Capitolo 4

Rappresentazione dei sistemi lineari mediante equazioni differenziali

4.1 Mappe i/u lineari, causali, invarianti e equazioni differenziali

Le equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti forniscono un metodo alternativo a quello dell'integrale di convoluzione per rappresentare il legame ingresso/uscita di un sistema lineare, causale, invariante (d'ora in poi, LCI). Esse offrono un certo numero di vantaggi rispetto all'integrale di convoluzione:

1. nella costruzione di un modello matematico a partire dalle equazioni dei sottosistemi elementari che lo compongono, di solito si ottiene , eliminando le equazioni di vincolo fra i vari componenti, una equazioni differenziale;

2. la memoria dinamica del sistema, ovvero l'effetto del passato sulla dinamica futura, è agevolmente rappresentato dalle condizioni iniziali che si assegnano per risolvere l'equazione;

3. alcuni aspetti qualitativi della dinamica (p.es. la stabilità) sono "codificati" (per così dire) nell'insieme dei coefficienti dell'equazione.

Quali svantaggi rispetto alla convoluzione? Accenniamo soltanto al fatto che non tutti i legami i/u rappresentabili con un integrale di convoluzione possono essere descritti mediante un'equazione differenziale e, inoltre, ricordiamo che in generale i dti sperimentali forniscono il nucleo di convoluzione $h(\cdot)$ piuttosto che (icoefficienti del(l'equazione differenziale.

Consideriamo un'equazione differenziale lineare che ponga in relazione la funzione $u(\cdot)$ e le sue prime m derivate con la funzione $y(\cdot)$ e le sue prime n derivate

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i y}{dt^i} = \sum_{i=0}^{m} b_i \frac{d^i u}{dt^i} \tag{4.1}$$

Supponiamo che

i) la funzione $u(\cdot)$ sia assegnata, derivabile fino all'ordine m e abbia supporto compatto a sinistra, ovvero sia nulla per ogni $t < b$, per qualche $b \in \mathbb{R}$;

ii) in un istante $t_0 < b$ risulti

$$\mathbf{x}(t_0) := \begin{bmatrix} y(t_0) \\ y^{(1)}(t_0) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t_0) \end{bmatrix} = \mathbf{0} \tag{4.2}$$

Allora, per il teorema di Cauchy, esiste una e una sola funzione $y(\cdot)$, definita su tutto l'asse reale e soddisfacente l'equazione (4.1) e le condizioni iniziali (4.2).
Tale funzione, inoltre, è identicamente nulla per $t < b$. Infatti, sulla semiretta $(-\infty, b)$ il secondo membro di (4.1) è identicamente nullo e la funzione nulla su $(-\infty, b)$ è l'unica che risolve l'equazione

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i y}{dt^i} \;=\; 0, \qquad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{0}$$

Il legame $u(\cdot) \mapsto y(\cdot)$, univocamente individuato da (4.1) e dall'ipotesi che le condizioni iniziali siano nulle in qualche istante $t_0 < b$, (ovvero l'ipotesi che y sia identicamente nulla fuori dalla semiretta che contiene il supporto di u) è un legame causale, invariante e lineare.

La *causalità* è codificata nella struttura stessa dell'equazione differenziale: l'introduzione di una modifica (in particolare, ponendolo a zero) nell'andamento dell'ingresso $u(\cdot)$ per $t \geq T$ non altera l'uscita $y(\cdot)$ per $t < T$, se vengono tenute inalterate le condizioni iniziali in t_0. Infatti, sulla semiretta $(-\infty, T)$ l'equazione è la medesima, e con le stesse condizioni iniziali su y, tanto per u che per $\mathcal{P}_T u$.

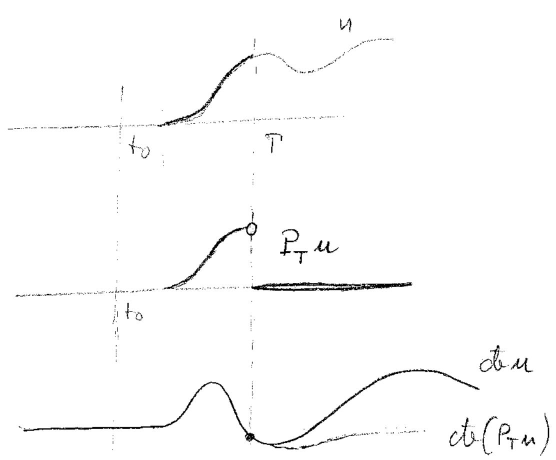


Figura 4.1.1

L'*invarianza* consegue dal fatto che in (4.1) i coefficienti a_i e b_i non dipendono dal tempo e quindi, se la coppia (u, y) soddisfa l'equazione , anche la coppia $(\sigma_\Delta u, \sigma_\Delta y)$ la soddisfa:

$$\sum_i a_i (D^i y)(t) \;=\; \sum_j b_j (D^j u)(t) \qquad \forall t$$

$$\begin{aligned}
\sum_i a_i(D^i y)(t+\Delta) &= \sum_j b_j(D^j u)(t+\Delta) \qquad \forall t \\
\sum_i a_i D^i(\sigma_\Delta y)(t) &= \sum_j b_j D^j(\sigma_\Delta u)(t) \qquad \forall t
\end{aligned}$$

La *linearità* della mappa è pure ovvia: se y_1 e y_2 sono le soluzioni corrispondenti agli ingressi u_1 e a u_2, entrambe identicamente nulle prima di un istante comune b, allora $k_1y_1 + k_2y_2$ è la soluzione corrispondente all'ingresso $k_1u_1 + k_2u_2$, identicamente nulla prima dell'istante b

$$\begin{aligned}
k_1 \sum_i a_i D^i y_1 &= k_1 \sum_j b_j D^j u_1 \\
k_2 \sum_i a_i D^i y_2 &= k_2 \sum_j b_j D^j u_2 \\
-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,- & \quad -\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,- \\
\sum_i a_i D^i(k_1y_1 + k_2y_2) &= \sum_j b_j D^j(k_1u_1 + k_2u_2)
\end{aligned}$$

4.2 Reti elettriche ed equazioni lineari

In una rete elettrica gli ingressi sono usualmente tensioni o correnti impresse, rappresentate dai corrispondenti generatori ideali, e le uscite sono tensioni fra due specifici nodi, o correnti che percorrono particolari componenti. Applicando i principi di Kirchhoff e le leggi caratteristiche dei componenti elementari, si perviene, quando questi ultimi sono lineari, ad un'equazione lineare che connette l'ingresso (e le sue derivate) con l'uscita (e le sue derivate)[1] Qui ci limitiamo a esporre un metodo generale per ricavare l'equazione differenziale quando la rete sia stata descritta tramite un modello del tipo

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + b_1 u \\
\frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + b_2 u \\
\cdots & \quad \cdots \\
\frac{dx_u}{dt} &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + b_n u \\
y &= c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n + du \qquad (4.3)
\end{aligned}$$

In generale, è piuttosto facile ricavare la (4.3) assumendo come variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$ le tensioni cui condensatori e le correnti negli induttori presenti nella rete, come u la grandezza impressa e come y l'uscita che interessa. Si noti che i coefficienti a_{ij}, b_i, c_i e d dipendono dai parametri C, R, L che caratterizzano i rami della rete.
Riscriviamo (4.3) in forma compatta

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}u$$

[1] Per le nozioni di base si rinvia ai corsi di Elettrotecnica; per alcuni complementi, si possono consultare gli appunti di Teoria delle Reti Elettriche.

$$y = C\mathbf{x} + du$$

con

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}, \quad C = [\, c-1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_n \,]$$

e deriviamo iteratamente la seconda equazione, tenendo conto della prima

$$\begin{aligned} y &= C\mathbf{x} + du \\ y^{(1)} &= C\mathbf{x}^{(1)} + du^{(1)} = CA\mathbf{x} + C\mathbf{b}u + du^{(1)} \\ y^{(2)} &= CA\mathbf{x}^{(1)} + CA\mathbf{b}u^{(1)} + du^{(2)} = CA^2\mathbf{x} + CA\mathbf{b}u + C\mathbf{b}u^{(1)} + du^{(2)} \\ \dots & \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ y^{(n-1)} &= CA^{(n-1)}\mathbf{x} + CA^{(n-2)}\mathbf{b}u + \dots + C\mathbf{b}u^{(n-2)} + du^{(n-1)} \\ y^{(n)} &= CA^{(n)}\mathbf{x} + CA^{(n-1)}\mathbf{b}u + \dots + C\mathbf{b}u^{(n-1)} + du^{(n)} \end{aligned} \tag{4.4}$$

Se $\alpha_0 + \alpha_1 s + \dots + \alpha_{n-1}s^{n-1} + s^n = \det(sI_n - A)$ è il polinomio caratteristico di A, il teorema di Cayley-Hamilton afferma che

$$\alpha_0 I + \alpha_1 A + \dots + \alpha_n - 1A^{n-1} + A^n = 0.$$

Moltiplicando nell'ordine per $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, 1$ la prima, la seconda, ..., l'ultima equazione di (4.4) e sommando membro a membro, si elimina la variabile $\mathbf{x}$ ottenendo l'equazione differenziale di ordine n

$$\alpha_0 y + \alpha_1 y^{(1)} + \dots + \alpha_{n-1}y^{(n-1)} + y^{(n)} = \beta_0 u + \beta_1 u^{(1)} + \dots + \beta_{n-1}u^{(n-1)} + \beta_n u^{(n)} \tag{4.5}$$

4.3 Sistemi meccanici ed equazioni lineari

Le equazioni si scrivono esprimendo l'equilibrio di tutte le forze e/o delle coppie applicate a ciascuna delle parti in movimento. Come per le reti elettriche, si cerca di ricorrere a modelli a "costanti concentrate", anche se in questo caso l'approssimazione è meno attendibile[2]. Esistono inoltre fenomeni non lineari, talvolta non suscettibili nemmeno di una linearizzazione locale, dei quali si deve tener conto. Si pensi, ad esempio, ai fenomeni di attrito: la forza di attrito agisce sempre nel verso contrario rispetto a quello della velocità, ma può essere di tipo diverso (vedi figura 4.3.1) a seconda dei fenomeni che si intendono modellare. Nei modelli lineari si fa sempre riferimento all'attrito viscoso.

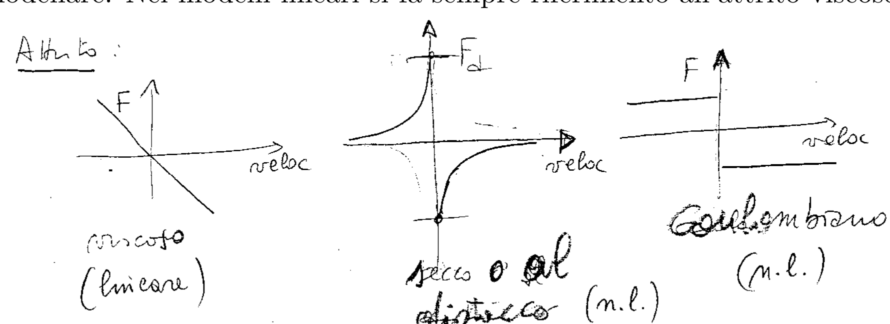


Figura 4.3.1

[2]ad esempio, si sostituisce alla massa distribuita lungo una molla una massa concentrata agli estremi

4.3.1 Sistemi in moto traslatorio

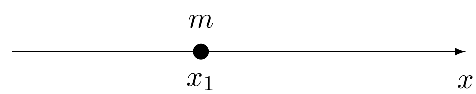
La schematizzazione a costanti concentrate tiene conto di tre componenti elementari:

- la massa, sede delle forze d'inerzia,
- la molla, sede delle forze elastiche
- lo smorzatore, sede delle forze di attrito viscoso.

La somma di tutte le forze agenti su un punto x_1 (forze esterne al sistema, forze di inerzia, forze esercitate sul punto da altri punti interni al sistema) deve essere zero ad ogni istante:

i) la forza d'inerzia, dovuta a un punto materiale di massa m situato in x_1.
Si tratta della forza esercitata SUL punto x_1 DAL corpo di massa m situato in x_1 ed è

$$-m\frac{d^2x_1}{dt^2}$$



[mnemonicamente: il punto x_1 deve applicare alla massa m, per accelerarla, una forza pari a $m\frac{d^2x}{dt^2}$ e la massa "reagisce" sul punto con una forza d'inerzia pari a $-m\frac{d^2x}{dt^2}$]

ii) la forza elastica esercitata SUL punto x_1 da una molla.
Idealmente, la molla esercita sul punto di coordinata x_1 una forza data da

$$-kx_1 + kx_0$$

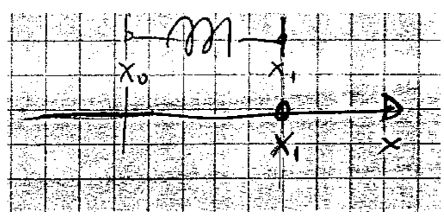


Figura 4.3.2

Se $x_1 = x_0$ la forza esercitata sul punto x_1 è nulla, se $x_1 > x_0$ la forza è negativa, se $x_1 < x_0$ la forza è positiva.

La figura 4.3.3 suggerisce un arrangiamento che consente al punto x_0 di assumere posizioni sia a destra che a sinistra di x_1

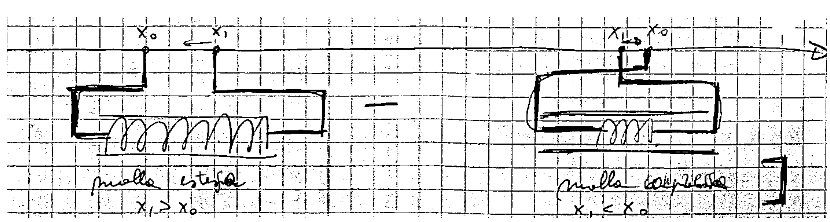


Figura 4.3.3

iii) forza di attrito viscoso (associata a uno smorzatore[3]). Lo smorzatore esercita sul punto x_1 una forza data da

[3]in inglese "damper"

$$-B\left(\frac{dx_1}{dt} - \frac{dx_0}{dt}\right), \quad B > 0$$

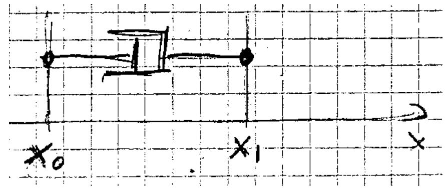


Figura 4.3.4

Esercizio 4.3.1 Consideriamo la catena meccanica di figura 4.3.5

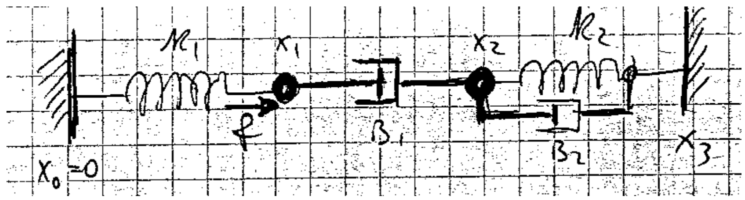


Figura 4.3.5

dove i punti materiali x$_i$ hanno massa m_i, $i = 1, 2$. Le equazioni della catena meccanica sono le seguenti

$$\begin{aligned} 0 &= f - m_1\ddot{x}_1 - k_1x_1 - B_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) && \text{forze su } x_1 \quad (4.6)\\ 0 &= -m_2\ddot{x}_2 - k_2(x_2 - \bar{x}_3) - B_2\dot{x}_2 - B_1(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) && \text{forze su } x_2 \quad (4.7)\end{aligned}$$

Per il legame ingresso/uscita, se prendiamo come uscita il valore di x_1 e come ingressao la forza f, da (4.6) si ha

$$\begin{aligned} f &= m_1x_1^{(2)} + B_1x_1^{(1)} + k_1x_1 \; - \; B_1x_2^{(1)} && \text{si ricava } x_2^{(1)}\\ f^{(1)} &= m_1x_1^{(3)} + B_1x_1^{(2)} + k_1x_1^{(1)} - B_1x_2^{(2)} && \text{si ricava } x_2^{(2)}\\ f^{(2)} &= m_1x_1^{(4)} + B_1x_1^{(3)} + k_1x_1^{(2)} - B_1x_2^{(3)} && \text{si ricava } x_2^{(3)} \quad (4.8)\end{aligned}$$

Derivando la (4.7), si ottiene

$$0 = m_2x_2^{(3)} + k_2x_2^{(1)} + B_2x_2^{(2)} + B_1x_2^{(2)} - B_1x_1^{(2)} \tag{4.9}$$

Basta ora sostituire in (4.9) alle derivate successive di x_2 le espressioni fornite da (4.8), per ottenere un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti nelle variabili f e x_1 e nelle loro derivate.

4.3.2 Sistemi in moto rotatorio su uno o più assi paralleli

I componenti elementari da prendere in considerazione sono:

i) Il rotore ideale, con momento di inerzia J. La sua posizione è definita dall'angolo θ_1, formato da una semiretta generatrice solidale con il rotore stesso e da una semiretta fissa su una sezione di riferimento.

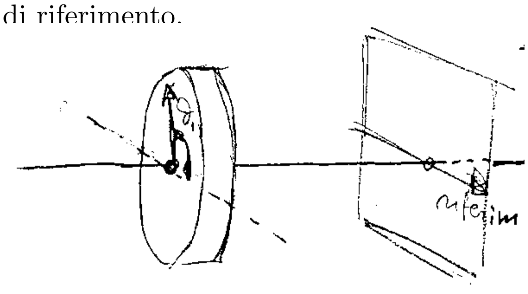


Figura 4.3.6

Per indurre nel rotore un'accelerazione angolare pari a $\frac{d^2\theta}{dt^2}$, la sezione del rotore deve esercitare su quest'ultimo una coppia di valore eguale a $J\frac{d^2\theta}{dt^2}$. In corrispondenza, il rotore esercita sulla sezione una coppia di inerzia di valore pari a $-J\dfrac{d^2\theta}{dt^2}$

ii) La molla torsionale. Se θ_1 e θ_2 sono gli spostamenti angolari de(lle sezioni solidali con) i terminali della molla rispetto ad una sezione fissa di riferimento, la molla esercita sulla sezione 1 una coppia pari a $-k(\theta_1 - \theta_0)$, $\quad k > 0$ ed è intesa essere a riposo se $\theta_1 = \theta_0$.

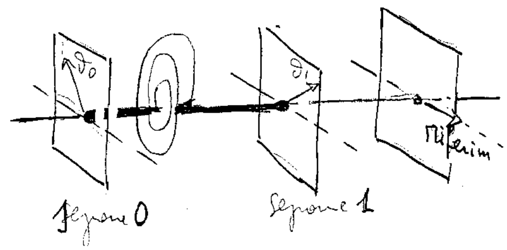


Figura 4.3.7

iii) Lo smorzatore viscoso. Se θ_1 e θ_0 hanno significato analogo al caso della molla torsionale, lo smorzatore esercita sulla sezione 1 una coppia pari a

$$-B(\frac{d\theta_1}{dt} - \frac{d\theta_0}{dt}), \quad B > 0$$

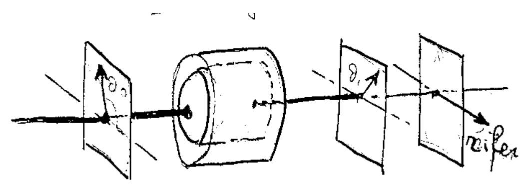


Figura 4.3.8

iv) Le catene di trasmissione ideali.

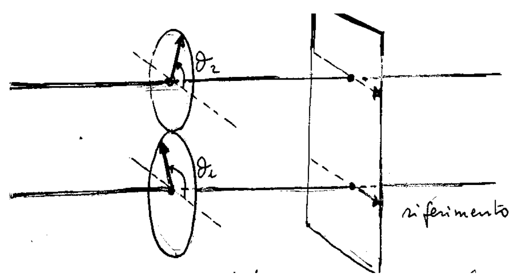


Figura 4.3.9

Se n_1 e n_2 sono i denti delle ruote calettate sull'asse 1 e sull'asse 2 e se $\frac{d\theta_1}{dt}$ e $\frac{d\theta_2}{dt}$ sono le velocità angolari delle due ruote rispetto a un riferimento fisso nello spazio, si ha

$$n_1 \frac{d\theta_1}{dt} = n_2 \frac{d\theta_2}{dt} \tag{4.10}$$

In condizioni ideali, ipotizzando cioè assenza di attriti e ruote con inerzia nulla, le coppie che le ruote trasmettono agli assi devono soddisfare la condizione che la potenza meccanica erogata dal sistema delle due ruote al sistema dei due alberi sia complessivamente nulla. Dette T_1 e T_2 le coppie erogate all'asse 1 e all'asse 2 dalle due ruote dentare, si deve avere

$$T_1 \frac{d\theta_1}{dt} + T_2 \frac{d\theta_2}{dt} = 0 \tag{4.11}$$

Da (4.10) e (4.11) segue

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

Esempio 4.3.2 Si consideri il sistema di figura 4.3.10.

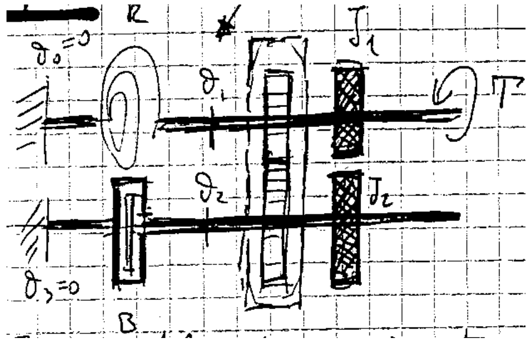


Figura 4.3.10

Ad uno degli alberi è applicata la coppia esterna T (l'ingresso). Come uscita del sistema si prende l'angolo θ_1. Le equazioni del sistema in moto rotatorio sono allora

$$\begin{aligned} 0 &= T - J_1\frac{d^2\theta_1}{dt^2} - k(\theta_1 - \theta_0) + T_1 && \text{coppie sulla sezione 1} \\ 0 &= -J_2\frac{d^2\theta_2}{dt^2} - B(\frac{d\theta_2}{dt} - \frac{d\theta_3}{dt}) + T_2 && \text{coppie sulla sezione 2} \end{aligned} \tag{4.12}$$

dove T_1 e T_2 sono le coppie esercitate sulle sezioni 1 e 2 dalle ruote dentate.
Essendo $T_1 n_2 = T_2 n_1$ e $n_1 d\theta_1/dt = -n_2 d\theta_2/dt$, si possono eliminare T_2 e $d\theta_2/dt$ da (4.12). Inoltre, sono nulle ad ogni istante θ_0 e $d\theta_3/dt$. Si ottiene allora

$$\begin{aligned} 0 &= T - J_1\frac{d^2\theta_1}{dt^2} - k\theta_1 + T_1 \\ 0 &= J_2 d^2\theta_1^2\frac{n_1}{n_2} + B\frac{\mathbb{D}\theta_1}{dt}\frac{n_1}{n_2} + T_1\frac{n_2}{n_1} \end{aligned} \tag{4.13}$$

Moltiplicando la prima equazione per n_2/n_1 e sottraendone la seconda equazione si elimina T_1 e si perviene all'equazione differenziale

$$\frac{d^2\theta_1}{dt^2}\left[J_1\frac{n_2}{n_1} + J_2\frac{n_1}{n_2}\right] + \frac{d\theta_1}{dt}\left[B\frac{n_1}{n_2}\right] + \theta_1\left[k\frac{n_2}{n_1}\right] = \frac{n_2}{n_1}T \tag{4.14}$$

4.4 Sistemi elettromeccanici ed equazioni lineari

Prendiamo ora in considerazione un modello semplificato di motore elettrico in corrente continua, a collettore, che trascina in rotazione un carico meccanico (complessivo, includente cioè anche la parte rotante del motore).

4.4.1 Le equazioni del modello

Il motore è composto da una parte statorica, con funzioni di induttore, schematizzabile con un circuito R_e L_e, detto di eccitazione, e di una parte rotorica, scahematizzabile dal punto di vista elettrico con un circuito R_a L_a, detto di armatura, in serie con un rotore ideale in cui ha luogo la conversione della potenza elettrica in potenza meccanica (si veda la figura 4.4.1).

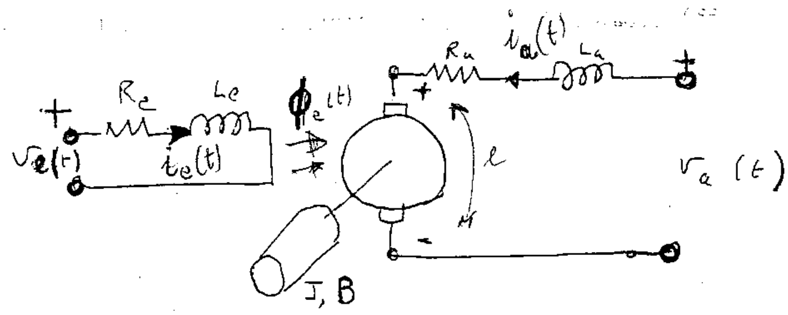


Figura 4.4.1

Ai morsetti di eccitazione (della parte statorica) viene applicata la tensione $v_e(\cdot)$, per effetto della quale nel circuito di eccitazione circola la corrente $i_e(\cdot)$, che sostiene il flusso di eccitazione $\phi_e(\cdot)$ che investe il rotore.
L'equazione del circuito di eccitazione è pertanto (prima equazione "elettrica")

$$\begin{aligned} v_e(t) &= R_e i_e(t) + L_e \frac{di_e}{dt} \\ \phi_e &= L_e i_e \end{aligned} \tag{4.15}$$

Per il circuito di armatura, associato alla parte rotante, si ha invece (seconda equazione "elettrica")

$$v_a(t) = R_a i_a(t) + L_a \frac{di_a}{dt} + e(t) \tag{4.16}$$

dove $e(\cdot)$ è la forza controelettromotrice che si sviluppa nel circuito di armatura a causa del movimento del circuito stesso entro il campo prodotto dal circuito di eccitazione. Tale forza controelettromotrice è data da (prima equazione elettromeccanica, perché coinvolge sia grandezze elettriche che meccaniche)

$$e(t) = k\phi_e(t)\omega(t) = kL_e i_e(t)\omega(t) \tag{4.17}$$

dove $\omega(\cdot)$ è la velocità angolare di rotazione dell'armatura e $\phi_e(\cdot)$ è, come si è visto, il flusso generato al traferro dalla corrente nel circuito di eccitazione
Un'ulteriore equazione di tipo elettromeccanico è

$$c(t) = k\phi_e(t)i_a(t) = kL_e i_e(t)i_a(t), \tag{4.18}$$

dove $c(t)$ è la coppia meccanica generata dal motore.
In condizioni ideali, e se vengono utilizzate unità di misura elettriche e meccaniche "coerenti"(quali sono, ad esempio, quelle del sistema MKSA), la costante k in (refEM1) e in (4.18) ha il medesimo valore, dovendo risultare

$$c(t)\omega(t) = e(t)i_a(t)$$

ossia dovendo essere la potenza meccanica erogata all'istante t eguale alla potenza elettrica spesa nella conversione al medesimo istante.
Infine, il sistema meccanico cui viene erogata la coppia $c(t)$ ha l' equazione ("meccanica")

$$c(t) - B\omega(t) - J\frac{d\omega}{dt} = 0 \tag{4.19}$$

che include, oltre alla coppia forzante $c(t)$, un termine inerziale e uno smorzamento viscoso, dovuti il primo all'inerzia di tutte le parti rotanti (incluse quelle del motore elettrico) e il secondo all'attrito e anche all'eventuale lavoro di deformazione, come avviene, ad esempio, quando il motore comanda un utensile.

Come grandezza di uscita, si può considerare la velocità angolare $\omega(\cdot)$; come grandezze (elettriche) di ingresso ve ne possono essere due: la differenza di potenziale $v_a(\cdot)$ applicata al circuito di armatura (o, in alternativa, la corrente $\frac{i}{a}(\cdot)$ impressa nello stesso circuito da un generatore di corrente) e la tenzione $v_e(\cdot)$ applicata al circuito di eccitazione. I due ingressi possono essere fatti variare entrambi (nel qual caso le equazioni del sistema sono intrinsecamente non lineari) ; spesso se ne fa variare una sola, mantenendo costante l'altra. talora, si fa variare una in un dato campo di funzionamento e l'altra in un campo diverso. I casi di maggior interesse, che saranno cosiderati qui di seguito, riguardano i seguenti casi

- v_e costante; l'ingresso è costituito da $v_a(\cdot) o i_a(\cdot)$;
- i_a costante; l'ingresso è costituito da $v_e(\cdot)$;
- v_a costante; l'ingresso è costituito da $v_e(\cdot)$.

4.4.2 Controllo a tensione di eccitazione costante

In questo caso rimangono costanti, insieme con v_e, la corrente di eccitazione i_e e il flusso ϕ_e. Nelle equazioni elettromeccaniche (4.17) e (4.18) si indicherà con K la costante $k\phi_e$. Assumendo come ingresso la tensione di armatura $v_a(\cdot)$, si ricava il sistema costituito dall'equazione elettrica del circuito d'armatura, dalle due equazioni elettromeccaniche e dall'equazione meccanica:

$$\begin{aligned} v_a(t) &= R_a i_a(t) - L_a \frac{di_a}{dt} + e(t) && (4.20) \\ e(t) &= K\omega(t) && (4.21) \\ c(t) &= K i_a(t) && (4.22) \\ c(t) &= B\omega(t) + J\frac{d\omega}{dt} && (4.23) \end{aligned}$$

Da (4.20) e (4.21) si può eliminare $e(t)$, mentre da (4.22) e da (4.23) si può eliminare $c(t)$, ottenendo il sistema

$$\begin{aligned} v_a(t) &= R_a i_a(t) + L_a di_a + K\omega(t) \\ K i_a(t) &= B\omega(t) + J\frac{d\omega}{dt} \end{aligned} \qquad (4.24)$$

Si possono infine eliminare i_a e la sua derivata di_a/dt ricavandole rispettivamente dalla seconda equazione di (4.24) e dallequazione derivata $K\frac{di_a}{dt} = B\frac{d\omega}{dt} + J\frac{d^2\omega}{dt^2}$. Si conclude così con l'equazione lineare ingresso/uscita

$$L_a J \frac{d^2\omega}{dt^2} + (R_a J + L_a B)\frac{d\omega}{dt} + (R_a B + K^2)\omega = K v_a(t).$$

4.4.3 Controllo a corrente di armatura costante

In questo caso, l'ingresso è la tensione di eccitazione $v_e(\cdot)$, mentre viene impressa una corrente di armatura costante. Indicando con K_I la costante ki_a, diventano rilevanti l'equazione elettrica del circuito di eccitazione, la seconda equazione elettromeccanica e l'equazione meccanica

$$\begin{aligned} v_e(t) &= R_e i_e + L_e \frac{di_e}{dt} && (4.25) \\ c(t) &= K_I L_e i_e(t) && (4.26) \\ c(t) &= B\omega(t) + J\frac{d\omega}{dt} && (4.27) \end{aligned}$$

Eliminando $c(t)$ dalle ultime due equazioni, si esprime i_e in funzione di ω e di $d\omega/dt$

$$K_I L_e i_e(t) = B\omega(t) - J d\omega/dt$$

e, derivandola, si esprime di_e/dt in funzione di $d\omega/dt$ e di $d^2\omega/dt^2$. Infine, sostituendo i_e e di_e/dt in (4.25), si ottiene infine

$$L_e J\frac{d^2\omega}{dt^2} + (R_e J + BL_e)\frac{d\omega}{dt} + R_e B\omega(t) = K_I L_e v_e(t)$$

4.4.4 Controllo a tensione di armatura costante

L'ingresso è ancora $v_e(\cdot)$, come nel caso precedente, ma questa volte viene mantenuta costante la tensione (anziché la corrente) di armatura e, come conseguenza, diventano non lineari le equazioni elettromeccaniche, risultando variabili entrambi i fattori che figurano a secondo membro

$$\begin{aligned} e(t) &= kL_e i_e(t)\omega(t) \\ c(t) &= kL_e i_e(t) i_a(t) \end{aligned}$$

Pertanto, anche l'equazione complessiva che lega la velocità $\omega(\cdot)$ alla tensione di comando $v_e(\cdot)$ risulterà pesantemente non lineare.
C'è tuttavia da tener conto del fatto che, in queste condizioni, il motore può funzionare in modo soddisfacente soltanto per velocità che corrispondono a modeste escursioni nell'intorno del valore nominale (o "di targa").
Infatti, a tale velocità nominale, che corrisponde al valore nominale delle tensione di eccitazione e quindi del flusso di eccitazione ϕ_e, la forza controlelettromotrice e assume un valore molto prossimo alla tensione v_a, che viene mantenuta costante (e corrispondente anch'essa valore di targa). Per esempio, e può essere intorno al 95% di v_a e la corrispondente i_a nominale (eguale a regime a $(v_a - e)/R_a$) dà luogo, per effetto Joule, alla quantità di calore che la macchina è in grado di smaltire in base ai criteri di progetto.
Per $\omega = 0$ la corrente assumerebbe, a regime, il valore v_a/R_a, e valori non molto diversi se ω è molto minore del valore nominale. Pertanto, nell'ipotesi che la forza controlettromotrice in condizioni nominali sia il 95% della tensione nominale v_a, la corrente di armatura per $\omega = 0$ sarebbe 20 volte la corrente nominale e la potenza dissipata per effetto Joule 400

volte maggiore di quella per cui la macchina è stata progettata.
Per tali motivi, nettamente prevalenti su qualsiasi altra considerazione, il motore elettrico viene fatto funzionare per modeste escursioni di $v_e(\cdot)$ intorno al valore nominale. In condizioni nominali valgono le equazioni statiche

$$\begin{aligned} v_{eN} &= R_e i_{eN} \\ v_{aN} &= R_a i_{aN} + e_N \\ e_N &= k\phi_{eN}\omega_N = kL_e i_{eN}\omega_N \\ c_N &= k\phi_{eN} i_{aN} = kL_e i_{eN} i_{aN} \\ c_N &= B\omega_N \end{aligned} \tag{4.28}$$

Per modeste escursioni rispetto a queste condizioni, si può adottare un modello linearizzato nell'intorno del punto nominale di lavoro e cioè descrivere il comportamento del motore mediante un'equazione differenziale lineare che approssima il legame (non lineare) fra le variazioni

- $\Delta v_e(t) = v_e(t) - v_{eN}$ (essendo v_{eN} il valore nominale della tensione di eccitazione) e
- $\Delta\omega(t) = \omega(t) - \omega_N$ (essendo ω_N la velocità nominale)

Con ovvio significato dei simboli, le equazioni non lineari da prendere in considerazione sono le seguenti (nelle quali, ovviamente, non si scrivono le derivate - nulle - di quantità che rimangono costanti)

$$\begin{aligned} v_{eN} + \Delta v_e(t) &= R_e(i_{eN} + \Delta i_e(t)) + L_e\frac{d\Delta i_e(t)}{dt} && (4.29)\\ \phi_{eN} + \Delta\phi_e(t) &= L_e(i_{eN} + \Delta i_e(t)) \\ v_{aN} &= R_a(i_{aN} + \Delta i_a(t)) + L_a\frac{d\Delta i_a}{dt} + e_N + \Delta e(t) && (4.30)\\ e_N + \Delta e(t) &= k(\phi_{eN} + \Delta\phi_e(t))(\omega_N + \Delta\omega(t)) && (4.31)\\ c_N + \Delta c(t) &= k(\phi_{eN} + \Delta\phi_e(t))(i_{aN} + \Delta i_a(t)) && (4.32)\\ c_N + \Delta c(t) &= B(\omega_N + \Delta\omega(t)) + J\frac{d\Delta\omega(t)}{dt} && (4.33) \end{aligned}$$

Utilizzando le relazioni statiche (4.28) che legano le grandezze nominali in condizioni di regime, si perviene a

$$\begin{aligned} \Delta v_e(t) &= R_e\Delta i_e(t) + L_e\frac{d\Delta i_e(t)}{dt} && (4.34)\\ \Delta\phi_e(t) &= L_\Delta i_e(t) \\ \Delta e(t) &= -R_a\Delta i_a(t)) - L_a\frac{d\Delta i_a}{dt} && (4.35)\\ \Delta e(t) &= k\phi_{eN}\Delta\omega(t) + k\omega_N\Delta\phi_e(t) + k\Delta\omega(t)\Delta\phi_e(t) \sim k\phi_{eN}\Delta\omega(t) + k\omega_N\Delta\phi_e(t) && (4.36)\\ \Delta c(t) &= k\phi_{eN}\Delta i_a(t) + ki_{aN}\Delta\phi_e(t) + k\Delta i_a(t)\Delta\phi_e(t) \sim k\phi_{eN}\Delta i_a(t) + ki_{aN}\Delta\phi_e(t) && (4.37)\\ \Delta c(t) &= B\Delta\omega(t) + J\frac{d\Delta\omega(t)}{dt} && (4.38) \end{aligned}$$

Le equazioni (4.36) e (4.37) non sono lineari come le altre, ma lo diventano se si eliminano i prodotti delle quantità incrementali. Tale prodotto risulta trascurabile rispetto a ciascuno

degli altri due addendi: infatti questi ultimi sono il prodotto di uno dei due incrementi per il valore nominale al quale si aggiunge l'altro incremento, etale valore nominale, per le considerazioni svolte in precedenza, è molto maggiore dell'incremento stesso.
Si perviene così a un'equazione differenziale lineare, nella quale si è posto $K_\phi := k\phi_{eN};\ K_i := ki_{aN};\ K_\omega := k\omega_N$

$$\begin{aligned} & L_eL_aJ\frac{d^3\Delta\omega}{dt^3} + [R_eL_eJ + R_aLeJ + BL_eL_a]\frac{d^2\Delta\omega}{dt^2} \\ + \quad & [R_eRaJ + R_eBL_a + R_aBL_e + L_eK_\phi^2]\frac{d\Delta\omega}{dt} + [R_eR_aB + R_eK_\phi^2]\Delta\omega(t) \\ = \quad & L_eL_aK_i\frac{d\Delta v_e}{dt} - [L_eK_\phi K_\omega - L_eR_aK_i]\Delta v_e(t) \end{aligned}$$

4.5 L'equazione differenziale omogenea

4.5.1 Soluzione particolare e soluzione generale

Denotiamo con $p(D)$ e con $q(D)$ gli operatori differenziali

$$p(D) = \sum_{i=0}^{n} a_i\frac{d^i}{dt^i} = \sum_{i=0}^{n} a_iD^i \qquad a_n = 1 \tag{4.39}$$

$$q(D) = \sum_{i=0}^{m} b_i\frac{d^i}{dt^i} = \sum_{i=0}^{m} b_iD^i \tag{4.40}$$

Il primo associa alla funzione derivabile n volte $y(\cdot)$ la funzione

$$p(D)y = \sum_{i=0}^{n} a_i\frac{d^iy}{dt^i}$$

Analogamente per il secondo.
Possiamo allora riscrivere in modo più compatto l'equazione differenziale (4.1)

$$p(D)y = q(D)u \tag{4.41}$$

e pensare a (4.41) come a una relazione fra le funzioni di ingresso u e quelle di uscita$y$. È chiaro che, data u, è individuata univocamente la funzione

$$v = q(D)u$$

e che pertanto la (4.41) può riscriversi ancora, nella forma

$$p(D)y = v \tag{4.42}$$

La soluzione di (4.42) tuttavia non è unica, e ciò può ricondursi al fatto che non è unica la soluzione della *equazione omogenea associata*

$$p(D)y = 0 \tag{4.43}$$

È chiaro, infatti, che ogni soluzione di (4.43) può essere sommata a una soluzione di (4.42), producendo ancora una soluzione di (4.42). Viceversa, se y_1 e y_2 sono entrambe soluzioni di (4.42), la loro differenza $y_1 - y_2$ risolve l'equazione omogenea (4.43). Con ciò, possiamo ricondurre lo studio della struttura delll'insieme delle soluzioni di (4.42) a quello dell'insieme delle soluzioni di (4.43), ovvero

Proposizione 4.5.1 *Tutte le soluzioni di (4.42) si ottengono sommando a una soluzione particolare di (4.42) una soluzione arbitraria di (4.43).* ■

4.5.2 Struttura lineare dell'insieme delle soluzioni di $p(D)y = 0$

In questo paragrafo e nei due successivi considereremo le soluzioni dell'equazione omogenea (4.43) o, come si suol dire, fare l'*analisi modale* del sistema.

Teorema 4.5.2 [Teorema di esistenza e unicità] ([Ap] pp 36 e segg.) *Sia $p(D)$ l'operatore differenziale (4.40) e sia $t_0 \in \mathbb{R}$. Se $x_{)}, x_1, \dots x_{n-1}$ sono arbitrari numeri reali, esiste una e una sola funzione $y(\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che soddisfa l'equazione omogenea $p(D)y = 0$ e le "condizioni iniziali"*

$$y(t_0) = x_0, \quad y^{(1)}(t_0) = x_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1} \tag{4.44}$$

Il vettore $\mathbf{x} := \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{bmatrix}$ *è detto vettore dei valori iniziali (di y) in t_0.* ■

Teorema 4.5.3 [Teorema dimensionale] *Sia $p(D)$ l'operatore (4.40). Allora*

i) le soluzioni di $p(D)y = 0$ formano uno spazio vettoriale $\mathcal{N}(p(D))$ su $\mathbb{R}$, detto "nucleo" di $p(D)$;

ii) $\mathcal{N}(p(D))$ ha dimensione n.

Prova (i) Ovvia.
ii) Scelto $t_0 \in \mathbb{R}$, sia

$$\eta_{t_0} : \mathcal{N}(p(D)) \to \mathbb{R}^n : y(\cdot) \mapsto \begin{bmatrix} y(t_0) \\ y^{(1)}(t_0) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t_0) \end{bmatrix}$$

la mappa lineare che ad ogni soluzione $y(\cdot)$ di (4.43) associa la n-upla di valori assunti in t_0 dalla soluzione e dalle sue prime $n-1$ derivate. Il teorema 4.5.2 garantisce che

- $\eta_{t_0}(y(\cdot)) = \mathbf{0}$ implica $y(\cdot) = 0$, (unicità della soluzione)
- η_{t_0} è suriettiva su $\mathbb{R}^n$, (esistenza della soluzione)

Quindi $\mathcal{N}(p(D))$ è uno spazio isomorfo a $\mathbb{R}^n$ e ha dimensione n. ■

Definizione 4.5.4 *Una n-upla di soluzioni $y_1(\cdot), y_2(\cdot), \dots, y_n(\cdot)$ di (4.43) si dice un "sistema fondamentale di soluzioni" se le funzioni $y_i(\cdot)$ sono linearmente indipendenti, ovvero se*

$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i(t) \;=\; 0, \forall t \in \mathbb{R} \quad$ *implica* $\quad \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$

Le funzioni $y_1(\cdot), y_2(\cdot), \ldots, y_n(\cdot)$ di un sistema fondamentale di soluzioni sono una base per lo spazio $\mathcal{N}(p(D))$ e ogni soluzione $y(\cdot)$ dell'equazione omogenea si esprime in uno e un sol modo come combinazione lineare del sistema:

$$y(\cdot) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i y_i(\cdot), \quad \beta_i \in \mathbb{R}$$

Teorema 4.5.5 [TEOREMA DI REGOLARITÀ] *Se $y(\cdot)$ è derivabile fino all'ordine n ed appartiene al nucleo dell'operatore differenziale $P(D)$ di ordine n, allora $y(\cdot)$ è derivabile indefinitamente*[4] .

PROVA Sia $P(D)$ l'operatore definiito in (4.40). Allora

$$D^n y = -\sum_{i=0}^{n-1} a_i D^i y$$

ovvero la derivata n-esima di $y(\cdot)$ è combinazione lineare delle derivate di ordine inferiore. Ciò comporta che $D^n y$ è derivabile almeno una volta e che Dy (appartiene a $\mathcal{N}(p(D))$ ed) è esprimibile a sua volta come combinazione lineare di $y, y^{(1)}, \ldots, y^{(n-1)}$:

$$D^{n+1} y = -\sum_{i=0}^{n-1} a_i D^{i+1} y = -\sum_{i=0}^{n-2} a_i D^{i+1} y - a_{n-1} D^n y = \sum_{i=0}^{n-1} a_{n-1} a_i D^i y - \sum_{i=1}^{n-1} a_i D^i y$$

Si assuma ora, induttivamente, che esistano le derivate fino all'ordine $n+k$ della funzione $y(\cdot)$ e che esse siano combinazione lineare delle derivate di ordine $0, 1, \ldots, n-1$. Allora la derivata $(n+k-1)$-esima di $y(\cdot)$ esiste, è combinazione lineare delle derivate fino all'ordine n e quindi è combinazione lineare delle derivate fino all'ordine $n-1$. ■

Si supponga ora di disporre di un sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione (4.43). Come si può esprimere la soluzione $\tilde{y}(\cdot)$, corrispondente ad assegnate condizioni iniziali in t_0

$$\mathbf{x} := \begin{bmatrix} \tilde{y}(t_0) \\ \tilde{y}^{(1)}(t_0) \\ \vdots \\ \tilde{y}^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

mediante una combinazione lineare

$$\tilde{y}(\cdot) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i y_i(\cdot)$$

delle funzioni che costituiscono il sistema fondamentale? Più concretamente, come si possono determinare i combinatori β_i? Per trovare la risposta, premettiamo il seguente

Lemma 4.5.6 *Si consideri l'equazione omogenea di ordine n (4.43) $p(D)y = 0$, $p(D)$ come in (4.40), e si supponga che le funzioni $y_1(\cdot), \ldots, y_n(\cdot)$ siano sue soluzioni. Allora sono fatti equivalenti:*

[4] indicando col simbolo C^∞ lo spazio delle funzioni reali di variabile reale indefinitamente derivabili su tutto l'asse reale, ogni soluzione $y(\cdot)$ dell'equazione omogenea soddisfa $y(\cdot) \in \mathrm{C}^\infty$

i) l'insieme $\{y_1(\cdot), \dots, y_n(\cdot)\}$ *costituisce un sistema fondamentale di soluzioni;*

ii) per ogni $t_0 \in \mathbb{R}$ *i vettori delle "condizioni iniziali"*

$$\mathbf{x}_1(t_0) := \begin{bmatrix} y_1(t_0) \\ y_1^{(1)}(t_0) \\ \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t_0) \end{bmatrix}, \ \mathbf{x}_2(t_0) := \begin{bmatrix} y_2(t_0) \\ y_2^{(1)}(t_0) \\ \vdots \\ y_2^{(n-1)}(t_0) \end{bmatrix}, \dots, \mathbf{x}_n(t_0) := \begin{bmatrix} y_n(t_0) \\ y_n^{(1)}(t_0) \\ \vdots \\ y_n^{(n-1)}(t_0) \end{bmatrix} \tag{4.45}$$

sono vettori linearmente indipendenti;

iii) per qualche $t_0 \in \mathbb{R}^n$ *i vettori delle condizioni iniziali sono linearmente indipendenti.*

Prova (i) $\Rightarrow$ (ii) Sia $\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{x}_i(t_0) = 0$. Allora la funzione

$$\tilde{y}(\cdot) := \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i(\cdot) \tag{4.46}$$

soddisfa l'equazione $P(D)\tilde{y}(\cdot) = 0$ con condizioni iniziali

$$\tilde{y}^{(\nu)}(t_0) = \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i^{(\nu)}(t_0) = 0, \quad \nu = 0, 1, \dots, n-1$$

Per il teorema di unicità 4.5.2 $\tilde{y}$ deve essere allora la soluzione nulla. Ma le funzioni $y_1(\cdot), y_2(\cdot), \dots, y_n(\cdot)$ costituiscono un sistema fondamentale, quindi sono linearmente indipendenti e da (4.46) segue $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$. Allora i vettori $\mathbf{x}_1(t_0), \mathbf{x}_2(t_0), \dots, \mathbf{x}_n(t_0)$ sono indipendenti, per ogni t_0.

ii) $\Rightarrow$ (iii) Ovvio.

iii) $\Rightarrow$ (i) Se per le funzioni $y_i(\cdot)$ valesse una relazione di dipendenza $\sum_{i=1}^n \alpha_i y_i(\cdot) = 0$ identicamente sull'asse reale, dovrebbe anche essere $\sum_{i=1}^n \alpha_i y_i^{(\nu)}(\cdot) = 0$ per $\nu = 1, 2, \dots, n-1$. Particolarizzando all'istante t_0, si otterrebbe così $\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{x}_i(t_0) = \mathbf{0}$. Ma le condizioni iniziali in t_0 sono per ipotesi indipendenti, quindi i combinatori α_i devono essere tutti nulli e $\{y_1(\cdot), y_2(\cdot), \dots, y_n(\cdot)\}$ è un sistema fondamentale. ■

Proposizione 4.5.7 *Sia* $\{y_1(\cdot), y_2(\cdot), \dots, y_n(\cdot)\}$ *un sistema fondamentale di soluzioni per l'equazione omogenea* $p(D)y = 0$ *e siano* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x_2}, \dots, \mathbf{x}_n$ *i corrispondenti vettori delle condizioni iniziali in* $t = 0$. *Si ponga allora*

$$X = [\, \mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x_2} \quad \dots \quad \mathbf{x}_n \,]$$

La soluzione $\tilde{y}(\cdot)$ *dell'equazione* $p(D)y = 0$ *corrispondente a un generico vettore* $\tilde{\mathbf{x}}$ *condizioni iniziali in* $t = 0$ *è data da*

$$\tilde{y}(\cdot = \sum_{i=1}^n \beta_i y_i(\cdot) \tag{4.47}$$

con

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} = X^{-1}\tilde{\mathbf{x}} \tag{4.48}$$

PROVA (4.48) equivale a esprimere $\tilde{\mathbf{x}}$ come combinazione lineare delle condizioni iniziali per $t = 0$ del sistema fondamentale

$$\tilde{\mathbf{x}} = X\mathbf{b} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \mathbf{x}_i = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} \beta_i y_i(0) \\ \sum_{i=1}^{n} \beta_i y_i^{(1)}(0) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} \beta_i y_i^{(n-1)}(0) \end{bmatrix}.$$

Ma allora la funzione $\tilde{y}(\cdot)$ definita in (4.47)
- soddisfa $p(D)\tilde{y}(\cdot_{=}0$
- soddisfa in $t = 0$ le condizioni iniziali espresse dal vettore $\tilde{\mathbf{x}}$

Quindi, per il teorema di unicità, è la soluzione cercata. ■

- ESERCIZIO 4.5.1 Se $\{y_1(\cdot), \ldots, y_n(\cdot)\}$ è un sistema fondamentale di soluzioni per $p(D)y = 0$ e se X è la matrice le cui colonne rappresentano le condizioni iniziali del sistema in $t = 0$, si determini un altro sistema fondamentale di soluzioni le cui condizioni iniziali in $t = 0$ siano rappresentate dalle colonne di un'arbitraria matrice invertibile $\tilde{X} \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

  ♯ *Suggerimento. Se $\tilde{\mathbf{x}}_i$ è la i-esima colonna di $\tilde{X}$, la funzione*

  $$\tilde{y}_i(\cdot) = [\, y_1(\cdot) \quad y_2(\cdot) \quad \ldots 7 y_n(\cdots)\,]\, X^{-1}\tilde{\mathbf{x}}_i$$

  soddisfa le condizioni iniziali espresse da $\tilde{\mathbf{x}}_i$ e l'equazione differenziale omogenea

- ESERCIZIO 4.5.2 Nessun sistema fondamentale di soluzioni $\{y_1(\cdot), \ldots, y_n(\cdot)\}$ ha tutte le funzioni componenti nulle nel medesimo istante t_0.

  ♯ *Suggerimento. La matrice X delle condizioni iniziali in t_0 non avrebbe rango pieno. Alternativamente, si può notare che ogni soluzione dell'equazione omogenea sarebbe nulla nell'istante t_0, e quindi in t_0 le condizioni iniziali non sarebbero fissabili ad arbitrio.*

- ESERCIZIO 4.5.3 Se $n > 1$ e le funzioni di un sistema fondamentale assumono lo stesso valore (non nullo!) all'istante t_0, due almeno di esse all'istante t_0 hanno diverse velocità di crescita.

4.5.3 Polinomi nell'operatore di derivazione

Il teorema dimensionale e quello di regolarità caratterizzano lo spazio delle soluzioni di (4.43) come il sottospazio di C^∞ che costituisce il nucleo dell'operatore $p(D)$. È possibile ottenere informazioni complete sulla struttura di tale nucleo considerando $p(D)$ come elemento di un'algebra di operatori essenzialmente assimilabile (isomorfa) a quella dei polinomi in una indeterminata, e sfruttando alcune proprietà dell'algebra dei polinomi. A tale scopo, si associ ad ogni polinomio in $\mathbb{R}[s]$

$$g(s) = \sum_{i=0}^{m} g_i s^i$$

l'operatore differenziale definito da

$$g(D)=\sum_{i=0}^{m} g_i D^i:\ \mathrm{C}^\infty \to \mathrm{C}^\infty:\ f(\cdot)\mapsto \sum_{i=0}^{m} g_i f^{(i)}(\cdot)$$

La corrispondenza è iniettiva, ovvero associa a polinomi diversi operatori differenziali diversi[5].

- Esercizio 4.5.4 Se $p(s) := \sum_{i=0}^{n} a_i s^i \neq \sum_{i=1}^{m} b_i s^i := q(s)$ allora $p(D) \neq q(D)$
  ♯ *Suggerimento.* $p(D) = q)D) \ \Leftrightarrow\ p(D)f = q(D)f,\ \forall f \in \mathrm{C}^\infty \ \Leftrightarrow\ \sum_i (a_i - b_i)D^i f = 0\ \forall f \in \mathrm{C}^\infty$ *se* ν *è il più piccolo intero per cui* $a_\nu \neq b_\nu$, *si scelga* $f(t) = t^\nu$

Poiché la somma e la composizione di due operatori $p(D)$ e $q(D)$, definite da

$$\begin{aligned}[p(D)+q(D)]f &:= p(D)f + q(D)f \qquad \forall f \in \mathrm{C}^\infty\\ [p(D)q(D)]f &:= p(D)\Big(q(D)f\Big)\end{aligned}$$

corrispondono al polinomio somma $p(s)+q(s)$ e al polinomio prodotto $p(s)q(s)$, possiamo affermare che la corrispondenza

$$\sum_i a_i s^i \mapsto \sum_i a_i D^i$$

è un isomorfismo. Si noti, in particolare, che come i polinomi rispetto al prodotto, anche gli operatori differenziali rispetto alla composizione commutano, quindi non è rilevante l'ordine secondo il quale vengono successivamente applicati ad una funzione f due arbitrari operatori $p(D)$ e $q(D)$.
Inoltre, ad ogni fattorizzazione del polinomio $P(s)$ nella forma

$$p(s) = p_1(s)p_2(s)\cdots p_\nu(s)$$

corrisponde una fattorizzazione dell'operatore $P(D)$ del tipo

$$p(d) = p_1(D)p_2(D)\cdots p_\nu(D).$$

Definizione 4.5.8 [Equazione caratteristica] *Dato un operatore differenziale* $p(D) = \sum_i a_i D^i$, *l'equazione (sul corpo complesso)*

$$\sum_i a_i s^i = 0$$

è detta equazione caratteristica dell'operatore.

Se $f(\cdot)$ è soluzione di un'equazione differenziale omogenea, quali altre equazioni essa risolve? La risposta è contenuta nella seguente

Proposizione 4.5.9 *Se* $p(s) \in \mathbb{R}[s]$ *e se la funzione* $f(\cdot) \neq 0$ *è nel nucleo dell'operatore differenziale* $p(D)$, *allora*

[5] Il fatto che due operatori differenziali $\sum_i g_i D^i$ e $\sum_i r_i D^i$ abbiano "rappresentazioni diverse" non implica a priori che essi siano effettivamente diversi, ma richiede una verifica!

- *la funzione $f(\cdot)$ è nel nucleo dell'operatore $p(D)q(D)$, per ogni $q(s) \in \mathbb{R}[s]$;*
- *esiste uno e un solo polinomio monico di grado minimo $m(s) \in \mathbb{R}[s]$ tale da aversi $m(D)f = 0$;*
- *se $g(s) \in \mathbb{R}[s]$, la funzione $f(\cdot)$ è nel nucleo dell'operatore $g(D)$ se e solo se $g(s)$ è multiplo di $m(s)$*

La dimostrazione della proposizione è lasciata per esercizio.

Esempio 4.5.1 La funzione $f(t) = e^{-t}$ appartiene a C^∞ ed è soluzione di

$$(p(D))f = (D^2 - 1)f = d^2 f - f = 0$$

Ovviamente, la funzione à anche soluzione di

$$(D - \alpha)p(D)f = D^3 f - \alpha D^2 f - Df + \alpha f = 0$$

L'equazone differenziale di ordine minimo di cui f è soluzione è

$$m(D)f = (D + 1)f = Df + f = 0$$

con $m(s) = s + 1$.

- Esercizio 4.5.5 Se $f_1(\cdot)$ e $f_2(\cdot)$ sono in C^∞ e se $m_1(D)f_1 = 0, \quad m_2(D)f_2 =)$ sono le equazioni differenziali di ordine minimo di cui sono soluzione, si verifichi che
  - la funzione $f_1 + f_2$ è nel nucleo di $m_1(D)m_2(D)$
  - se $m_1(s)$ e $m_2(s)$ sono primi fra loro, allora $[m_1(D)m_2(D])y = 0$ è l'equazione di ordine minimo di cui è soluzione $f_1 + f_2$.

4.6 Sistemi fondamentali di soluzioni: costruzione

Cominciamo con un caso piuttosto semplice:

Proposizione 4.6.1 *Se $\alpha \in \mathbb{R}$, il nucleo dell'operatore differenziale $(D - \alpha)^\nu, \ \nu > 0$ ha per base le funzioni dell'insieme*

$$\{e^{\alpha t}, te^{\alpha t}, t^2 e^{\alpha t}, \dots, t^{\nu-1} e^{\alpha t}\} \tag{4.49}$$

ovvero l'insieme costituisce un sistema fondamentale di soluzioni per l'equazione differenziale

$$(D - \alpha)^\nu y = 0 \tag{4.50}$$

Prova Si noti che per ogni $k \geq 0$ vale

$$(D - \alpha)(t^k e^\alpha t) = kt^{k-1} e^{\alpha t}$$

e perciò $(D - \alpha)^\nu$, applicato a una qualsiasi delle ν funzioni di (4.49), dà la funzione nulla. Inoltre le funzioni sono linearmente indipendenti, perché

$$0 = \sum_{i=0}^{\nu-1} c_i t^i e^{\alpha t} = e^{\alpha t} \sum_{i=0}^{\nu-1} c_i t^i, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

implica $\sum_{i=0}^{\nu-1} c_i t^i = 0 \ \forall t$ e quindi $c_0 = c_1 = \ldots = c_{\nu-1} = 0$. Poiché $\mathcal{N}((D-\alpha)^\nu)$ ha dimensione ν, le funzioni di (4.49) sono una base per il nucleo di $(D-\alpha)^\nu$ ■

Ogni polinomio a coefficienti reali del secondo grado con zeri complessi coniugati $p(s) = s^2 + a_1 s + a_0$ può essere riscritto nella forma

$$p(s) = s^2 = 2\delta\omega_n s + \omega_n^2, \quad \text{con } |\delta| < 1, \quad \omega_n > 0 \tag{4.51}$$

Viceversa, ogni polinomio in $\mathbb{R}[s]$ e soddisfacente le condizioni precedenti ha zeri complessi.

- Esercizio 4.6.1 Si verifichino le affermazioni precedenti circa il polinomio (4.51).
  ♯ *Soluzione.* $s^2 + a_1 s + a_0$ *ha zeri complessi se e solo se* $a_1^2 - 4a_0 < 0$*, e ciò implica* $a_0 > 0$.
  Si può porre allora $a_0 = \omega_n^2$*, per un opportuna e unica scelta di* $\omega_n > 0$.
  La condizione $a_1^2 < 4a_0$ *diventa* $a_1^2 < (2\omega_0)^2$ *e ciò equivale ad assumere che* a_1 *si esprima nella forma* $a_1 = 2\delta\omega_n$ *per un opportuno* $\delta \in (-1,1)$.

Proposizione 4.6.2 *Il nucleo dell'operatore differenziale* $(D^2 + 2\delta\omega_n D + \omega_n^2)^\nu$*, con* $|\delta| < 1$*, ha per base le funzioni dell'insieme*

$$\{t^i e^{-\delta\omega_n t} \sin(\omega t)\ ,\ t^i e^{-\delta\omega_n t} \cos(\omega t),\ i = 0, 1, \ldots, \nu - 1\} \tag{4.52}$$

con

$$\omega = \omega_n \sqrt{1-\delta^2}.$$

Prova a) Cominciamo verificando che

$$\begin{aligned} e^{-\delta\omega_n t} \cos(\omega t) &\in \mathcal{N}(D^2 + 2\delta\omega_n D + \omega_n^2) \\ e^{-\delta\omega_n t} \sin(\omega t) &\in \mathcal{N}(D^2 + 2\delta\omega_n D + \omega_n^2) \end{aligned}$$

Infatti

$$\begin{aligned} & (D^2 + 2\delta\omega_n D + \omega_n^2) e^{-\delta\omega_n t} \cos(\omega t) \\ = \; & e^{-\delta\omega_n t} \cos(\omega t)[\delta^2\omega_n^2 - \omega^2 - 2\delta^2\omega_n^2 + \omega_n^2] + e^{-\delta\omega_n t} \sin(\omega t)[2\delta\omega_n\omega - 2\delta\omega_n\omega] \\ = \; & e^{-\delta\omega_n t} \cos(\omega t)[-\omega^2 + \omega_n^2(1-\delta^2)] = 0 \end{aligned}$$

L'altra relazione si verifica in modo analogo.
b) Notiamo poi che, per ogni funzione $f(\cdot)$, risulta

$$(D^2 + 2\delta\omega_n D + \omega_n^2)(tf) = t(D^2 + 2\delta\omega_n D + \omega_n^2)f + (2D + 2\delta\omega_n)f$$

Se poniamo allora

$$\mathcal{S}_k = \operatorname{span}\{t^i e^{-\delta\omega_n t} \sin(\omega t)\ ,\ t^i e^{-\delta\omega_n t} \cos(\omega t),\ i = 0, 1, \ldots, k-1\}, \quad \mathcal{S}_0 = \{0\}$$

l'operatore $D^2 + 2\delta\omega_n D + \omega_n^2$ mappa ogni funzione di $\mathcal{S}_1$ in $\mathcal{S}_0$. Assumiamo induttivamente che l'operatore, applicato a ogni funzione di $\mathcal{S}_k, k \geq 1$, produca una funzione di $\mathcal{S}_{k-1}$. Se $f \in \mathcal{S}_{k+1}$, si ha evidentemente $f = tg_1 + g_2$, con g_1 e g_2 funzioni di $\mathcal{S}_k$ e perciò

$$\begin{aligned} & (D^2 + 2\delta\omega_n D + \omega_n^2) f \\ = \; & (D^2 + 2\delta\omega_n D + \omega_n^2)(tg_1 + g_2) \\ = \; & \underbrace{t\ \underbrace{(D^2 + 2\delta\omega_n D + \omega_n^2) g_1}_{\in\, \mathcal{S}_{k-1}}}_{\in\, \mathcal{S}_k} + \underbrace{(2D + 2\delta\omega_n) g_1}_{\in\, \mathcal{S}_k} + \underbrace{(D^2 + 2\delta\omega_n D + \omega_n^2) g_2}_{\in\, \mathcal{S}_{k-1}} \end{aligned}$$

è un elemento di $\mathcal{S}_{\|}$. Ma allora si ha $(D^2 + 2\delta\omega_n D + \omega_n^2)^\nu \mathcal{S}_\nu = 0$, ovvero $\mathcal{S}_\nu$ è nel nucleo dell'operatore differenziale $(D^2 + 2\delta\omega_n D + \omega_n^2)^\nu$.
c) Ci rimane da verificare che le 2ν funzioni di (4.52) sono linearmente indipendenti. Supponiamo quindi che esista una loro combinazione lineare nulla:

$$e^{-\delta\omega_n t}\Big[\sum_{i=0}^{\nu-1} c_i t^i \sin(\omega t) + \sum_{i=0}^{\nu-1} d_i t^i \cos(\omega t)\Big] = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

o, equivalentemente,

$$\Big(\sum_{i=0}^{\nu-1} c_i t^i\Big)\sin(\omega t) + \Big(\sum_{i=0}^{\nu-1} d_i t^i\Big)\cos(\omega t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Se $t = t_k = \dfrac{\pi}{\omega}k, \in \mathbb{Z}$ risulta $\sin(\omega t_k) = 0$. In corrispondenza a tali infiniti valori di t risulta invece $\cos(\omega t_k) \neq 0$ e

$$\Big(\sum_{i=0}^{\nu-1} d_i t_k^i\Big)\cos(\omega t_k) = 0 \;\Rightarrow\; \sum_{i=0}^{\nu-1} d_i t_k^i = 0, \quad \forall t_k = \frac{\pi}{\omega}k,\; k \in \mathbb{Z}$$

Ma il polinomio $\sum_{i=0}^{\nu-1} d_i t^i$ non può avere infiniti zeri, salvo se è il polinomio nullo. Analogamente si verifica che è identicamente nullo il polinomio $\sum_{i=0}^{\nu-1} c_i t^i$. ∎

Osservazione È interessante determinare il significato geometrico del parametri $\omega,\ \omega_n,\ \delta$, considerando le soluzioni dell'equazione caratteristica

$$s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

dell'operatore $D^2 + 2\delta\omega_n D + \omega_n^2$.

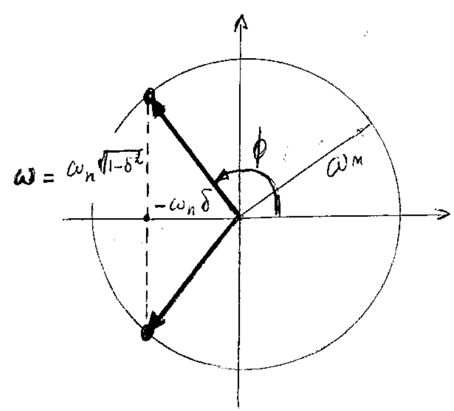


Figura 4.6.1

Gli zeri valgono

$$\begin{aligned} s_{12} &= -\delta\omega_n \pm \sqrt{\delta^2\omega_n^2 - \omega_n^2} \;=\; -\delta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\delta^2} \;=\; \omega_n(-\delta \pm j\sqrt{1-\delta^2}) \\ &= -\omega_n\delta \pm j\omega \\ &= \omega_n(\cos\phi \pm j\sin\phi) \;=\; \omega_n e^{\pm j\phi} \end{aligned}$$

dove si è posto $-\delta = \cos\phi,\ \sqrt{1-\delta^2} = \sin\phi$ e quindi $-\sqrt{1-\delta^2}/\delta = \mathrm{tang}\phi$.
È' chiaro che

- la pulsazione naturale ω_n rappresenta il modulo delle due radici complesse,
- la quantità $\omega = \omega_n\sqrt{1-\delta^2}$ è il modulo della loro parte immaginaria,
- $-\omega_n\delta$ è la loro parte reale,
- l'angolo $\phi = \arccos(-\delta)$, con $\pi < \phi < 0$, rappresenta la fase della radice appartenente al semipiano $\Im\mathrm{m}(s) > 0$,
- le radici hanno parte reale negativa se il "fattore di smorzamento" δ è positivo.

Definizione 4.6.3 *Sia $p(D)$ l'operatore differenziale corrispondente al polinomio monico di grado n $p(s) \in \mathbb{R}[s]$, e si consideri la fattorizzazione di $p(s)$ in fattori irriducibili sul campo reale*

$$p(s) = \prod_{h=1}^{r}(s-\alpha_h)^{\nu_h}\prod_{k=1}^{q}(s^2+2\delta_k\omega_{nk}s+\omega_{nk}^2)^{\mu_k}$$

Allora le funzioni

$$t^\lambda e^{\alpha_h t},\ \lambda = 0,\dots,\nu_h-1,\ h = 1,\dots,r; \qquad \begin{cases} t^\rho e^{-\delta\omega_{nk}t}\sin(\omega_k t) \\ \\ t^\rho e^{-\delta\omega_{nk}t}\cos(\omega_k t) \end{cases} \qquad \rho = 0,\dots,\mu_k-1,\ = 1,\dots,q$$

sono dette i modi dell'operatore differenziale $p(D)$

Proposizione 4.6.4 *I modi della definizione 4.6.3 appartengono al nucleo dell'operatore $p(D)$ e sono linearmente indipendenti. Sono quindi una base per il nucleo, ovvero un sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione omogenea $p(D)y = 0$*

Prova I modi appartengono al nucleo di $p(D)$ per la proposizione 4.5.9. Per verificarne l'indipendenza dimostriamo dapprima il seguente

Lemma 4.6.5 *Se i polinomi $p_1, p_2, \dots, p_m$ sono due a due coprimi e se le funzioni non nulle $f_1, f_2, \dots, f_m$ sono rispettivamente nel nucleo di $p_1(D), p_2(D), \dots, p_m(D)$, allora $f_1, f_2, \dots, f_m$ sono linearmente indipendenti.*

Prova del Lemma Il lemma è vero se $m = 2$.
Infatti, per l'ipotesi di coprimalità, esistono polinomi q_1 e q_2 per cui vale l'identità $q_1p_1 + q_2p_2 = 1$ Se fosse $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 = 0$ con $\alpha 1$ eα_2 non nulli, avremmo

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 = p_1(D)(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) \ \Rightarrow\ p_1(D)f_2 = 0,\ p_2(D)f_2 = 0; \\ 0 &= [q_1(D)p_1(D) + q_2(D)p_2(D)]f_2 = f_2 \end{aligned}$$

che è manifestamente contraddittoria, perché f_2 non è la funzione nulla.
Se il lemma è vero quando i polinomi e le funzioni sono in numero di m, vale quando sono $m+1$. Sia infatti

$$\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \ldots + \alpha_{m+1} f_{m+1} = 0. \tag{4.53}$$

Se uno dei combinatori α_i è nullo, si ricade nell'ipotesi induttiva e tutti gli α_1 sono nulli. Supponiamo invece che sia $\alpha_i \neq 0$ per $i = 1, 2, \dots, m, m+1$. Valgono le relazioni

$$0 = p_1(D)f_1 = p_2(D)(p_1(D)f_2) = p_3(D)(p_1(D)f_3) = \ldots = p_{m+1}(D)(p_1(D)f_{m+1})$$

e d'altra parte, moltiplicando per $p_1(D)$ entrambi i membri di (4.53), si ricava

$$0 = \alpha_2\,(p_1(D)f_2) + \alpha_3\,(p_1(D)f_3) + \ldots + \alpha_{m+1}\,(p_1(D)f_{m+1}) \tag{4.54}$$

Se la funzione $p_1(D)f_2$ fosse nulla, essendo anche $p_2(D)f_2 = 0$, per la discussione precedente giungeremmo all'assurdo $[q_1(D)p_1(D) + q_2(D)p_2(D)]f_2 = f_2 = 0$. Analogamente, non sono nulle le funzioni $p_1(D)f_i$ per $i = 3, 4, \dots, m+1$.
Ma allora si ricade sotto l'ipotesi induttiva: le m funzioni non nulle $p_1(D)f_i,\ i = 2, 3, \dots, m+1$ sono rispettivamente nel nucleo degli operatori $p_2(D), p_3(D), \dots, p_{m+1}(D)$, quindi sono linearmente indipendenti, essendo due a due coprimi i polinomi $p_2(s), p_3(s), \dots, p_{m+1}(s)$. Allora (4.54) vale solo se $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{m+1}$ sono nulli e, conseguentemente, in (4.53) sono nulli tutti i coefficienti $\alpha_i, i = 1, 2, \dots, m+1$. ■

La conclusione della dimostrazione della proposizione 4.6.4 è ora immediata. I nuclei di ciascuno degli operatori

$$(D - \alpha_h^{\nu_h}, \dots, (D^2 + 2\delta_k\omega_{nk}D + \omega_{nk}^2)^{\mu_k}, \quad h = 1, 2, \dots, r; k = 1, 2, \dots, q$$

sono sottospazi linearmente indipendenti, per il lemma 4.6.5, e le combinazioni lineari dei modi che costituiscono una base per i vari nuclei, formano uno spazio che ha dimensione pari alla somma delle dimensioni dei nuclei, ovvero pari al grado del polinomio $p(s)$. Per il teorema dimensionale 4.5.3, essi costituiscono un sistema fondamentale di soluzioni per l'equazione $p(D)y = 0$ e si ha

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(p(D)) &= \mathcal{N}((D-\alpha_1)^{\nu_1}) \oplus \dots \oplus \mathcal{N}((D-\alpha_r)^{\nu_r}) \\ &\oplus \mathcal{N}((D^2 + 2\delta_1\omega_{n1}D + \omega_{n1}^2)^{\mu_1}) \oplus \dots \oplus \mathcal{N}((D^2 + 2\delta_q\omega_{nq}D + \omega_{nq}^2)^{\mu_q}) \quad ■\end{aligned}$$

- Esercizio 4.6.2 [Struttura dei modi] Si rappresentino graficamente per $t \geq 0$ i modi dell'operatore $(D-\alpha)^\nu$

  ♯ *Cenno di soluzione*

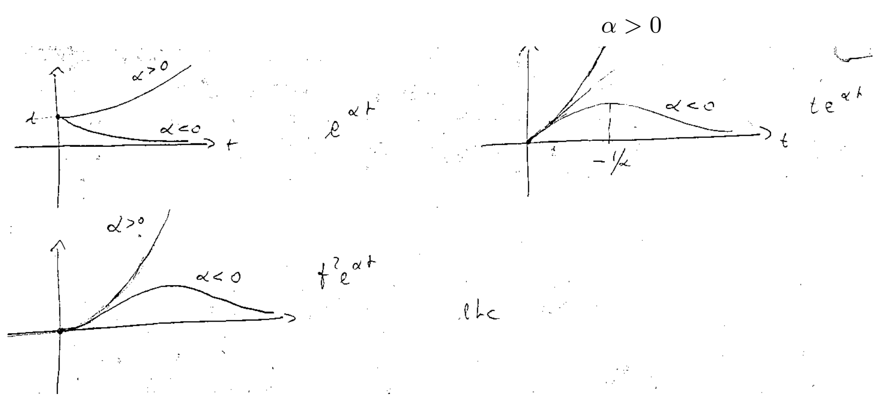


Figura 4.6.2

- Esercizio 4.6.3 Si determini il punto di massimo di $te^{\alpha t}$ quando α è negativo.

  ♯ *Soluzione:* $t = -\frac{1}{\alpha}$

- Esercizio 4.6.4 [Struttura dei modi] Si rappresentino graficamente per $t \geq 0$ i modi dell'operatore $(D^2 + 2\delta\omega_n + \omega_n^2)^\mu,\ \ \delta \in (-1, 1)$.

  ♯ *Cenno di soluzione*

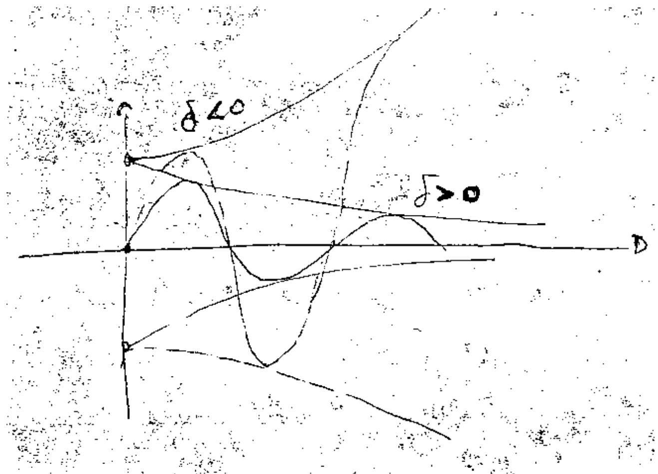


Figura 4.6.3

- Esercizio 4.6.5 Si verifichi la convergenza a zero per $t \to +\infty$ dei modi
  $t^\lambda e^{\alpha t}$, $\lambda \geq 1$, quando $\alpha < 0$
  $t^\rho e^{-\delta_n t} \sin(\omega t)$, $\rho \geq 1$, quando $\delta > 0$.
  ♯ *Cenno di soluzione: si applichi la regola di de l'Hospital per determinare il* $\lim_{t\to+\infty} \frac{t^\lambda}{e^{-\alpha t}}$, ...

4.7 Derivate di una soluzione e nucleo di Green

È chiaro che, se $\tilde{y}$ è una soluzione di $p(D)y = 0$, allora

$$0 = Dp(D)\tilde{y} = p(D)(D\tilde{y}$$

implica che anche le derivate successive $\tilde{y}^{(1)}, \tilde{y}^{(2)}, \ldots$ risolovono la medesima equazione. È allora naturale porsi le seguenti domande:

- se $\begin{bmatrix} \tilde{y}(t_0), \\ \vdots \\ \tilde{y}^{(n-1)}(t_0) \end{bmatrix}$ è il vettore delle condizioni iniziali in t_0 per la soluzione $\tilde{y}$, qualè il vettore delle condizioni iniziali in t_0 per le derivate $\tilde{y}^{(1)}, \tilde{y}^{(2)}, \ldots$?

- sotto quali ipotesi è possibile ottenere un sistema fondamentale di soluzioni derivando successivamente una soluzione $\tilde{y}$?

Proposizione 4.7.1 *Se $\tilde{y}(\cdot)$ è la soluzione dell'equazione*

$$\sum_{i=0}^{n} a_i D^i y = p(D)y = 0, \quad a_n = 1$$

con le condizioni iniziali

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} \tilde{y}(0) \\ \tilde{y}^{(1)}(0) \\ \vdots \\ \tilde{y}^{(n-1)}(0) \end{bmatrix},$$

allora $\tilde{y}^{(1)}(\cdot)$ è la soluzione corrispondente alle condizioni iniziali

$$F\mathbf{g} := \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{g} \tag{4.55}$$

Prova È chiaro che $z(\cdot) := \tilde{y}^{(1)}(\cdot)$ risolve l'equazione $p(D)z = 0$ con le condizioni iniziali

$$z(0) = \tilde{y}^{(1)}(0), \quad z^{(1)}(0) = \tilde{y}^{(2)}(0), \ \ldots, \ z^{(n-2)}(0) = \tilde{y}^{(n-1)}(0) \tag{4.56}$$

Inoltre, da

$$\begin{aligned} 0 = \Big(p(D)\tilde{y}\Big)(0) &= a_0\tilde{y}(0) + a_1\tilde{y}^{(1)}(0) + \ldots + a_{n-1}\tilde{y}^{(n-1)}(0) + \tilde{y}^{(n)}(0) \\ &= a_0\tilde{y}(0) + a_1\tilde{z}(0) + \ldots + a_{n-1}\mathbb{Z}^{(n-2)}(0) + z^{(n-1)}(0) \end{aligned}$$

si ottiene

$$z^{(n-1)} = -a_0\tilde{y}(0) - a_1\tilde{z}(0) - \ldots - a_{n-1}\mathbb{Z}^{(n-2)}(0) \tag{4.57}$$

(4.56-4.57) dimostrano che le condizioni iniziali su $z(\cdot)$ si ricavano applicando alle condizioni iniziali su $\tilde{y}(\cdot)$ la trasformazione lineare (4.55) . ■

Lemma 4.7.2 *Nella condizioni della proposizione 4.7.1, per ogni $k > 0$ la funzione $\sum_{i=0}^{k} \beta_i \tilde{y}^{(i)}$ è la soluzione dell'equazione $p(D)y = 0$ corrispondente alle condizioni iniziali $\mathbf{x}$ date da*

$$\mathbf{x} := \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{bmatrix} = [\,\mathbf{g} \quad F\mathbf{g} \quad \ldots \quad F^k\mathbf{g}\,] \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix}$$

Prova Applicando iteratamente la proposizione 4.7.1, è chiaro che $\tilde{y}^{(\nu)}(\cdot)$ è la soluzione corrispondente al vettore di condizioni iniziali $F^\nu\mathbf{g}$. Allora, per linearità, al vettore di condizioni iniziali $\sum_{i=0}^{k} \beta_i F^i \mathbf{g}$ corrisponde la soluzione $\sum_{i=0}^{k} \beta_i \tilde{y}^{(i)}$ ■

Proposizione 4.7.3 [Nucleo di Green] *Sia $\tilde{y}(\cdot)$ la soluzione dell'equazione $p(D)y = (a_0 + a_1 D + \ldots + a_{n-1}D^{n-1} + D^n)y = 0$ che corrisponde al vettore di condizioni iniziali $\mathbf{g}$ in $t = 0$, e sia*

$$\mathcal{R} := [\,\mathbf{g} \quad F\mathbf{g} \quad \ldots F^{n-1}\mathbf{g}\,]\,.$$

i) Le funzioni $\tilde{y}(\cdot)$, $\tilde{y}^{(1)}(\cdot)$, $\ldots$, $\tilde{y}^{(n-1)}(\cdot)$ costituiscono un sistema fondamentale di soluzioni se e solo se $\mathcal{R}$ ha rango n, e in tal caso la soluzione corrispondente alle condizioni iniziali espresse da un arbitrario vettore $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ è data da

$$\sum_{i=0}^{n-1} \beta_i \tilde{y}^{(i)}(\cdot) \quad \text{con} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix} = \mathcal{R}^{-1}\mathbf{x} \tag{4.58}$$

ii) Se il vettore delle condizioni iniziali è $\mathbf{g} = \mathbf{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$, *allora* $\mathcal{R}$ *ha rango* n *(qualunque siano i coefficienti* $a_0, a_1, \dots a_{n-1}$*) e la soluzione corrispondente, che sarà denotata con* $h(\cdot)$*, forma insieme con le derivate* $h^{(1)}(\cdot), h^{(2)}(\cdot), \dots, h^{(n-1)}(\cdot)$ *un sistema fondamentale di soluzioni.*
Il troncamento $\delta^{(-1)}h$ *si chiama "nucleo risolvente" o "nucleo di Green" dell'equazione* $p(D)y = 0$.

PROVA (i) Le condizioni iniziali per $\tilde{y}^{(i)}$ sono espresse da $F^i\mathbf{g}$ per la proposizione 4.7.1. Allora, per il punto (iii) del lemma 4.5.6, le funzioni $\tilde{y}(\cdot), \tilde{y}^{(1)}(\cdot), \dots, \tilde{y}^{(n-1)}(\cdot)$ sono un sistema fondamentale di soluzioni se e solo se la matrice $\mathcal{R}$ ha rango pieno n.
Se $\mathcal{R}$ ha rango n, per la proposizione 4.5.7 (con la matrice X sostituita da $\mathcal{R}$) si conclude che la soluzione con le condizioni iniziali $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathbf{n}}$ è espressa da (4.58).
ii) È immediato verificare che se $\mathbf{g} = \mathbf{e}_n$, la matrice $\mathcal{R}$ assume la seguente forma triangolare

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & & 1 & \\ \vdots & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ 0 & 1 & & \star & \\ 1 & & & & \end{bmatrix}.$$

Quindi $\mathcal{R}$ è invertibile, indipendentemente dai valori indicati con $\star$, che dipendono dai particolari valori dei parametri a_i nell'operatore $p(D)$. ■

- ESERCIZIO 4.7.1 Se $\mathbf{g} = \mathbf{e}_n$ e $p(D) = \sum_{i=0}^n a_i D^i$, $a_n = 1$
  i) si verifichi che

$$\mathcal{R}^{-1} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & a_3 & & a_{n-1} & 1 & \\ \dots & \dots & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ a_{n-2} & a_{n-1} & 1 & & & \\ a_{n-1} & 1 & & & & \\ 1 & & & & & \end{bmatrix}$$

  ii) allora, per ogni vettore $\mathbf{x}$ di condizioni iniziali in $t = 0$, si ponga $\mathbf{b} = [\beta_0 \quad \beta_1 \quad \dots \quad \beta_{n-1}]^T = \mathcal{R}^{-1}\mathbf{x}$ e, ricorrendo alla funzione $h(\cdot)$ il cui troncamento produce la funzione di Green, si ottiene la soluzione corrispondente a $\mathbf{x}$:

$$y(\cdot) = \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i h^{(i)}(\cdot).$$

- ESERCIZIO 4.7.2 Se $\tilde{y}$ risolve $p(D)y = 0$, che cosa si può dire circa le sue primitive?
  ♯ *Discussione. Se* g *è una primitiva di* f *e* $p(D)f = 0$*, allora*
  ⋆ $p(D)Dg = 0$*, ossia* g *è nel nucleo dell'operatore* $p(D)D$*;*
  ⋆ *non è vero che* $g(\cdot) + k$*,* $k \in \mathbb{R}$*, sia necessariamente una soluzione dell'equazione* $p(D)y = 0$ *per qualche scelta della costante* k*.*
  Ad esempio, se $p(D) = D^n$ *e* $f = t^{n-1} + t^{n-2} + \dots + t + 1$*, è chiaro che* $p(D)f = 0$*. Le primitive di* f *sono* $\frac{t^n}{n} + \frac{t^{n-1}}{n-1} + \dots + t + k$*,* $k \in \mathbb{R}$*, ma nessuna di esse appartiene al nucleo di* $P(D)$*.*

- Esercizio 4.7.3 Se $\tilde{y},\ \tilde{y}^{(1)},\ldots,\tilde{y}^{(n-1)}$ sono soluzioni linearmente dipendenti (e quindi non costituiscono un sistema fondamentale di soluzioni) dell'equazione $p(D)y = \sum_{i=0}^{n-1} a_i D^i y + D^n y = 0$, allora non è possibile ottenere un sistema fondamentale di soluzioni utilizzando combinazioni lineari di $\tilde{y},\ \tilde{y}^{(1)},\ldots,\tilde{y}^{(n-1)},\ \tilde{y}^{(n)},\ldots$.

4.8 Soluzione dell'equazione non omogenea

Consideriamo ora il problema di determinare la soluzione dell'equazione

$$p(D)y = \sum_{i=0}^{n} a_i D^i y = v\,, \qquad \text{con } \ \mathrm{a_n} = 1(4.59)$$

quando v è una funzione continua con supporto incluso in $[b, +\infty)$ e le condizioni iniziali su y sono nulle in un istante $t_0 < b$.
Se $\delta^{(-1)}h$ è il nucleo di Green dell'equazione omogenea

$$p(D)y = 0 \tag{4.60}$$

ovvero la restrizione a $[0, +\infty)$ della soluzione di (4.60) corrispondente a condizioni iniziali $\mathbf{e}_n$ in $t = 0$, vogliamo dimostrare la seguente

Proposizione 4.8.1 *La funzione* $y_f = (\delta^{(-1)}h) \star v$*, data da*

$$y_f(t) = \int_{-\infty}^{t} h(t-\tau)v(\tau)d\tau \tag{4.61}$$

risolve l'equazione (4.59), soddisfacendo la condizione che y_f *e le sue derivate fino all'ordine* $n-1$ *siano simultaneamente nulle in un arbitrario istante* $t_0 < \inf\{t:\ t \in \operatorname{supp} v\}$.

Prova Si calcolino le derivate successive di $y_f(\cdot)$, tenendo conto delle condizioni su h : $h(0) = h^{(1)}(0) = \ldots = h^{(n-2)}(0) = 0$ e $h^{(n-1)}(0) = 1$.

$$\begin{aligned}
(Dy_f)(t) &= h(0)v(t) + \int_{-\infty}^{t} (Dh)(t-\tau)v(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t} (Dh)(t-\tau)v(\tau)d\tau \\
(D^2y_f)(t) &= h^{(1)}(0)v(t) + \int_{-\infty}^{t} (D^2h)(t-\tau)v(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t} (D^2h)(t-\tau)v(\tau)d\tau \\
\ldots &\quad \ldots \\
(D^{n-1}y_f)(t) &= h^{(n-2)}(0)v(t) + \int_{-\infty}^{t} (D^{n-1}h)(t-\tau)v(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t} (D^{n-1}h)(t-\tau)v(\tau)d\tau \\
(D^n y_f)(t) &= v(t) + \int_{-\infty}^{t} (D^n h)(t-\tau)v(\tau)d\tau
\end{aligned} \tag{4.62}$$

Moltiplicando (4.61) per a_0 e le (4.62) nell'ordine per $a_1, \ldots, a_{n-1}, 1$ e sommando infine membro amembro, si ottiene

$$\begin{aligned}
p(D)y_f(t) &= v(t) + \int_{-\infty}^{t} \Big(\sum i = 0^n a_i D^i h\Big)(t-\tau)v(\tau)d\tau \\
&= v(t) + \int_{-\infty}^{t} \Big(p(D)h\Big)(t-\tau)v(\tau)d\tau = v(t)
\end{aligned}$$

dal momento che $h(\cdot)$ è una soluzione dell'equazione omogenea.
Essendo $y_f(t)$ identicamente nulla per ogni $t < b$, in $t_0 < b$ sono nulle le sue derivate di ogni ordine e sono quindi soddisfatte le condizioni iniziali considerate nell'enunciato. ■

La soluzione y_f così calcolata si dice la "risposta forzata" del sistema all'ingresso v.
Se le condizioni iniziali $\mathbf{x}$ sulla soluzione di (4.59) all'istante $t_0 < b$ non sono nulle, la soluzione di (4.59) è somma

- della soluzione y_f fornita da (4.61), alla quale corrispondono in t_0 condizioni nulle;
- della soluzione dell'equazione omogenea $p(D)y = 0$ soddisfacente in t_0 le condizioni $\mathbf{x}$ assegnate, ovvero

$$\sum_{i=0}^{n-1} \beta_i h^{(i)}(t - t_0)$$

  con

$$\begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix} = [\,\mathbf{e}_n \quad F\mathbf{e}_n \quad \cdots \quad F^{n-1}\mathbf{e}_n\,]^{-1}\,\mathbf{x}$$

Se, infine, le condizioni iniziali sono specificate in un istante $t_0 \geq b$,

1) si può considerare la soluzione $y_f(\cdot)$ corrispondente a $v(\cdot)$, fornita da (4.61), calcolare in t_0 il vettore

$$\mathbf{x} - \begin{bmatrix} y_f(t_0) \\ y_f^{(1)}(t_0) \\ \vdots \\ y_f^{(n-1)}(t_0) \end{bmatrix} =: \mathbf{x}^* \tag{4.63}$$

   e aggiungere a y_f la soluzione di $p(D)y = 0$ corrispondente alla condizione iniziale $\mathbf{x}^*$ in t_0. In questo modo la soluzione ottenuta vale su tutto l'asse reale.

2. si può supporre di conoscere soltanto $\mathcal{F}_{t_0}v$ e determinare per $t \geq t_0$ e determinare per $t \geq t_0$ la funzione

$$\tilde{y}_f(t) = \int_{-\infty}^{t} h(t-\tau)(\mathcal{F}_{t_0}v)(\tau)d\tau \tag{4.64}$$

   calcolandone le derivate destre in t_0 mediante un passaggio al limite

$$\tilde{y}_f^{(i)}(t_0) = \lim_{t\to t_0} \frac{d^i}{dt^i} \int_{-\infty}^{t} h(t-\tau)(\mathcal{F}_{t_0}v)(\tau)d\tau$$

   Si ottiene

$$\lim_{t\to t_0} \tilde{y}_f(t) = 0, \qquad \lim_{t\to t_0} \tilde{y}_f^{(i)}(t) = h^{(i-1)}(0)v(t_0) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1$$

   Allora il vettore $\mathbf{x}^*$ fornito da (4.63), con y_f sostituito da $\tilde{y}_f$, coincide con $\mathbf{x}$ e alla (4.64) si deve aggiungere la soluzione dell'equazione omogenea $p(D)y = 0$ corrispondente a $\mathbf{x}$. In questo caso la soluzione ha senso solo per $t \geq t_0$ e coincide con quella ottenuta al punto (1.) solo su $[t_0, +\infty)$.

- ESERCIZIO 4.8.1 In (4.61) la funzione h appartiene a C^∞. Quindi è C^∞ anche la funzione y_f, in base all'esercizio 3.2.3. Qual è il punto errato di questo ragionamento?
- ESERCIZIO 4.8.2 Nell'ipotesi che la derivata $v^{(1)}$ esista ovunque finita, come sono legate l'uscita forzata y_f, corrispondente all'ingresso v secondo la (4.61), e l'uscita $\hat{y}_f$ corrispondente all'ingresso $v^{(1)}$, e data da $\hat{y}_f(t) = \int_{-\infty}^{t} h(t-\tau)v^{(1)}(\tau)d\tau$?

4.9 Riferimenti bibliografici

[Ap] Apostol, Calcolo, vol2, Boringhieri

[LV] Lepschy A, Viaro U., Guida allo studio dei Controlli Automatici, Patron