (i) le funzioni dell'immagine di $\mathcal{A}$, cioè le funzioni di uscita del sistema, hanno supporto compatto a sinistra.
  (ii) $\mathcal{F}_T\Big(\mathcal{A}(\mathcal{F}_T u)\Big) = \mathcal{A}(\mathcal{F}_T u)$

  ♯ *Soluzione. (i) Se $y = \mathcal{A}u$ e se $u(t) = 0,\ \forall t < b$, allora per ogni $T \leq b$ si ha*

$$\mathcal{P}_T y = \mathcal{P}_T(\mathcal{A}u) = \mathcal{P}_T\Big(\mathcal{A}(\mathcal{P}_T u)\Big) = \mathcal{P}_T\Big(\mathcal{A}0\Big) = \mathcal{P}_T 0 = 0$$

  ovvero y è nulla per ogni $t < b$.
  (ii) Dal punto (ii) dell'esercizio 2.2.1, $\mathcal{F}_T\Big(\mathcal{A}(\mathcal{F}_T u)\Big) = \mathcal{A}(\mathcal{F}_T u) - \mathcal{P}_T\Big(\mathcal{A}(\mathcal{F}_T u)\Big)$. Il supporto di $\mathcal{F}_T u$ è contenuto in $[T, \infty)$ e per il punto precedente $\mathcal{A}(\mathcal{F}_T u)$ è nullo per ogni $t < T$. Quindi $\mathcal{P}_T\Big(\mathcal{A}(\mathcal{F}_T u)\Big) = 0$.

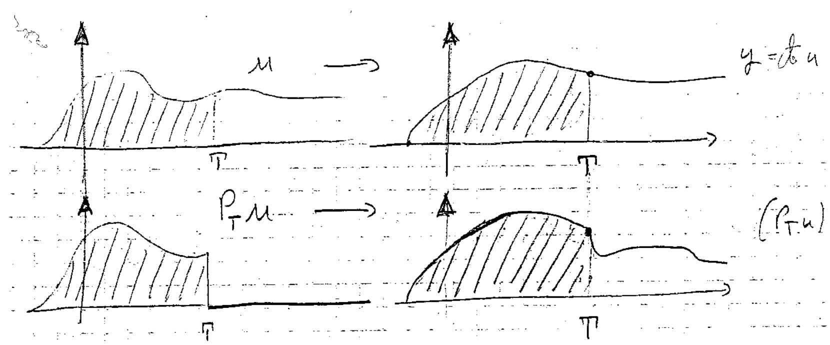


Figura 2.2.2

Proposizione 2.2.3 *Per la mappa i/u $\mathcal{A} : \mathcal{U}_R \to \mathcal{Y}$ sono fatti equivalenti*

i) *$\mathcal{A}$ è causale;*

ii) *Per ogni $u, \tilde{u} \in \mathcal{U}_R$ e ogni $T \in \mathbb{R}$,*

$$\mathcal{P}_T u = \mathcal{P}_T \tilde{u} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{P}_T(\mathcal{A}u) = \mathcal{P}_T(\mathcal{A}\tilde{u})$$

PROVA (i) $\Rightarrow$ (ii) Si supponga che gli ingressi u e $\tilde{u}$ abbiamo la medesima proiezione sul passato di T

$$\mathcal{P}_T u = \mathcal{P}_T \tilde{u}. \tag{2.3}$$

Allora

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_T(\mathcal{A}u) &= \mathcal{P}_T\Big(\mathcal{A}(\mathcal{P}_T u)\Big) && \text{per } (i)\\ &= \mathcal{P}_T\Big(\mathcal{A}(\mathcal{P}_T \tilde{u})\Big) && \text{per } (2.3)\\ &= \mathcal{P}_T(\mathcal{A}\tilde{u}) && \text{per } (i)\end{aligned}$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Se u è un ingresso arbitrario, poniamo

$$\tilde{u} := \mathcal{P}_T u = \mathcal{P}_T(\mathcal{P}_T u) = \mathcal{P}_T \tilde{u} \tag{2.4}$$

Si ha allora

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_T(\mathcal{A}u) &= \mathcal{P}_T(\mathcal{A}\tilde{u}) && \text{per } (ii)\\ &= \mathcal{P}_T\Big(\mathcal{A}(\mathcal{P}_T u)\Big) && \text{per } (2.4)\end{aligned}$$

e la proposizione è dimostrata. ∎

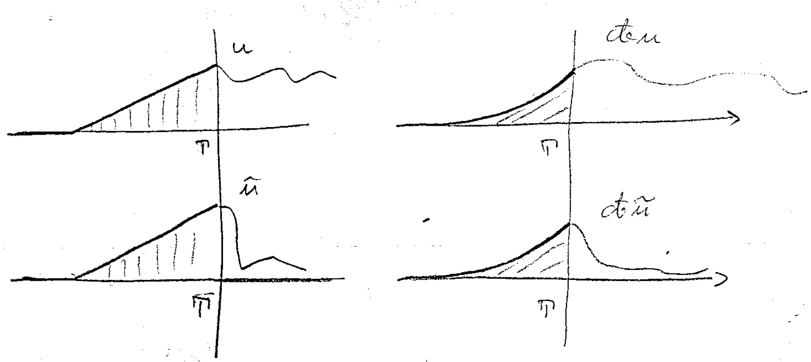


Figura 2.2.3

La figura 2.2.3 illustra la condizione (ii) della proposizione che abbiamo appena dimostrato

Se $y = \mathcal{A}u$ è l'uscita del sistema che corrisponde all'ingresso u e se consideriamo l'andamento di y nel futuro di T, abbiamo

$$\mathcal{F}_T y = \mathcal{F}_T\Big(\mathcal{A}(\mathcal{P}_T u + \mathcal{F}_T u)\Big) \tag{2.5}$$

e quindi l'uscita da T in avanti dipende sia dall'andamento dell'ingresso negli istanti che precedono T, sia dall'andamento dell'ingresso da T in avanti.
In generale, nella formula precedente la dipendenza di $\mathcal{F}_T y$ da $\mathcal{P}_T u$ è "effettiva", nel senso che, in corrispondenza al medesimo andamento di $\mathcal{F}_T u$, l'uscita $\mathcal{F}_T y$ può assumere valori diversi se le "storie passate" dell'ingresso sono state diverse. In altre parole, se due ingressi u_1 e u_2 soddisfano le condizioni

$$\mathcal{P}_T u_1 \neq \mathcal{P}_T u_2, \qquad \mathcal{F}_T u_1 = \mathcal{F}_T u_2$$

le corrispondenti uscite da T in poi

$$\mathcal{F}_T(\mathcal{A}u_1) \qquad \text{e} \qquad \mathcal{F}_T(\mathcal{A}u_2)$$

possono differire fra loro: il sistema conserva un ricodo delle diverse sollecitazioni che gli sono state applicate nel passato, o ha, come si suol dire una "memoria dinamica"[3].

Osservazione La causalità implica una certa dissimmetria fra passato e futuro, poiché, grazie a (2.2), l'uscita nel passato di T soddisfa

$$\mathcal{P}_T y = \mathcal{P}_T\Big(\mathcal{A}(\mathcal{P}_T u + \mathcal{F}_T u)\Big) = \mathcal{P}_T(\mathcal{A}(\mathcal{P}_T u)) \tag{2.6}$$

ossia è individuata dall'andamento dell'ingresso nel passato di T.

- Esercizio 2.2.3 Che cosa si può dire di un sistema in cui, per ogni $T \in \mathbb{R}$ e per ogni u si abbia

$$\mathcal{P}_T(\mathcal{A}u) = \mathcal{P}_T(\mathcal{A}(\mathcal{P}_T u)) \qquad \text{e} \qquad \mathcal{F}_T(\mathcal{A}u) = \mathcal{F}_T(\mathcal{A}(\mathcal{F}_T u)) \ ?$$

♯ *Soluzione. Avendosi* $y(T) = (\mathcal{A}u)(T) = \Big(\mathcal{F}_T(\mathcal{A}u)\Big)(T) = \Big(\mathcal{F}_T(\mathcal{A}(\mathcal{F}_T u))\Big)(T)$ *possiamo affermare che* $y(T)$ *dipende soltanto dai valori di* $u(\cdot)$ *su* $[T, +\infty)$. *D'altra parte, scelto un arbitrario* $\Delta > 0$, *si ha*

$$y(T) = (\mathcal{A}u)(T) = \Big(\mathcal{P}_{T+\Delta}(\mathcal{A}u)\Big)(T) = \Big(\mathcal{P}_{T+\Delta}(\mathcal{A}(\mathcal{P}_{T+\Delta}u))\Big)(T)$$

e quindi $y(T)$ *dipende solo dai valori di* u *su* $(-\infty, T + \Delta)$. *Concludendo,* $y(T)$ *dipende soltanto dalla restrizione di* $u(\cdot)$ *all'intervallo* $[T, T + \Delta)$, *con* $\Delta > 0$ *arbitrario.*
Ciò vuol dire che $y(T)$ *dipende solo da* $u(T)$*?*

Definizione 2.2.4 [Operatore di traslazione (=shift)] *Sia* $\Delta \in \mathbb{R}$ *Per ogni funzione* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto f(t)$ *poniamo*

$$\sigma_\Delta f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto (\sigma_\Delta f)(t) = f(t + \Delta) \tag{2.7}$$

Se $\Delta > 0$, *il grafico di* $\sigma_\Delta f$ *risulta traslato "indietro" di* Δ, *ossia* $\Delta > 0$ *agisce come un operatore di anticipo*

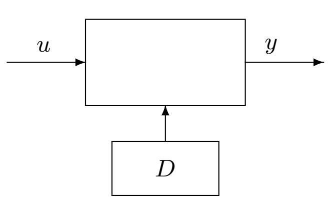
Definizione 2.2.5 *La mappa i/u* $\mathcal{A} : \mathcal{U}_R \to \mathcal{Y}$ *è invariante per traslazioni - o tempo-invariante - se*

$$\mathcal{A}(\sigma_\Delta u) = \sigma_\Delta(\mathcal{A}u), \quad \forall \Delta \in \mathbb{R},\ \forall u \in \mathcal{U}_R, \tag{2.8}$$

quindi se gli operatori $\mathcal{A}$ *e* σ_Δ *commutano*

---

[3] La modellizzazione dei sistemi mediante mappe i/u può in talune circostanze risultare inadeguata¿ Non è infatti sempre appropriato assumere che l'uscita dipenda univocamente dall'ingresso complessivo, anche se considerato fino dall'istante b del suo inizio, né che l'uscita $\mathcal{F}_T y$ dall'istante T in avanti sia individuata esclusivamente dall'ingresso "futuro" $\mathcal{F}_T u$ e dalla memoria dinamica dell'ingresso "passato" $\mathcal{P}_T u$. In svariate situazioni, non necessariamente banali o di facile riconoscibilità, il sistema può comprendere alcune parti che agiscono sull'uscita insieme con l'ingresso e indipendentemente da esso.



In tale ipotesi, l'uscita al generico istante t dipende anche (in ipotesi di causalità) dall'evoluzione fino all'istante t di tali parti, e l'operatore $\mathcal{A}$ non ha carattere di univocità, dal momento che il legame ingresso/uscita dipende dall'evoluzione temporale del sottosistema D. A seconda dei casi, si tiene conto della situazione inglobando nella memoria dinamica anche l'effetto di D, oppure considerando un sistema con ulteriori variabili di ingresso.

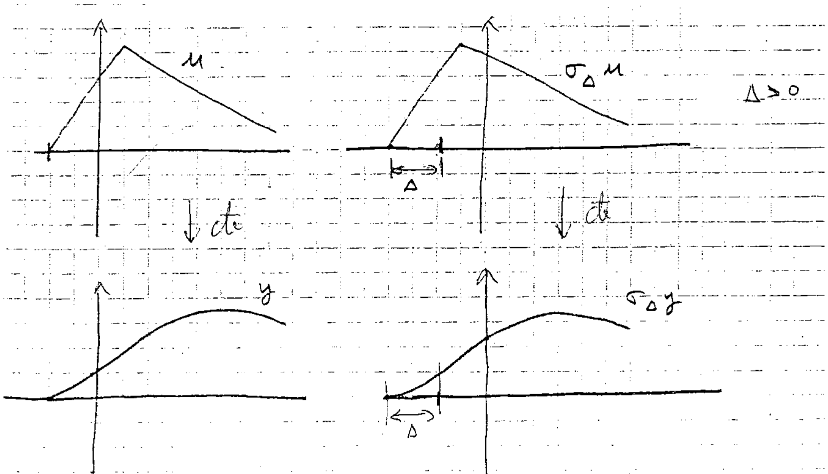


Figura 2.2.4

Un sistema tempo-invariante può sempre essere studiato ipotizzando che il supporto di $u(\cdot)$ sia incluso nel semiassepositivo $[0, = \infty)$: se del caso, basterà ritardare l'ingresso e, del medesimo ammontare, la corrispondente uscita.

- Esercizio 2.2.4 Se $f(t) = \cos t$, qual è la funzione $\sigma_{\frac{\pi}{2}} f$?

Definizione 2.2.6 [Linearità] *La mappa i/u $\mathcal{A} : \mathcal{U}_R \to \mathcal{Y}$ è lineare se, per ogni coppia di ingressi $u_1,\ u_2$ e per ogni coppia di scalari $\alpha_1,\ \alpha_2 \in \mathbb{R}$ si ha*

$$\mathcal{A}(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = \alpha_1(\mathcal{A}u_1) + \alpha_2(\mathcal{A}u_2) \tag{2.9}$$

Se $\mathcal{A}$ è <u>lineare e causale</u>, per ogni $T \in \mathbb{R}$ l'uscita y indotta da u soddisfa

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_T y &= \mathcal{F}_T\Big(\mathcal{A}(\mathcal{P}_T u + \mathcal{F}_T u)\Big) = \mathcal{F}_T\Big(\mathcal{A}(\mathcal{P}_T u) + \mathcal{A}(\mathcal{F}_T u)\Big) \\
&= \mathcal{F}_T\Big(\mathcal{A}(\mathcal{P}_T u)\Big) + \mathcal{F}_T\Big(\mathcal{A}(\mathcal{F}_T u)\Big) = \mathcal{F}_T\Big(\mathcal{A}(\mathcal{P}_T u)\Big) + \mathcal{A}(\mathcal{F}_T u)
\end{aligned}$$

(l'ultima eguaglianza discende dall'esercizio 2.2.2). Pertanto, l'uscita in $[T, +\infty)$ è somma di due componenti: la seconda $\mathcal{A}(\mathcal{F}_T u)$ sarà detta "uscita forzata", ed è prodotta dalla proiezione dell'ingresso u su $[T, +\infty)$, la prima, che sarà detta "uscita (in evoluzione) libera" dipende dalla proiezione dell'ingresso si $(-\infty, T]$, ovvero dalla memoria che il sistema conserva, da T in avanti, della sollecitazione cui è stato sottoposto prima di T. Per ogni $t \geq T$ avremo allora

$$y(t) = \Big(\mathcal{A}(\mathcal{P}_T u)\Big)(t) + \Big(\mathcal{A}(\mathcal{F}_T u)\Big)(t) \tag{2.10}$$

Se, inoltre, $\mathcal{A}$ è <u>tempo-invariante</u> e, ricorrendo eventualmente ad una traslazione, ci riferiamo all'istante $T = 0$, ponendo $u_+(\cdot) = (\mathcal{F}_0 u)(\cdot)$, $u_-(\cdot) = (\mathcal{P}_0 u)(\cdot)$, da (2.10) ricaviamo

$$y(t) = (\mathcal{A}u_-)(t) + (\mathcal{A}u_+)(t), \quad \forall t \geq 0 \tag{2.11}$$

- Esercizio 2.2.5 Se la mappa i/u $\mathcal{A}$ è invariante, si verifichi che per ogni T si ha

$$\begin{aligned}
\sigma_T(\mathcal{A}(\mathcal{P}_T u)) &= \mathcal{A}(\mathcal{P}_0(\sigma_T u)) = \mathcal{A}(\sigma_T u)_- \\
\sigma_T(\mathcal{A}(\mathcal{F}_T u)) &= \mathcal{A}(\mathcal{F}_0(\sigma_T u)) = \mathcal{A}(\sigma_T u)_+
\end{aligned}$$

Se, inoltre, $\mathcal{A}$ è lineare e causale, tenendo conto di (2.10) si verifichi che

$$(\sigma_T y)(t) = (\mathcal{A}(\sigma_T u)_-)(t) + (\mathcal{A}(\sigma_T u)_+)(t)\ , \qquad \forall t \geq T$$

ossia l'uscita traslata $\sigma_T y$ può essere ottenuta come somma dell'evoluzione libera prodotta da $(\sigma_T u)_-$ e dell'evoluzione forzata prodotta da $(\sigma_T u)_+$.

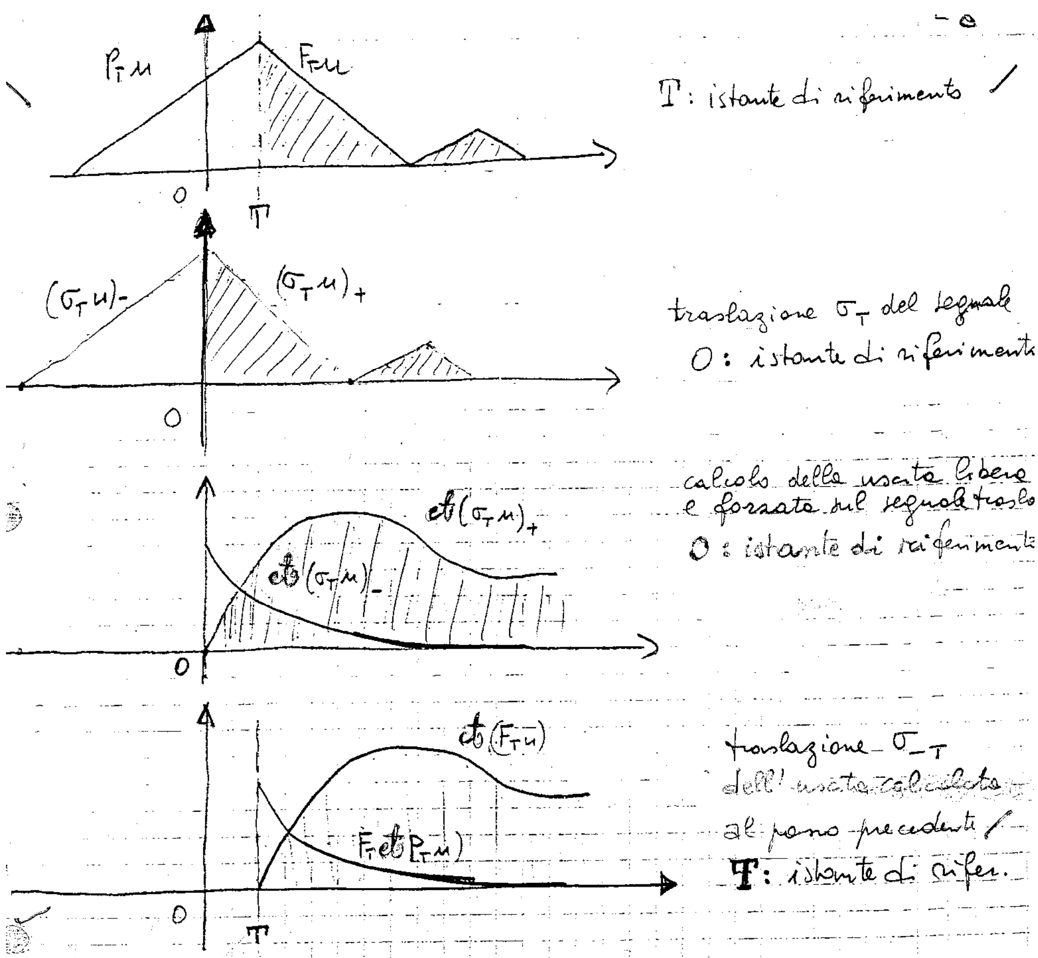


Figura 2.2.5

Si osservi infine che, quando $\mathcal{A}$ è un operatore lineare, la linearità inerisce al legame fra l'intero ingresso e una qualsivoglia porzione dell'uscita. Sono quindi lineari, insieme con $\mathcal{A} : u \mapsto y$, anche le mappe

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_T\mathcal{A} &: u \mapsto \mathcal{P}_T y \\ \mathcal{F}_T\mathcal{A} &: u \mapsto \mathcal{F}_T y \\ \mathcal{P}_{T_1}\mathcal{F}_{T_2}\mathcal{A} &: u \mapsto \mathcal{P}_{T_1}\mathcal{F}_{T_2} y \end{aligned}$$

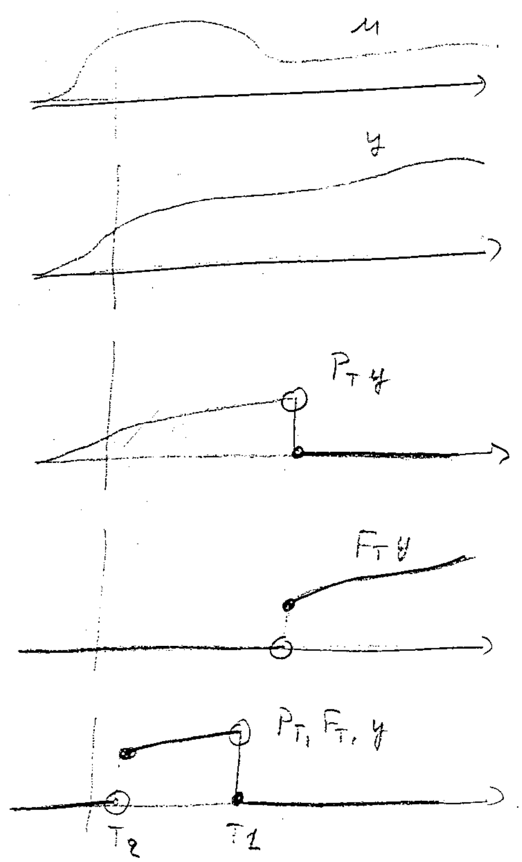


Figura 2.2.6

In generale, non è invece lineare (e neppure univoco) il legame fra una porzione dell'ingresso e l'uscita (o una porzione di essa): da

$$y(\cdot) = \mathcal{A}(\mathcal{P}_0 u) + \mathcal{A}(\mathcal{F}_0 u)$$

non segue che $y(\cdot)$ dipenda linearmente da $\mathcal{F}_0 u$ e neppure che l'uscita futura $\mathcal{F}_0 y$ dipenda linearmente dall'ingresso futuro $\mathcal{F}_) u$ quando l'ingresso passato $\mathcal{P}_0 u$ è mantenuto costante. Si veda in proposito il successivo

- Esercizio 2.2.6 Siano $u_1(\cdot)$ e $u_2(\cdot)$ due funzioni di ingresso soddisfacenti la condizione $\mathcal{P}_0 u_1 = \mathcal{P}_0 u_2$ e si consideri l'ingresso $u_3(\cdot)$ definito da

$$u_3(t) = \begin{cases} u_1(t) = u_2(t) & \text{per } t < 0 \\ u_1(t) + u_2(t) & \text{per } t \geq 0 \end{cases}$$

Se $y - 1(\cdot)$, $y_2(\cdot)$ e $y_3(\cdot)$ sono le uscite corrispondenti ai tre ingressi considerati, si verifichi che in generale risulta

$$\mathcal{F}_0 y_3 \neq \mathcal{F}_0 y_1 + \mathcal{F}_0 y_2$$

In altre parole, non vale la sovrapposizione degli effetti con riferimento alle proiezioni su $[0, +\infty)$ degli ingressi e delle uscite, anche quando è mantenuta costante la memoria dinamica $\mathcal{P}_0 u$.