Capitolo 5

Convoluzione ed equazioni differenziali nell'ambiente delle distribuzioni

5.1 Premessa

Una funzione continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è assegnata abitualmente specificando i valori che $f(t)$ assume per ogni $t \in \mathbb{R}$. Peraltro f può essere assegnata egualmente bene assegnando i valori degli integrali $\int f(\tau)\phi(\tau)d\tau$ quando ϕ varia sullo spazio $\mathcal{D}$ della funzioni di test[1]. Nel fatto, scelta una particolare $\psi \in \mathcal{D}$ tale che $\int \psi(\tau)d\tau = 1$ e posto $\psi_{t,\epsilon}(\tau) := \epsilon^{-1}\psi(\epsilon^{-1}(t - \tau))$, si può dimostrare che

$$\lim_{\epsilon \to 0+} \int f(\tau)\psi_{t,\epsilon}(\tau)d\tau = f(t) \tag{5.1}$$

Perciò la conoscenza di $\int f(\tau)\phi(\tau)d\tau$ per ogni ϕ, e quindi in particolare quando ϕ varia sulle funzioni $\psi_{\tau,\epsilon}$, ci consente di ricostruire $f(t)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.
L'intuizione che sta dietro a questa operazione è la seguente:

1. ψ ha supporto in qualche segmento $[-a, a] \subset \mathbb{R}$, quindi $\psi_{t,1}$ ha supporto in $[t-a, t+a]$ e $\psi_{t,\epsilon}$ in $[t - \epsilon a, t + \epsilon a]$;

2. $\int f(\tau\psi_{t,\epsilon}(\tau)d\tau$ è una media pesata dei valori assunti da f in $[t - \epsilon a, t + \epsilon a]$ e questi valori sono prossimi a $f(t)$ per piccoli valori di ϵ, perché f è continua. In altre parole, $\tilde{f}_\epsilon(t) := \int f(\tau)\psi_{t,\epsilon}(\tau)d\tau$ può essere visto come una versione "sfocata" di $f(t)$, ed $f(t)$ può essere recuperato dalle sue versioni sfocate $\tilde{f}_\epsilon(t)$ quando $\epsilon \to 0$.

D'ora in poi porremo, per semplicità di notazione, $\langle f, \phi \rangle = \int f(\tau\phi(\tau)d\tau$.
Considerazioni analoghe si applicano alle funzioni continue a tratti, eccetto che (5.1) non è più valida nei punti di discontinuità.

- Esempio 5.1.1 Se f è discontinua in t e ψ ha supporto in $[0, M]$, allora

$$\psi_{t,\epsilon} = \frac{1}{\epsilon}\psi(\frac{t - \tau}{\epsilon})$$

[1] $\mathcal{D}$ è lo spazio delle funzioni C^∞ con supporto compatto

ha supporto in $[t - M\epsilon, t]$ e il limite (5.1) vale

$$f(t_-) = \lim \tau \to t_- f(\tau)$$

Invece, se ψ è funzione pari, il limite in t vale $\frac{f(t_-) + f(t_+)}{2}$

Più in generale, se f è una funzione localmente integrabile, si può dimostrare che la (5.1) è ancora valida per ogni valore di t, eccetto per valori di t appartenenti a un insieme di misura nulla. Quindi, per ogni funzione localmente integrabile, la (5.1) si può ritenere valida, pur di riguardare come identiche due funzioni che coincidono quasi ovunque.

La dipendenza di $\langle f, \phi \rangle$ da ϕ è più "semplice" di quella di $f(t)$ da t per due motivi:

a) la dipendenza è lineare:

$$\langle f, \alpha_1 \phi_1 + \alpha_2 \phi_2 \rangle = \alpha_1 \langle f, \phi_1 \rangle + \alpha_2 \langle f, \phi_2 \rangle$$

Quindi $\langle f, \cdot \rangle : \mathcal{D} \to \mathbb{R} : \phi \mapsto \langle f, \phi \rangle$ è un funzionale lineare su $\mathcal{D}$.

b) la dipendenza è continua. Se $\phi_k,\ k = 1, 2, \ldots$ hanno supporto in un insieme comune e limitato K e se $\phi_k \to 0$ uniformemente, allora $\langle f, \phi_k \rangle \to 0$:

$$|\langle f, \phi_k \rangle| = |\int_K f(\tau)\phi_k(\tau) d\tau| \leq \sup_\tau |\phi_k(\tau)| \int_K |f(\tau)| d\tau \to 0 \cdot |\int_K |f(\tau)| d\tau = 0$$

Va osservato, tuttavia, che la famiglia dei funzionali definiti su $\mathcal{D}$ e dotati delle proprietà (a) e (b) non comprende soltanto l'insieme dei funzionali che si ottengono integrando le funzioni di $\mathcal{D}$ pesate con qualche funzione f. Un'importante estensione di tale insieme è rappresentato, come vedremo, dalle distribuzioni.

Definizione 5.1.1 Una distribuzione è una mappa

$$\Gamma : \mathcal{D} \to \mathbb{R} : \phi \mapsto \langle \Gamma, \phi \rangle \tag{5.2}$$

che soddisfa i seguenti assiomi:

a) linearità;

b') se $\{\phi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ è una successione di funzioni in $\mathcal{D}$, se esiste un insieme limitato $K \subset \mathbb{R}$ tale che per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha $\mathrm{supp}\phi_k \subset K$ e se converge a zero uniformemente su K ciascuna delle successioni

$$\begin{array}{l} \phi_1, \phi_2, \ldots \\ \frac{d\phi_1}{d\tau}, \frac{d\phi_2}{d\tau}, \ldots \\ \frac{d^2\phi_1}{d\tau^2}, \frac{d^2\phi_2}{d\tau^2}, \ldots \\ \ldots\ldots, \end{array}$$

allora $\langle \Gamma, \phi_k \rangle \to 0$.

Si noti che la condizione (b') è più debole della (b), nel senso che la convergenza a zero della sequenza $\langle \Gamma, \phi_k \rangle$ deve valere soltanto quando si considerino successioni $\{\phi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ che convergono a zero con tutte le successioni derivate.
Lo spazio delle distribuzioni su $\mathcal{D}$ sarà denotato con $\mathcal{D}'$.

Definizione 5.1.2 Una distribuzione Γ_f indotta da una funzione localmente integrabile f, definita cioè da

$$\langle \Gamma_f, \phi \rangle = \int f(\tau)\phi(\tau)d\tau$$

si dice *regolare*. Ogni altra distribuzione si dice *singolare*.

Quando non dia luogo a equivoci, una funzione f e la distribuzione regolare Γ_f che essa induce saranno denotate col medesimo simbolo f.

Osservazione 1 Intuitivamente, una distribuzione singolare Γ può essere assimilata ad una funzione "troppo irregolare" perché abbiano senso i suoi valori puntuali $\Gamma(t)$ e per la quale siano definiti allora soltanto i valori "sfocat" $\langle \Gamma, \phi \rangle$. Ciò giustifica la notazione (in sè priva di senso)

$$\langle \Gamma, \phi \rangle = \int \Gamma)\tau\phi(\tau)d\tau,$$

adottata come se Γ fosse una funzione. Si tratta di un utile artificio, analogo a quello della notazione $\dfrac{df}{dt}$ in cui si esprime la derivata come quoziente di due quantità "infinitamente piccole".

Osservazione 2 L'idea di non specificare un segnale mediante i suoi valori istantanei, ma piuttosto mediante il suo comportamento come "funzionale" su qualche spazio di funzioni di test, non è così esoterica come potrebbe apparire a prima vista.
Già la trasformata di Fourier può essere vista come un metodo per specificare una funzione $f(t)$ mediante funzioni di test del tipo $e^{j\omega t}$, $\omega \in (-\infty, +\infty)$. Il valore $F(\bar{\omega})$ che la trasformata di Fourier di f

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

assume un corrispondenza alla pulsazione $\bar{\omega}$ altro non è che il valore del funzionale

$$\Gamma : e^{j\bar{\omega}t} \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\bar{\omega}t}dt = F(\bar{\omega})$$

lineare sullo spazio generato dalle funzioni $e^{j\omega t}$, $\omega \in \mathbb{R}$.
Anche dal punto di vista operativo, del resto, un segnale $f(\cdot)$ può essere conosciuto attraverso procedimenti di misura che coinvolgono l'intervento di uno strumento durante un intervallo di tempo che, seppur breve, non è puntiforme. La misura è allora un numero che dipende sia dall'andamento "locale" (ma non dal valore "puntuale") di $f(\cdot)$, sia dalle caratteristiche peculiari dello strumento (ovvero, in termini più astratti, sia dal comportamento $f(\cdot)$ del processo che si vuol misurate, sia dal tipo di interazione con lo strumento, descritta genericamente da una funzione di test $\phi(\cdot)$ a supporto limitato). Si noti che, da un punto di vista operazionale, non sono in generale noti i valori istantanei, $f(t)$, che per certi versi costituiscono una schematizzazione concettuale, quanto piuttosto i risultati numerici $\langle f, \phi \rangle$ del processo di misura.

Esempio 5.1.1 [Distribuzione di Dirac δ] Per ogni $\phi \in \mathcal{D}$ si pone

$$\langle \delta, \phi \rangle = \phi(0)$$

Esempio 5.1.2 [Distribuzione $\delta^{(m)}$, $m > 0$] Per ogni $\phi \in \mathcal{D}$, denotando con $\phi^{(m)}$ la sua derivata m-esima, si pone

$$\langle \delta^{(m)}, \phi \rangle = (-1)^m \phi(0)$$

Esempio 5.1.3 [Distribuzione $\delta^{(-m)}$, $m > 0$] È la distribuzione regolare associata al segnale canonico che denotiamo con lo stesso simbolo:

$$\delta^{(-m)}(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ t^m/m! & \text{se } t \geq 0 \end{cases}$$

Oltre all'insieme $\mathcal{D}$ delle funzioni di test, indefinitamente derivabili e a supporto compatto, si considera in letteratura lo spazio $\mathcal{S}$ delle funzioni indefinitamente derivabili e tali che, quando $|t| \to \infty$, le funzioni e tutte le derivate successive tendono a zero più rapidamente di ogni potenza di $|1/t|$ (spazio delle funzioni "rapidamente decrescenti"). È chiaro che $\mathcal{D} \subset \mathcal{S}$, ossia lo spazio $\mathcal{S}$ rappresenta un'estensione di $\mathcal{D}$.
Una *distribuzione temperata* è una mappa $\Gamma : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ che soddisfa gli assiomi (a) e (b') della definizione 5.1.1 di distribuzione. Poiché Γ è definita, in particolare, sulle funzioni di $\mathcal{D}$, essa è certamente una distribuzione quando se ne restringa il dominio a $\mathcal{D}$. Lo spazio delle distribuzioni temperate si denota con $\mathcal{S}'$ e sarà riconsiderato nel capitolo 6, dedicato alla trasformata di Laplace.

5.2 Il calcolo delle distribuzioni

Il grande vantaggio di ricorrere a distribuzioni, anziché a funzioni, per descrivere fenomeni fisici e sistemi dinamici dipende dal fatto che
1. le operazioni fondamentali del Calcolo (derivazione e integrazione) in ambito distribuzionale sono sempre definite;
2. per ogni distribuzione regolare $\langle \Gamma_f, \cdot \rangle$, se alla funzione f può essere applicata un'operazione del Calcolo e il risultato è una funzione g, allora la distribuzione regolare $\langle \Gamma_g, \cdot \rangle$ coincide[2] con la distribuzione che si ottiene applicando l'operazione direttamente a $\langle \Gamma_f, \cdot \rangle$;
3. successioni convergenti di distribuzioni hanno ancora significato di distribuzioni.

Consideriamo ora le operazioni più importanti che si definiscono in $\mathcal{D}'$.

A) [Addizione di due distribuzioni] Se $\Gamma, S \in \mathcal{D}'$, allora

$$\langle \Gamma + S, \cdot \rangle := \langle \Gamma, \cdot \rangle + \langle S, \cdot \rangle$$

è una distribuzione.

B) [Moltiplicazione di una distribuzione per uno scalare] Se $\Gamma \in \mathcal{D}'$ e $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\langle \alpha\Gamma, \cdot \rangle := \alpha \langle \Gamma, \cdot \rangle$$

è una distribuzione.

[2] In altre parole, se è possibile lavorare nell'ambiente delle funzioni, i risultati che si ottengono lavorando invece nell'ambiente più ampio delle distribuzioni sono "isomorfi' a quelli ottenuti operando direttamente sulle funzioni.

C) [SHIFT (=TRASLAZIONE) DI UNA DISTRIBUZIONE] Se $\Gamma \in \mathcal{D}'$ e $\Delta \in \mathbb{R}$,

$$\langle \sigma_\Delta \Gamma, \cdot \rangle := \langle \Gamma, \sigma_{-\Delta}(\cdot) \rangle$$

è una distribuzione. Si noti che, per ogni $\phi \in \mathcal{D}$, il valore che la distribuzione $\sigma_\Delta \Gamma$ assume sulla generica funzione di test ϕ è, per definizione, quello che la distribuzione Γ assume sulla funzione di test traslata $\sigma_{-\Delta}\phi$.

ESEMPIO 5.2.1 $\langle \sigma_\Delta \delta, \phi \rangle = \langle \delta, \sigma_{-\Delta}\phi \rangle = (\sigma_{-\Delta}\phi)(0) = \phi(-\Delta)$.

ESEMPIO 5.2.2 Se Γ_f è regolare

$$\begin{aligned} \langle \sigma_\Delta \Gamma_f, \phi \rangle &= \langle \Gamma_f, \sigma_{-\Delta}\phi \rangle = \int f(\tau)\phi(\tau - \Delta)d\tau \\ &= \int f(\tau + \Delta)\phi(\tau)d\tau = \int (\sigma_\Delta f)(\tau)\phi(\tau)d\tau = \langle \Gamma_{\sigma_\Delta f}, \phi \rangle \end{aligned}$$

La precedente definizione di distribuzione traslata consente di assimilare una distribuzione, insieme a tutte le sue traslate, a una funzione (generalizzata) del tempo. Più precisamente, se denotiamo una generica distribuzione Γ al pari di una funzione, e cioè come $\Gamma(t)$, la sua traslata $\sigma_\Delta \Gamma$ sarà denotata come $\Gamma(t + \Delta)$.

D) [TRASPOSIZIONE] Se $\Gamma(t) \in \mathcal{D}'$, la sua trasposta $\Gamma(-t)$ si definisce ponendo

$$\langle \Gamma(-t), \phi \rangle := \langle \Gamma(t), \phi_{\leftarrow} \rangle$$

dove, per ogni $\tau \in \mathbb{R}$, $\phi_{\leftarrow}(\tau) = \phi(-\tau)$.
Diremo che Γ è una distribuzione pari se $\Gamma(-t) = \Gamma(t)$, ossia se, per ogni $\phi \in \mathcal{D}$, si ha $\langle \Gamma(t), \phi \rangle = \langle \Gamma(t), \phi_{\leftarrow} \rangle$.

E) [SCALING[3]] Se f è una funzione $a \in \mathbb{R},\ a > 0$, si ha

$$\int f(a\tau)\phi(\tau)d\tau = \frac{1}{a}\int f(t)\phi(t/a)dt$$

Si pone allora, per ogni $\Gamma(t) \in \mathcal{D}'$ e $a \in \mathbb{R},\ a > 0$,

$$\langle \Gamma(at), \phi(t) \rangle := \frac{1}{a}\left\langle \Gamma(t), \phi(\frac{t}{a}) \right\rangle$$

F) [MOLTIPLICAZIONE DI UNA DISTRIBUZIONE PER UNA FUNZIONE LISCIA] Se $\Gamma \in \mathcal{D}'$ e se $h(\cdot)$ è una funzione infinitamente liscia[4], si definisce il prodotto Γh ponendo

$$\langle \Gamma h, \phi \rangle = \langle \Gamma, h\phi \rangle,\ \forall \phi \in \mathcal{D}.$$

F') [MOLTIPLICAZIONE DI DUE DISTRIBUZIONI REGOLARI Γ_f E Γ_g]

$$\langle \Gamma_f \Gamma_g, \phi \rangle := \langle \Gamma_{fg}, \phi \rangle = \int f(\tau)g(\tau)\phi(\tau)d\tau$$

Quindi il prodotto di distribuzioni regolari è regolare.

---

[3]=riscalamento dell'asse dei tempi
[4]dotata di derivate di ogni ordine, ma non necessariamente a supporto compatto

Non si definisce, in generale, il prodotto di due distribuzioni arbitrarie.

- ESERCIZIO 5.2.1 Siano δ e $\delta^{(1)}$ le distribuzioni definite da $\langle \delta, \phi \rangle = \phi(0); \quad \langle \delta^{(1)}, \phi \rangle = -\phi'(0), \ \forall phi \in \mathcal{D}$. Si verifichi che
(i) $t\delta$ è la distribuzione nulla;
(ii) $t\delta^{(1)}$ coincide con $-\delta$.
♯ *Soluzione*

$$\begin{array}{rcl} \langle t\delta . \phi \rangle & = & \langle \delta, t\phi \rangle \ = \ (t\phi)(0) \ = \ 0, \ \forall \phi \in \mathcal{D} \\ \langle t\delta^{(1)}, \phi \rangle & = & \langle \delta^{(1)}, t\phi \rangle \ = \ \left(\dfrac{-d}{dt} t\phi \right)(0) \ = \ -\phi(0), \ \forall \phi \in \mathcal{D} \end{array}$$

G) [DERIVAZIONE] Se f è ovunque continuamente derivabile e f' ne è la funzione derivata, si ha

$$\langle f', \phi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(\tau)\phi(\tau)d\tau = f(\tau)\phi(\tau)|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\phi'(\tau)d\tau = \langle f, -\phi' \rangle$$

Nel caso generale, la formula precedente si assume come definiuzione di derivata di una distribuzione $\Gamma \in \mathcal{D}'$

$$\langle \Gamma', \phi \rangle := \langle \Gamma, -\phi' \rangle, \ \forall \phi \in \mathcal{D} \tag{5.3}$$

La (5.3) ha come immediata conseguenza la seguente

Proposizione 5.2.1 *Ogni distribuzione è indefinitamente derivabile.* ■

Esempio 5.2.1 Considerando la funzione gradino unitario

$$\delta^{(-1)}(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ 1 & \text{per } t \geq 0 \end{cases}$$

come una distribuzione regolare, si determina la distribuzione derivata[5]

$$\begin{array}{rcl} \langle (\delta^{(-1)})', \phi \rangle & = & \langle \delta^{(-1)}, -\phi' \rangle = -\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(-1)}(\tau)\phi'(\tau)d\tau - \int_{0}^{+\infty} \phi'(\tau)d\tau = -\phi(\tau)|_0^{+\infty} = \phi(0) \\ & = & \langle \delta, \phi \rangle, \ \forall \phi \in \mathcal{D} \end{array}$$

Quindi la distribuzione di Dirac è la derivata di $\delta^{(-1)}$.

Esempio 5.2.2 Sia f una funzione derivabile con derivata continua, eccetto nell'origine, dove f e f' hanno un salto finito. Considerando la distribuzione associata a f, si ha

$$\begin{array}{rcl} \langle (\Gamma_f)', \phi \rangle & = & \langle \Gamma_f, -\phi' \rangle = -\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\phi'(\tau)d\tau = -\int_{-\infty}^{0} f(\tau)\phi'(\tau)d\tau - \int_{0}^{+\infty} f(\tau)\phi'(\tau)d\tau \\ & = & \displaystyle\lim_{\epsilon \to 0_-} \left[-f(\tau)\phi(\tau)|_{-\infty}^{\epsilon} + \int_{-\infty}^{\epsilon} f'(\tau)\phi(\tau)d\tau \right] + \lim_{\epsilon \to 0_+} \left[-f(\tau)\phi(\tau)|_{\epsilon}^{+\infty} + \int_{\epsilon}^{+\infty} f'(\tau)\phi(\tau)d\tau \right] \\ & = & -f(0_-)\phi(0) + f(0_+)\phi(0) + \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f'(\tau\phi(\tau)d\tau \\ & = & [f(0_+) - f(0_-)] \langle \delta, \phi \rangle + \langle \Gamma_{f'}, \phi \rangle \end{array}$$

dove $\Gamma_{f'}$ è la distribuzione regolare associata alla funzione che vale $f'(t)$ per $t \neq 0$ e assume un valore arbitrario per $t = 0$. Abbiamo perciò

$$(\Gamma_f)' = \Gamma_{f'} + [f(0_+) - f(0_-)] \delta$$

[5] quando non dia luogo ad ambiguità, per una funzione regolare f e per la distribuzione associara Γ_f si utilizza la medesima notazione

G') [DERIVAZIONE DEL PRODOTTO FRA DISTRIBUZIONI E FUNZIONI LISCE] Se $\Gamma \in \mathcal{D}'$ e $h(\cdot)$ è (infinitamente) liscia, dalla definizione del prodotto fra una distribuzione e una funzione liscia si ha

$$\langle (\Gamma h)', \phi \rangle = \langle \Gamma h, -\phi' \rangle = \langle \Gamma, -h\phi' \rangle$$

D'altra parte, dal punto (F) risulta

$$\begin{aligned} \langle \Gamma(h'), \phi \rangle &= \langle \Gamma, h'\phi \rangle \\ \langle (\Gamma')h, \phi \rangle &= \langle \Gamma', h\phi \rangle = \langle \Gamma, -h\phi' - h'\phi \rangle \end{aligned}$$

Poiché le eguaglianze valgono per ogni $\phi \in \mathcal{D}$, si ottiene

$$(\Gamma h)' = \Gamma(h') + \Gamma' h$$

ovvero vale una regola analoga a quella della derivazione del prodotto di due funzioni derivabili.

G") [DERIVATE SUCCESSIVE] Applicando $n > 0$ volte la definizione di derivata di una distribuzione, è immediato verificare che la derivata n-esima di una distribuzione Γ soddisfa [6]

$$\langle \Gamma^{(n)}, \phi \rangle = \langle \Gamma, (-1)^n \phi^{(n)} \rangle, \ \forall \phi \in \mathcal{D}$$

Esempio 5.2.3 Per $n > 0$, la derivata n-esima della distribuzione di Dirac è definita da

$$\langle \delta^{(n)}, \phi \rangle = \langle \delta, (-1)^n \phi^{(n)} \rangle = (-1)^n \phi^{(n)}(0)$$

Esempio 5.2.4 Se f è (infinitamente) liscia, si ha

$$\langle (\delta f)^{(n)}, \phi \rangle = \langle \delta f, (-1)^n \phi^{(n)} \rangle = \langle \delta, (-1)^n f \phi^{(n)} \rangle = (-1)^n f(0) \phi^{(n)}(0) = f(0) \langle \delta^{(n)}, \phi \rangle$$

Ciò prova l'identità $(\delta f)^{(n)} = f(0)\delta^{(n)}$.

Esempio 5.2.5 Se f è infinitamente liscia, si ha per ogni $n > 0$

$$\begin{aligned} \langle (\delta^{(-1)} f)^{(n)}, \phi \rangle &= \langle (\delta^{(-1)} f), (-1)^n \phi^{(n)} \rangle = \int_0^{+\infty} (-1)^n f(\tau) \phi^{(n)}(\tau) d\tau \\ &= (-1)^n f(\tau) \phi^{(n-1)}(\tau)|_0^{+\tau} + \int_0^{+\infty} \frac{df}{d\tau} (-1)^n \phi^{(n-1)}(\tau) d\tau \\ &= f(0) \langle \delta^{(n-1)}, \phi \rangle + \langle (\delta^{(-1)} f^{(1)})^{(n-1)}, \phi \rangle \end{aligned} \tag{5.4}$$

e, iterando il procedimento, si ricava la derivata n-esima della funzione "troncata" $\delta^{(-1)} f$:

$$(\delta^{(-1)} f)^{(n)} = f^{(n)}(t) \delta^{(-1)} + f^{(n-1)}(0) \delta + f^{(n-2)}(0) \delta^{(2)} + \ldots + f(0) \delta^{(n-1)}. \tag{5.5}$$

Il risultato vale anche se f non è infinitamente liscia, ma soltanto di classe C^n (cioè dotata di derivate continue fino all'ordine n), perché ciò garantisce di poter effettuare le integrazioni per parti necessarie per ottenere (5.4) e (5.5).

Esempio 5.2.6 In generale, se f è una funzione liscia, per $n > 0$ si ha $\delta^{(n)} f \neq (\delta f)^{(n)}$. Infatti, applicando la regola di derivazione del prodotto di funzioni, si ha

$$\langle \delta^{(n)} f, \phi \rangle = \langle \delta^{(n)}, f\phi \rangle = (-1)^n (f\phi)^{(n)}(0)$$

[6] si pone, per brevità, $\phi^{(n)} = \frac{d^n \phi}{d\tau^n}$

$$\begin{aligned} &= (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(0)\phi^{(n-k)}(0) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n}{k} f^{(k)}(0)(-1)^{n-k}\phi^{(n-k)}(0) \\ &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n}{k} f^{(k)}(0)\langle\delta^{(n-k)}, \phi\rangle \end{aligned}$$

e quindi

$$\delta^{(n)} f = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n}{k} f^{(k)}(0)\delta^{(n-k)} \quad \text{, in generale} \quad \neq f(0)\delta^{(n)} = (\delta f)^{(n)}$$

- Esercizio 5.2.2 [Ulteriori regole di derivazione] (i) Se $\Gamma(t) \in \mathcal{D}'$, la derivata della distribuzione trasposta trasposta $D(\Gamma(-t))$ e la trasposta della distribuzione derivata $(D\Gamma)(-t)$ differiscono per il segno.
  (ii) $D(\Gamma(at)) = a(D\Gamma(at))$

Osservazione Se $\Gamma \in \mathcal{D}'$ e se si considera la distribuzione "rapporto incrementale"

$$\frac{1}{\Delta}(\sigma_\Delta\Gamma - \Gamma)$$

per ogni $\phi \in \mathcal{D}$ si ha

$$\langle \frac{1}{\Delta}(\sigma_\Delta\Gamma - \Gamma), \phi\rangle = \frac{1}{\Delta}\left(\langle\Gamma, \sigma_{-\Delta}\phi\rangle - \langle\Gamma, \phi\rangle\right) = \langle\Gamma, -\frac{\sigma_{-\Delta}\phi - \phi}{-\Delta}\rangle$$

Quando $\Delta \to 0$, l'espressione tende a $\langle\Gamma, -\phi'\rangle$, per la proprietà (b') della definizione di distribuzione, e il nuovo funzionale ottenuto come limite del rapporto incrementale soddisfa esso stesso le condizioni (a) e (b').

H) [Distribuzioni costanti] Una distribuzione Γ si dice costante se

$$\sigma_\Delta\Gamma = \Gamma, \ \forall\Delta \in \mathbb{R}$$

È chiaro che se Γ è costante, la distribuzione derivata Γ' è nulla. Vale anche il viceversa:

Proposizione 5.2.2 *Se una distribuzione Γ ha derivata nulla, allora è una distribuzione costante*

Prova Per ogni $\phi \in \mathcal{D}$ si ha

$$\langle\Gamma', \phi\rangle = \langle\Gamma, -\phi'\rangle = 0$$

Si consideri ora, per un arbitrario $\Delta \in \mathbb{R}$, la distribuzione $\sigma_\Delta\Gamma - \Gamma$ e, per ogni $\phi \in \mathcal{D}$, si esprima la sua azione su ϕ

$$\langle\sigma_\Delta\Gamma - \Gamma, \phi\rangle = \langle\Gamma, \sigma_{-\Delta}\phi - \phi\rangle. \tag{5.6}$$

La funzione $\sigma_{-\Delta}\phi - \phi$ è dotata di una primitiva che appartiene a $\mathcal{D}$, perché

$$\psi(t) = \int_{-\infty}^{t} [\phi(\tau\Delta) - \phi(\tau)]d\tau$$

è infinitamente derivabile, ha supporto compatto e soddisfa la condizione $\psi' = \sigma_{-\Delta}\phi - \phi$. Ma per ipotesi Γ ha derivata nulla, quindi (5.6) si riscrive come

$$\langle\sigma_\Delta\Gamma - \Gamma, \phi\rangle = \langle\Gamma, \psi'\rangle = 0$$

e poiché ϕ è un elemento arbirtario di $\mathcal{D}$, si ha infine $\sigma_\Delta\Gamma = \Gamma$. ∎

I) [PRIMITIVA DI UNA DISTRIBUZIONE] Se $\Gamma \in \mathcal{D}'$, una primitiva di Γ è ogni distribuzione $\Gamma^{(-1)}$ la cui derivata coincide con Γ.
Sommando una distribuzione costante a una primitiva di Γ si ottiene un'altra primitiva di Γ e, al variare della costante, si ottengono tutte le possibili primitive.
Per verificare l'esistenza di una primitiva, si considera una funzione $\phi_0 \in \mathcal{D}$ soddisfacente la condizione
$$\int \phi_0(\tau)d\tau = 1$$
e si scompone ogni altra funzione di test $\phi \in \mathcal{D}$ nella forma $\phi = k\phi_0 + \psi$, con $k \in \mathbb{R}$ e con
$$\int \psi(\tau)d\tau = 0.$$
La verifica che la scomposizione è sempre possibile ed è unica è lasciata per esercizio.
Si definisce ora arbitrariamente il valore di $\langle \Gamma^{(-1)}, \phi_0 \rangle$ e si pone, per ogni $\phi \in \mathcal{D}$
$$\langle \Gamma^{(-1)}, \phi \rangle = \langle \Gamma^{(-1)}, k\phi_0 + \psi \rangle = k\langle \Gamma^{(-1)}, \phi_0 \rangle + \langle \Gamma, -\psi^{(-1)} q \rangle \tag{5.7}$$
dove $\psi^{(-1)}$ è l'unica primitiva di ψ in $\mathcal{D}$. Si verifica, allora, che il funzionale definito da (5.7) è una distribuzione la cui derivata coincide con Γ.

J) [SUCCESSIONI DI DISTRIBUZIONI] Diciamo che una successione di distribuzioni $\{\Gamma_k\}$, $k \in \mathbb{N}$, converge (debolmente) se, per ogni $\phi \in \mathcal{D}$, esiste finito il limite $\lim_{k\to\infty} \langle \Gamma_k, \phi \rangle$. Si dimostra che, quando ciò succede, il funzionale definito da
$$\Gamma : \mathcal{D} \to \mathbb{R} : \phi \mapsto \lim_{k\to\infty} \langle \Gamma_k, \phi \rangle$$
soddisfa le condizioni (a) e (b') della definizione di distribuzione. Pertanto, ogni successione debolmente convergente di distribuzioni dà luogo ad una distribuzione.

Esempio 5.2.7 Sia ψ una funzione di test, con $\psi(\tau)d\tau = 1$ e sia ψ_k, la funzione di test definita da
$$\psi_k(\tau) = k\psi(k\tau), \ \in \mathbb{N}.$$
La successione di distribuzioni regolari $\{\Gamma_{\psi_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge debolmente alla distribuzione δ di Dirac, nel senso che, per ogni $\phi \in \mathcal{D}$, risulta
$$\lim_{k\to\infty} \langle \Gamma_{\psi_k}, \phi \rangle = \phi(0) = \langle \delta, \phi \rangle.$$

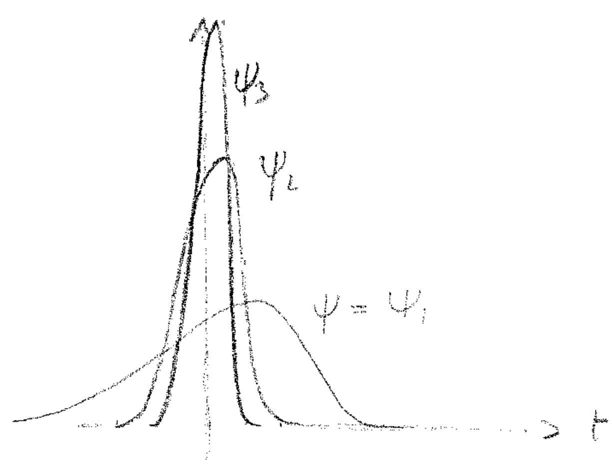

Figura 5.2.1

Esempio 5.2.8 Per ogni sequenza bilatera di numeri reali $\{a_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ e per ogni $\Delta > 0$, la serie $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k(\sigma_{k\Delta}\delta)$ è una distribuzione. Infatti, per ogni $\phi \in \mathcal{D}$ esiste finito (si tenga presente che ϕ ha supporto compatto)

$$\lim_{L\to+\infty}\langle \sum_{k=-L}^{L} a_k(\sigma_{k\Delta}\delta), \phi\rangle = \lim_{L\to+\infty}\sum_{k=-L}^{L} a_k\phi(-k\Delta)$$

e sono soddisfatte le condizioni per la convergenza debole.

5.3 Convoluzione di distribuzioni

Per definire la convoluzione di due distribuzioni, dobbiamo precisare il concetto di supporto di una funzione e definire quello di supporto di una distribuzione.

Definizione 5.3.1 *Il supporto di una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è la chiusura dell'insieme su cui f non è nulla*

$$\mathrm{supp} f = \overline{\{t \in \mathbb{R} : f(t) \neq 0\}}. \tag{5.8}$$

L'insieme nullo di una distribuzione Γ è l'aperto $\mathcal{N}(\Gamma)$ costituito dai punti $t \in \mathbb{R}$ per i quali esiste un intorno I_t tale che

$$\langle \Gamma, \phi\rangle = 0,\ \forall \phi \in \mathcal{D},\ \mathrm{supp}\,\phi \subseteq I_t \tag{5.9}$$

Infine, il supporto di una distribuzione Γ si definisce come

$$\mathrm{supp}\,\Gamma = \mathbb{R} \setminus \mathcal{N}(\Gamma) \tag{5.10}$$

- Esercizio 5.3.1 Il supporto di $\delta^{(i)}$, $i \geq 0$, è l'insieme $\{0\}$. Il supporto di $\delta^{(-1)}$ è l'insieme $[0, +\infty)$.

Riuniamo in un'unica proposizione alcuni fatti notevoli sul supporto di una distribuzione. La prova del punto (ii) è lungi dall'essere banale.

Proposizione 5.3.2 *Sia Γ una distribuzione.*
(i) Se $t \in \mathrm{supp}\,\Gamma$ e se $\bar{I}_t$ è un intorno chiuso di t, esiste $\phi \in \mathcal{D}$ tale che

$$\mathrm{supp}\,\phi \subseteq \bar{I}_t, \quad \langle \Gamma, \phi\rangle \neq 0 \tag{5.11}$$

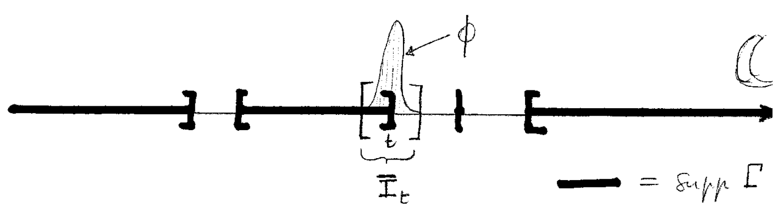

Figura 5.3.1

(ii) Per ogni $\phi \in \mathcal{D}$ con $\mathrm{supp}\,\phi \subset \mathcal{N}(\Gamma)$, si ha $\langle \Gamma, \phi\rangle = 0$.

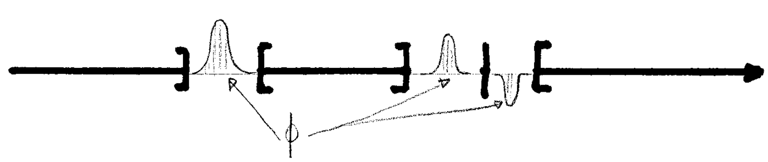

Figura 5.3.2

(iii) Se $f \in C^\infty$ e se $\operatorname{supp} f \cap \operatorname{supp} \Gamma$ è un compatto K, allora per tutte le funzioni $\lambda \in \mathcal{D}$ soddisfacenti $\lambda(t) = 1$ per ogni $t \in K$, il prodotto λf è una funzione di test (i.e. $\lambda f \in \mathcal{D}$) e la distribuzione Γ su λf assume un valore indipendente da λ.

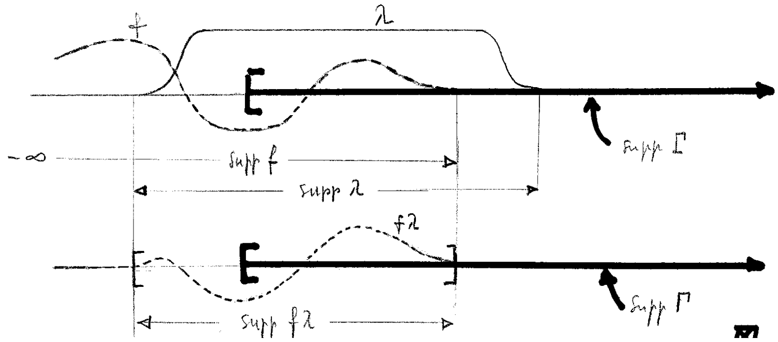

Figura 5.3.3

■

Il punto (iii) della proposizione consente di estendere il dominio di Γ alle funzioni C^∞ il cui supporto non sia limitato, ma abbia intersezione limitata con il supporto di Γ.

Definizione 5.3.3 *$\mathcal{D}_R{}'$ è il sottospazio di $\mathcal{D}'$ costituito dalle distribuzioni con supporto compatto a sinistra, ovvero delle distribuzioni Γ per le quali esiste $b_\Gamma \in \mathbb{R}$ tale per cui* $\operatorname{supp} \Gamma \subseteq [b_\Gamma, +\infty)$.

Lemma 5.3.4 *Sia ϕ un'arbitraria funzione di test e sia Γ una distribuzione in $\mathcal{D}'_R$. Allora la funzione $f(\cdot)$ definita da*

$$f(t) = \langle \Gamma, \phi(t + \cdot) \rangle = \langle \Gamma, \sigma_t \phi \rangle$$

è indefinitamente derivabile ed ha supporto compatto a destra, ovvero esiste $a \in \mathbb{R}$ tale che $\operatorname{supp} f \subseteq (-\infty, a]$ ■

La prova dell'appartenenza di f a C^∞ è piuttosto tecnica e viene omessa. La condizione sul supporto, invece, è immediata. La figura 5.3.4 illustra la situazione.

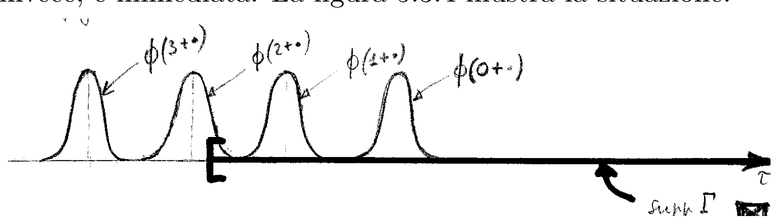

Figura 5.3.4

Dal lemma 5.3.4 consegue che l'intersezione fra il supporto di un'arbitraria distribuzione $V \in \mathcal{D}'_R$ e quello della funzione $f(\cdot)$ è un compatto, quindi è definito, in base al punto (iii) della proposizione 5.3.2, il valore che V assume su $f(\cdot)$:

$$\langle V, f \rangle := \langle V, \lambda f \rangle,$$

dove $\lambda \in \mathcal{D}$ vale 1 su $\operatorname{supp} f \cap \operatorname{supp} V$, ed acquista significato la seguente definizione di prodotto di convoluzione.

Definizione 5.3.5 *Se $V, \Gamma \in \mathcal{D}'_R$, il prodotto di convoluzione $V \star \Gamma$ è definito, per ogni $\phi \in \mathcal{D}$, da*

$$\langle V \star \Gamma, \phi \rangle := \langle V, \langle \Gamma, \phi \rangle \rangle \tag{5.12}$$

Esempio 5.3.1 Se $h, g \in L_R^{loc}$, con $\operatorname{supp} h \subseteq [H, +\infty), \operatorname{supp} g \subseteq [G, +\infty)$ e se Γ_h e Γ_g sono le corrispondenti distribuzioni regolari, allora, per ogni $\phi \in \mathcal{D}$

$$\langle \Gamma_h \star \Gamma_g, \phi \rangle = \langle \Gamma_h, \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau)\phi(t+\tau)d\tau \rangle.$$

Se supp$\phi \subseteq [-a, a]$, allora

$$f(t) := \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau)\phi(t+\tau)d\tau = \int_{0}^{+\infty} g(\tau - G)\phi(t - G + \tau)d\tau$$

ha supporto contenuto in $(-\infty, a+G]$, dato che $\phi(t-G+\tau)$ è nulla se $t - G + \tau > a$, ovvero se t¿a+G-τ e, esendo τ non negativo, ciò è certamente verificato se $t > a + G$.
Ma allora si ha

$$\operatorname{supp} \Gamma_h \cap \operatorname{supp} f = \operatorname{supp} h \cap \operatorname{supp} f \subseteq [H, a+G],$$

(vuoto se $H > a + G$) e Γ_h si può applicare a f, ottenendo

$$\langle \Gamma_f, f \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau)\phi(t+\tau)d\tau dt = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)g(\tau)\phi(t+\tau)d\tau dt \tag{5.13}$$

Se consideriamo la funzione $f \star g$ definita nel capitolo 3 e la distribuzione regolare $\Gamma_{h\star g}$ ad essa associata, otteniamo

$$\langle \Gamma_{h\star g}, \phi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t)dt \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau)g(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h(\xi)g(\tau)\phi(\xi+\tau)d\xi d\tau \tag{5.14}$$

che coincide con (5.13). Quindi la distribuzione regolare associata alla convoluzione di due funzioni è la convoluzione delle distribuzioni regolari associate alle due funzioni.

Esempio 5.3.2 $\delta \star \delta = \delta$. Infatti

$$\langle \delta \star \delta, \phi \rangle = \langle \delta, \langle \delta, \phi(t + \cdot) \rangle \rangle = \langle \delta, \phi \rangle$$

perché $\langle \delta, \phi(t+\cdot) \rangle = \phi(t), \ \forall t$.

Proposizione 5.3.6 *La convoluzione fra distribuzioni in $\mathcal{D}'_R$*

i) fornisce a sua volta una distribuzione in $\mathcal{D}'_R$ e risulta[7]

$$\operatorname{supp}(V \star \Gamma) \subseteq (\operatorname{supp} V) + (\operatorname{supp} \Gamma);$$

ii) è commutativa, ovvero $\Gamma \star V = V \star \Gamma$;

iii) è associativa, ovvero $V \star (\Gamma \star W) = (V \star \Gamma) \star W$;

iv) è dotata di elemento identità: la distribuzione di Dirac δ;

v) è distributiva rispetto alla somma, ovvero $V \star (\Gamma + W) = (V \star \Gamma) + (V \star W)$;

vi) per ogni scalare $\alpha \in \mathbb{R}$ soddisfa $\alpha(V) = (\alpha V) \star W = V \star (\alpha W)$;

[7] se A e B sono sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ o, più in generale, di uno spazio vettoriale, si pone $A+B := \{a+b, \ a \in A, b \in B\}$

vii) non ha “divisori dello zero”, nel senso che

$$V \star \Gamma = 0 \Leftrightarrow V = 0 \text{ oppure } \Gamma = 0.$$

Il contenuto dell proposizione si può sintetizzare dicendo che $\mathcal{D}'_R$ è un'algebra di convoluzione con unità (δ) e priva di divisori dello zero.

Proposizione 5.3.7 [Convoluzione e derivazione] *Per ogni coppia $\Gamma, V \in \mathcal{D}'_R$ e per ogni $h, k \geq 0$*

$$(\Gamma \star V)^{(h+k)} = \Gamma^{(h)} \star V^{(k)} \tag{5.15}$$

Prova Basta far vedere che $(\Gamma \star V)^{(1)} = \Gamma^{(1)} \star V = \Gamma \star V^{(1)}$. Infatti, per ogni $\phi \in \mathcal{D}$ risulta

$$\langle (\Gamma \star V)', \phi \rangle = \langle \Gamma \star V, -\phi' \rangle = \langle \Gamma, \langle V, -\phi'(t + \cdot) \rangle \rangle = \langle \Gamma, \langle V', \phi(t + \cdot) \rangle \rangle = \langle \Gamma \star V', \phi \rangle.$$

L'altra eguaglianza si prova in modo analogo. ■

Esempio 5.3.3 Per ogni $n, m \geq 0$, si ha $\delta^{(m)} \star \delta^{(n)} = \delta^{(m+n)}$.
Basta osservare che $\delta = \delta \star \delta$ e applicare la precedente proposizione 5.3.7:

$$\delta^{(m+n)} = (\delta \star \delta)^{(m+n)} = \delta^{(m)} \star \delta^{(n)}$$

Esempio 5.3.4 Se $p(s) = \sum_{i=0}^{n} a_i s^i$, $q(s) = \sum_{j=0}^{m} b_j s^j$ e se $p(s)q(s) = c(s) = \sum_k c_k s^k$, allora

$$(\sum_{i=1}^{n} a_i \delta^{(i)}) \star (\sum_{j=1}^{m} b_j \delta^{(j)}) = \sum_k c_k \delta^{(k)} \tag{5.16}$$

La prova può essere svolta a un livello piuttosto astratto, verificando che la corrispondenza fra i polinomi e le distribuzioni della forma $\sum_i a_i \delta^{(i)}$ data da $\sum_i a_i s^i \mapsto \sum_i a_i \delta(i)$ è un isomorfismo algebrico. In modo più elementare, si può notare che

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \delta^{(i)} \star \sum_{j=1}^{m} b_j \delta^{(j)} = \sum_k \left(\sum_{i+j=k} a_i b_j \delta^{(i)} \star \delta^{(j)} \right) = \sum_k \left(\sum_{i+j=k} a_i b_j \right) \delta^{(k)} = \sum_k c_k \delta^{(k)}$$

atteso che $\sum_{i+j=k} a_i b_j$ è il coefficiente c_k di s^k nel polinomio $c(s)$.

Esempio 5.3.5 [Importante!] Si consideri l'operatore differenziale in $\mathcal{D}'_R$ definito da

$$\mathcal{A} : \mathcal{D}'_R \to \mathcal{D}'_R : \Gamma \mapsto \sum_{j=1}^{n} a_j \Gamma^{(j)} \tag{5.17}$$

Poiché risulta, per ogni j

$$\Gamma^{(j)} = (\delta \star \Gamma)^{(j)} = \delta^{(j)} \star \Gamma, \tag{5.18}$$

sostituendo (5.18) in (5.17) si ottiene

$$\mathcal{A} : \Gamma \mapsto \left(\sum_{j=1}^{n} a_j \delta^{(j)} \right) \star \Gamma \tag{5.19}$$

ossia l'operatore differenziale $\mathcal{A}$ è l'operatore di convoluzione con la distribuzione $\sum_j a_j \delta^{(j)}$.

Proposizione 5.3.8 [CONVOLUZIONE E REGOLARIZZAZIONE] *La convoluzione fra una distribuzione $\Gamma \in \mathcal{D}'_R$ e (la distribuzione associata a) una funzione liscia $\psi \in \mathcal{D}$ è una distribuzione regolare $\Gamma_h \in \mathcal{D}'_R$, ed h è indefinitamente derivabile come funzione.*
h viene detta la "regolarizzazione di Γ mediante ψ".

- ESERCIZIO 5.3.2 La convoluzione fra una distribuzione del tipo $\sum_{j=0}^{m} b_j \delta^{(j)},\ m \neq 0$ e una funzione di classe C^r a supporto compatto a destra è, per $r \geq m$, la (distribuzione regolare corrispondente alla) derivata $(r-m)$-esima della funzione.

Proposizione 5.3.9 [CONVOLUZIONE E CONVERGENZA] *Se l'unione dei supporti delle distribuzioni $\Gamma_k,\ k = 1, 2, \ldots$ è contenuta in una semiretta $[\gamma, +\infty)$ e se $\Gamma_k \to \Gamma$, allora*

i) $\Gamma \in \mathcal{D}'_R$

ii) *per ogni $V \in \mathcal{D}'_R$ si ha $\Gamma_k \star V \to \Gamma \star V$.*

In particolare, se[8] *$\Gamma_k = \Gamma_{\psi_k}$, allora per ogni $V \in \mathcal{D}'_R$ si ha*

$$V = \delta \star V = \lim(\Gamma_{\psi_k} \star V)$$

Il significato della proposizione precedente è piuttosto trasparente: il comportamento di una distribuzione che agisce sullo spazio $\mathcal{D}$ delle funzioni di test può essere approssimato con precisione arbitrariamente buona da quello di una successione di funzioni standard, anzi, di funzioni lisce. Non è nemmeno difficile provare che tali funzioni[9] potrebbero essere sempre scelte in $\mathcal{D}$

5.4 Operatori di convoluzione e sistemi dinamici

Dopo questa abbuffata di distribuzioni, torniamo al problema di rappresentare le mappa ingresso/uscita continue, lineari, invarianti mediante una convoluzione, e al problema di risolvere un'equazione del tipo

$$p(D)y = q(D)u.$$

Come abbiamo visto, lo spazio delle distribuzioni $\mathcal{D}'_R$ contiene un sottospazio isomorfo a L^{loc}_R e le operazioni di derivazione e di convoluzione sono definite in $\mathcal{D}'_R$ in modo tale che, quando esse abbiano significato in L^{loc}_R, le distribuzioni ottenute in $\mathcal{D}'_R$ corrispondono alle funzioni ottenibili in L^{loc}_R.
I vantaggi ad operare in un ambiente più grande sono molteplici:
- esistono mappe ingresso/uscita che non possono essere espresse dalla convoluzione con un nucleo in L^{loc}_R, ma da uno in $\mathcal{D}'_R$;
- non è necessario, nella soluzione delle equazioni differenziali, preoccuparsi dell'esistenza di funzioni abbastanza lisce alle quali applicare gli operatori $p(D)$ e $q(D)$;

[8] come nell'esempio 5.2.7 del precedente paragrafo
[9] Si noti che $\Gamma_{\psi_k} \star V$ non è necessariamente a supporto compatto, se non è compatto il supporto di V e perciò, in generale, $\Gamma_{\psi_k} \star V$, pensata come funzione, non sta necessariamente in $\mathcal{D}$.

- la struttura dell'algebra di convoluzione $\mathcal{D}'_R$ consente di esprimere tali soluzioni in modo molto semplice ed efficace.

Definizione 5.4.1 *Un operatore $\mathcal{A}; \mathcal{D}'_R \to \mathcal{D}'_R$ è un operatore di convoluzione se esiste $H \in \mathcal{D}'_R$ tale che, per ogni $U \in \mathcal{D}'_R$, si ha*

$$\mathcal{A}(U) = H \star U \tag{5.20}$$

Ogni operatore di convoluzione in $\mathcal{D}'_R$

1. è lineare;

2. commuta con l'operatore di shift

$$\mathcal{A}(\sigma_\Delta U) = H \star (\sigma_\Delta U) = \sigma_\Delta (H \star U) = \sigma_\Delta(\mathcal{A}(U)) \tag{5.21}$$

3. è continuo, nel senso che, se $U_k \to U$, con $U_k,\ k = 1, 2, \ldots$ e U dotate di un supporto contenuto in una semiretta comune $[\gamma, +\infty)$, allora

$$\lim_k \mathcal{A}(U_k) = \lim_k (H \star U_k) = H \star U = \mathcal{A}(\lim_k U_k) \tag{5.22}$$

Il seguente teorema garantisce che, in termini distribuzionali e sotto ipotesi strutturali molto deboli (la continuità), ogni mappa ingresso/uscita lineare e invariante è descrivibile mediante un operatore di convoluzione.

Teorema 5.4.2 [Schwartz] *Ogni operatore $\mathcal{A}$ in $\mathcal{D}'_R$ che possiede le proprietà 1, 2 e 3 sopra enunciate è un operatore di convoluzione, ovvero esiste una distribuzione $H \in \mathcal{D}'_R$ tale che*

$$\mathcal{A}(U) = H \star U, \quad \forall U \in \mathcal{D}'_R$$

Se riconsideriamo in ambito distribuzionale i problemi accennati nel paragrafo 3.3, vediamo subito che

(i) poiché $\mathcal{D}'_R$ non ha divisori dello zero, per ogni nucleo $H \neq 0$ l'equazione

$$H \star U = 0 \tag{5.23}$$

ammette come unica soluzione $U = 0$.
In altre parole, anche ampliando i nuclei degli operatori di convoluzione a tutto $\mathcal{D}'_R$ e consentendo ad U di descrivere lo spazio $\mathcal{D}'_R$ (anziché solo L^{loc}_R), non è possibile trovare una mappa ingresso uscita continua lineare e invariante che dia uscita nulla in corrispondenza a un ingresso non nullo (se si eccettua, ovviamente, la mappa identicamente nulla).

ii) l'identificazione del nucleo è possibile con un ingresso impulsivo $U = \delta$, ha momento che δ risolve l'equazione in U

$$H \star U = H \tag{5.24}$$

Si noti che, per la proposizione 5.3.9, risulta

$$H = H \star \delta = \lim_k (H \star \Gamma_{\psi_k}) \tag{5.25}$$

dove $\{\psi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ è una successione di funzioni di test del tipo considerato nell'esempio 5.2.7, e quindi H è il limite (eventualmente distribuzionale) delle uscite corrispondenti agli ingressi ψ_k.

iii) se $H = \delta$, l'uscita $\delta \star U$ coincide sempre con l'ingresso U, $\forall U \in \mathcal{D}'_R$.
Quindi δ realizza la mappa identità (e la successione Γ_{ψ_k} la approssima).

Generalizzando la discussione del punto (ii), siamo naturalmente indotti a introdurre le equazioni di convoluzione.
Nel caso più semplice, si suppongono assegnate in $\mathcal{D}'_{\mathcal{R}}$ due distribuzioni H e V e si considera l'equazione

$$H \star X = V \tag{5.26}$$

nella distribuzione incognita X. Per quanto riguarda la soluzione del problema, sottolineiamo i fatti seguenti.

a) Se H ammette un'inversa convoluzionale[10], ovvero se esiste $H^{-1} \in \mathcal{D}'_R$ tale che $H \star H^{-1} = \delta$ (= l'identità di $\mathcal{D}'_R$) allora

$$\bar{X} = H^{-1} \star V \tag{5.27}$$

risolve la (5.26), perché

$$H \star (H^{-1} \star V) = (H \star H^{-1} \star V = \delta \star V = V$$

ed è l'unica soluzione. Infatti, l'esistenza di un'altra soluzione $\tilde{X} \neq \bar{X}$ comporterebbe l'eguaglianza $H \star (\bar{X} - \tilde{X}) = 0$, un assurdo perché in $\mathcal{D}'_R$ non esistono divisori dello zero.

b) Si equivalgono le seguenti proprietà:

1. H ha inversa convoluzionale;

2. (5.26) è risolubile in X qualunque sia $V \in \mathcal{D}'_R$;

3. (5.26) è risolubile in X quando $V = \delta$.

È chiaro infatti che, se vale (1), la (5.27) fornisce la soluzione qualunque sia V. Se (5.26) è risolubile per ogni V, lo è per $V = \delta$. Infine, (5.26) è risolubile per $V = \delta$. la soluzione è l'inversa di H.

[10] ciò implica necessariamente $H \neq 0$

c) Se H non è invertibile, la (5.26) è risolubile solo per alcuni valori di V (i.e. per tutti e soli i valori di V che appartengono all'immagine dell'operatore $\mathcal{A} : X \mapsto H \star X$). In ogni caso, la soluzione in $\mathcal{D}'_R$, quando esiste, è unica.

Esempio 5.4.1 Se $H = \Gamma_\psi$ è una funzione di test, allora per ogni $X \in \mathcal{D}'_R$ la distribuzione $\Gamma_\psi \star X$ è una funzione liscia, per il teorema di regolarizzazione 5.3.8. Quindi l'equazione

$$\Gamma_\psi \star X = V \tag{5.28}$$

non è risolubile se V non è (la distribuzione regolare corrispondente a) una funzione liscia, e Γ_ψ non ammette un'inversa convoluzionale.

Proposizione 5.4.3 [Inversa convoluzionale e nucleo di Green] *La distribuzione*

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \delta^{(k)}, \ a_n = 1,$$

ha per inversa convoluzionale in $\mathcal{D}'_R$ il nucleo di Green[11] *$\delta^{(-1)}h$, associato all'equazione omogenea*

$$p(D)y = \sum_{k=0}^{n} a_k D^k y = 0.$$

Prova Tenuto conto della regola di convoluzione con $\delta^{(k)}$, si ha

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \delta^{(k)} \star (\delta^{(-1)}h) = \sum_{k=0}^{n} a_k (\delta^{(-1)}h)^{(k)}. \tag{5.29}$$

Dall'esempio 5.2.5 segue, per $k = 0, 1, \dots, n-1$,

$$(\delta^{(-1)}h)^{(k)}(t) = h^{(k)}(t)\delta^{(-1)} + \sum_{j=0}^{k-1} h^{(k-j-1)}(0)\delta^{(j)} = h^{(k)}(t)\delta^{(-1)} \tag{5.30}$$

perché $h(0) = h^{(1)}(0) = \ldots = h^{(n-2)}(0) = 0$, mentre per $k = n$ si ha invece

$$(\delta^{(-1)}h)^{(n)}(t) = h^{(n)}(t)\delta^{(-1)} + \delta, \tag{5.31}$$

perché $h^{(n-1)}(0) = 1$.
Sostituendo nel secondo membro di (5.29) le (5.30) e la (5.31), si ricava infine

$$\sum_{k=0}^{n} a_k (\delta^{(-1)}h)^{(k)} = \delta + \left[\sum_{k=0}^{n} a_k h^{(k)}(t) \right] \delta^{(-1)} = \delta, \tag{5.32}$$

perché $h(\cdot)$ è soluzione dell'equazione $\sum_{k=0}^{n} a_k D^k y = 0$. Ciò prova che le distribuzioni $(\delta^{(-1)}h)$ e $\sum_{k=0}^{n} a_k \delta^{(k)}$ sono inverse convoluzionali l'una dell'altra. ■

[11] si veda il paragrafo 4.7

Sulla base della precedente proposizione, è immediata ora la determinazione di una soluzione, in ambito distribuzionale, dell'equazione differenziale

$$p(D)Y = q(D)U, \tag{5.33}$$

dove

U è un'assegnata distribuzione ("l'ingresso") in $\mathcal{D}'_R$,

$p(D) = \sum_{i=0}^n a_i D^i$, $a_n = 1$ e $q(D) = \sum_{j=0}^m b_j D^j$ sono operatori di derivazione,

Y è una distribuzione incognita in $\mathcal{D}'_R$.

Basterà riscrivere l'equazione in termini convoluzionali, ricordando che $D^\nu \Gamma = \delta^{(\nu)} \star \Gamma$:

$$\sum_{i=0}^n a_i \delta^{(i)} \star Y = \sum_{j=0}^m b_j \delta^{(j)} \star U \tag{5.34}$$

e convolvere entrambi i membri di (5.34) con il nucleo di Green associato a $p(D)$.
Si ottiene la soluzione

$$Y_f = \delta^{(-1)} h \star \left(\sum_{j=0}^m b_j \delta^{(j)} \star U \right). \tag{5.35}$$

Si noti che, nel caso in cui $\sum_{j=0}^m b_j \delta^{(j)} \star U$ sia una distribuzione regolare Γ_v, la soluzione fornita da (5.35) corrisponde alla funzione

$$(\delta^{(-1)} h \star v)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\delta^{(-1)} h)(t-\tau) v(\tau) d\tau \tag{5.36}$$

che, come si è visto, risolve l'equazione differenziale $p(D)y = v$ con condizioni iniziali nulle in $t_0 < \operatorname{supp} v$.

È naturale chiedersi, a questo punto, se l'equazione (5.33) ammette in ambito distribuzionale un'unica soluzione, ovvero la (5.35).
Il fatto che l'equazione convoluzionale (5.34) abbia in $\mathcal{D}'_R$ la (5.35) come unica soluzione non implica affatto che la (5.33) abbia in $\mathcal{D}'$ una sola soluzione. In altre parole, possono esistere altre distribuzioni che risolvono la (5.33) e alle quali non si applica la (5.34) perché il loro supporto non è compatto a sinistra. E ciò è quanto succede, dal momento che ogni soluzione non nulla dell'equazione $p(D)y = 0$ ha supporto illimitato in entrambi i versi dell'asse reale (e quindi non è una distribuzione di $\mathcal{D}'_R$), ma può essere aggiunto alla (5.35) fornendo una soluzione di (5.33).
Si può anche provare, ma non insisteremo su ciò, che le soluzioni di $p(D)y = 0$ ottenibili in $L^{]rmloc}$ (nel fatto, in C^∞) sono anche tutte quelle ottenibili in $\mathcal{D}'$, ovvero l'equazione omogenea distribuzionale ha soltanto soluzioni regolari.
La soluzione generale di (5.33) quando $U \in \mathcal{D}'_R$ è allora data da

$$Y_f + y_{\text{hom}},$$

dove y_{hom} è un'arbitraria soluzione dell'equazione $p(D)y = 0$. Y_f sarà detta la "risposta forzata" corrispondente all'ingresso U.

Concludiamo questo paragrafo accennando agli operatori convoluzionali che inducono ritardi finiti nelle mappe ingresso/uscita. Il più semplice è costuito dalla distribuzione $\sigma_{-\Delta}\delta, dove \Delta$ è un arbitrario numero reale non negativo. Per ogni distribuzione $U \in \mathcal{D}'_R$ e per ogni $\phi \in \mathcal{D}$ si ha

$$\begin{aligned}\langle \sigma_{-\Delta}\delta \star U, \phi\rangle &= \langle U, \langle \sigma_{-\Delta}\delta, \phi(t+\cdot)\rangle\rangle = \langle U, \langle \delta, \sigma_{\Delta}\phi(t+\cdot)\rangle\rangle \\ &= \langle U, \langle \delta, \phi(t+\Delta+\cdot)\rangle\rangle = \langle U, \phi(t+\Delta)\rangle = \langle U, \sigma_{\Delta}\phi\rangle = \langle \sigma_{-\Delta}U, \phi\rangle\end{aligned}$$

e quindi

$$\sigma_{-\Delta}\delta \star U = \sigma_{-\Delta}U \tag{5.37}$$

È quindi chiaro che l'operatore convoluzionale $\sigma_{-\Delta}\delta$ determina una mappa ingresso/uscita in cui l'uscita è uguale all'ingresso ritardato di Δ.
Non è difficile verificare anche la

$$\sigma_{-\Delta}\delta^{(m)} \star U = \sigma_{-\Delta}U^{(m)}, \ \forall m > 0 \tag{5.38}$$

per cui l'operatore $\sigma_{-\Delta}\delta^{(m)}$ induce un'uscita che è la derivata m-esima dell'ingresso ritardato di Δ.
Più in generale, allora, un operatore del tipo $\sum_{i=0}^{m} b_i\sigma_{-\Delta_i}\delta^{(i)}$ trasforma l'ingresso U in un'uscita

$$\sum_{i=0}^{m} b_i\sigma_{-\Delta_i}\delta^{(i)} \star U = \sum_{i=0}^{m} b_i\sigma_{-\Delta_i}U^{(i)}$$

che è la combinazione lineare delle derivate di ordine $0, 1, \ldots, m$ di U, ritardate rispettivamente di $\Delta_0, \Delta_1, \ldots, \Delta_m$.

5.5 Risposta impulsiva del sistema $p(D)y = q(D)u$

Ritorniamo a considerare la risposta forzata (5.35) del paragrafo 5.4. Applicando le proprietà associativa e commutativa della convoluzione in $\mathcal{D}'_R$, si ha allora

$$\begin{aligned}Y_f &= \delta^{(-1)}h \star \left(\sum_{k=0}^{m} b_k\delta^{(k)} \star U\right) = \sum_{k=0}^{m} b_k\left(\delta^{(k)} \star \delta^{(-1)}h\right) \star U \\ &= \sum_{k=0}^{m} b_k(\delta^{(-1)}h)^{(k)} \star U = \sum_{k=0}^{m}\left\{\sum_{j=0}^{k-1} h^{(k-1-j)}(0)\delta^{(j)} + h^{(k)}(\cdot)\delta^{(-1)}(\cdot)\right\} \star U \\ &= \underbrace{\sum_{k=0}^{m} b_k h^{(k)}(\cdot)\delta^{(-1)}(\cdot)}_{\text{parte funzionale}} \star U + \underbrace{\sum_{j=0}^{m-1}\delta^{(j)}\sum_{k=j+1}^{m} b_k h^{(k-j-1)}(0)}_{\text{parte impulsiva}} \star U\end{aligned} \tag{5.39}$$

Di particolare interesse è il caso in cui l'ingresso U sia un impulso di Dirac. Allora la soluzione in $\mathcal{D}'_R$ dell'equazione differenziale è detta "risposta impulsiva" ed è la distribuzione

$$W = \sum_{k=0}^{m} b_k\left\{\sum_{j=0}^{k-1} h^{(k-j-1)}(0)\delta^{(j)} + h^{(k)}(\cdot)\delta^{(-1)}(\cdot)\right\}. \tag{5.40}$$

La risposta forzata a un ingresso generico U in $\mathcal{D}'_R$ è data da

$$Y_f = W \star U \tag{5.41}$$

Osservazione Se il grado n dell'operatore differenziale $p(D)$ al quale è associato il nucleo di Green $\delta(-1)h$ è maggiore del grado m dell'operatore $q(D)$, nella (5.40) l'ordine di derivazione $k-j-1$, che raggiunge al massimo il valore $m-1$, risulta minore di $n-1$. Allora tutti i termini $h^{(k-j-1)}(0)$ sono nulli e W si riduce alla funzione

$$w(\cdot) = \sum_{k=0}^{m} b_k h^{(k)}(\cdot)\delta^{(-1)}(\cdot).$$

Se $m = n$, tenuto conto che $h^{(n-1)}(0) = 1$ si ottiene invece

$$W = \sum_{k=0}^{n} b_k h^{(k)}(\cdot)\delta^{(-1)}(\cdot) + b_n\delta \tag{5.42}$$

In entrambi i casi, se U è una funzione , l'uscita forzata (5.41) è pure essa una funzione

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} \left[\sum_{k=0}^{m} b_k h^{(k)}(t-\tau)\right] u(\tau)d\tau + b_n u(t), \tag{5.43}$$

nella quale $b_n = 0$ se $m < n$.

- Esercizio 5.5.1 Quale ingresso U in $\mathcal{D}'_R$ si deve applicare al sistema $p(D)y = q(D)u$ perché l'uscita sia il nucleo di Green dell'equazione $p(D)y = 0$?

  ♯ *Soluzione. Deve essere soddisfatta l'equazione*

  $$\sum_{i=0}^{n} a_i\delta^{(i)} \star h(\cdot)\delta^{(-1)}(\cdot) = \sum_{j=0}^{m} b_j\delta^{(j)} \star U. \; a_n = 1 \tag{5.44}$$

  D'altra parte, per la proposizione 5.4.3, il nucleo di Green di $p(D)$ è l'inversa convoluzionale di $\sum_{i=0}^{n} a_i\delta^{(i)}$, ovvero $\sum_{i=0}^{n} a_i\delta^{(i)} \star h(\cdot)\delta^{(-1)}(\cdot) = \delta$, e l'equazione (5.44) diventa

  $$\delta = \sum_{j=0}^{m} b_j\delta^{(j)} \star U$$

  Quindi la distribuzione U è l'inversa convoluzionale di $\sum_{j=1}^{m} b_j\delta^{(j)} = b_m\sum_{j=0}^{m}(b_j/b_m)\delta^{(j)}$, ossia U è b_m volte il nucleo di Green dell'operatore $q(D)/b_m$.
  In particolare, se $q(D) = 1$, ovvero se $\sum_{j=0}^{m} b_j\delta^{(j)} = \delta$, si ottiene $U = \delta$.

5.6 Complementi

5.6.1 Cancellazioni

Supponiamo che nell'equazione $p(D)y = d(D)u$ i polinomi $p(s)$ e $q(s)$ abbiano un fattore comune $c(s)$, di grado positivo k,

$$p(s) = \tilde{p}(s)c(s), \quad q(s) = \tilde{q}(s)c(s). \tag{5.45}$$

Se $U, Y \in \mathcal{D}'_R$ soddisfano l'equazione

$$p(D)Y = q(D)U \tag{5.46}$$

allora soddisfano anche l'equazione

$$\tilde{p}(D)Y = \tilde{q}(D)U \tag{5.47}$$

Infatti, se

$$\tilde{p}(s) = \sum_{i=0}^{n-k} \tilde{a}_i s^i, \quad \tilde{q}(s) = \sum_{i=0}^{m-k} \tilde{b}_i s^i, \quad c(s) = \sum_{i=0}^{k} c_i s^i,$$

tenendo conto dell'esempio 5.3.4 (5.46) si riscrive come

$$\sum_{i=0}^{n-k} \tilde{a}_i \delta^{(i)} \star \sum_{i=0}^{k} c_i \delta^{(i)} \star Y = \sum_{i=0}^{m-k} \tilde{b}_i \delta^{(i)} \star \sum_{i=0}^{k} c_i \delta^{(i)} \star U$$

ovvero come

$$\left[\sum_{i=0}^{n-k} \tilde{a}_i \delta^{(i)} \star Y - \sum_{i=0}^{m-k} \tilde{b}_i \delta^{(i)} \star U \right] \star \sum_{i=0}^{k} c_i \delta^{(i)} = 0. \tag{5.48}$$

Poiché in $\mathcal{D}'_R$ non ci sono divisori dello zero e $\sum_{i=0}^{k} c_i \delta^{(i)} \neq 0$, si deve concludere che

$$\sum_{i=0}^{n-k} \tilde{a}_i \delta^{(i)} \star Y = \sum_{i=0}^{m-k} \tilde{b}_i \delta^{(i)} \star U$$

ovvero che U e Y soddisfano (5.47).

Il risultato appena ottenuto NON implica che, sa valgono le (5.45), TUTTE le soluzioni di (5.46) sono anche soluzioni di (5.47), se si mantiene l'ipotesi che U sia un elemento di $\mathcal{D}'_R$, ma non quella che Y sia in $\mathcal{D}'_R$. Fissata la distribuzione d'ingresso U, infatti, la soluzione distribuzionale generale di (5.46) si ottiene infatti sommando alla soluzione in $\mathcal{D}'_R$ (cioè alla risposta forzata, la soluzione in $\mathcal{D}'_R$ della (5.46) e della (5.47)) un'arbitraria soluzione dell'equazione omogenea $p(D)y = 0$. Per la soluzione generale di (5.47), invece, si sommano alla risposta forzata le soluzioni di $\tilde{p}(D)y = 0$, che sono un sottoinsieme proprio di quelle di $p(D)y = 0$. In altre parole, la cancellazione del fattore $c(D)$ non è rilevante solo nel calcolo della risposta forzata.

Esempio 5.5.1 Si determini la soluzione generale dell'equazione

$$D^2 y + 2Dy + y = Du + u \tag{5.49}$$

con

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ t^2 & \text{per } t \geq 0 \end{cases}$$

Risulta $p(D) = D^2 + 2D + 1$, $q(D) = D + 1$, quindi si cancella il fattore $s + 1$ fra i polinomi $p(s) = (s + 1)^2$ e $q(s) = s + 1$ e si calcola la risposta forzata relativa all'equazione $Dy + y = u$.
Il nucleo di Green dell'equazione $(D + 1)y = 0$ è $h(t) = e^{-t}\delta^{(-1)}(t)$ e la risposta forzata è

$$y_f(t) = \int_{-\infty}^{t} h(t - \tau)u(\tau)d\tau = \int_0^t e^{-(t-\tau)}\tau^2 \mathbb{D}\tau,$$

ovviamente nulla per tempi negativi.
La soluzione generale dell'equazione (5.49) si ottiene aggiungendo a $y_y(\cdot)$ le funzioni di $\mathcal{N}(p(D)) = \mathcal{N}((D + 1)^2) = \text{span}\{e^{-t}, te^{-t}\}$ che, eccetto la funzione nulla, hanno per supporto $(-\infty, +\infty)$ e quindi non sono elementi di $\mathcal{D}'_R$.

5.6.2 Generazione impulsiva della risposta libera per tempi positivi

Se $y_{\text{hom}}(\cdot)$ è la soluzione dell'equazione omogenea $p(D)y = 0$ corrispondente a condizioni iniziali

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y^{(1)}(0) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(0) \end{bmatrix} := \mathbf{x}$$

la sua restrizione $\delta^{(-1)} y_{\text{hom}}$ al semiasse positivo può essere ottenuta come risposta in $\mathcal{D}'_R$ del sistema $P(D)y = v$, in corrispondenza a un opportuno ingresso distribuzionale costituito da impulsi di diverso ordine nell'origine.
Di conseguenza, si può ottenere l'uscita in $\mathcal{D}'_R$ corrispondente a
- un assegnato ingresso $v(\cdot)$ avente supporto in $[0, +\infty)$,
- assegnate condizioni in $t = 0$ sull'uscita e sulle sue derivate,
risolvendo l'equazione

$$p(D)y = v + \Gamma$$

dove Γ è una somma di impulsi nell'origine, che modifica l'ingresso v senza peraltro estenderne il supporto a tempi negativi.

Per verificare quanto affermato, esprimiamo la soluzione y_{hom} dell'equazione omogenea nella forma

$$y_{\text{hom}} = \sum_{k=0}^{n_1} \beta_k h^{(k)} \tag{5.50}$$

e la sua proiezione sul semiasse positivo nella forma

$$\delta^{(-1)} y_{\text{hom}} = \sum_{k=0}^{n_1} \beta_k (\delta^{(-1)} h^{(k)}) \tag{5.51}$$

Ricordiamo ora, dalla (5.5) ottenuta nell'esempio 5.2.5 , che la funzione $\delta^{(-1)} h^{(k)}$ si può esprimere nella forma

$$h^{(k)}(\cdot)\delta^{(-1)}(\cdot) = \Big(h(\cdot)\delta^{(-1)}(\cdot)\Big)^{(k)} - h^{(k-1)}(0)\delta - h^{(k-2)}(0)\delta^{(1)} - \ldots - h(0)\delta^{(k-1)}$$

e, dalla definizione di $h(\cdot)$, che sono nulli $h(0), h^{(1)}(0), \ldots, h^{(n-2)}(0)$. Allora la (5.51) si può riscrivere come

$$(\delta^{(-1)} y_{\text{hom}})(\cdot) = \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k \Big(h(\cdot)\delta^{(-1)}(\cdot)\Big)^{(k)} = \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k \Big(h\delta^{(-1)} \star \delta^{(k)}\Big) \tag{5.52}$$

e l'uscita sul semiasse positivo è data da

$$y_f + \delta^{(-1)} y_{\text{hom}} = \Big(\delta^{(-1)} h \star v\Big) + \Big(\delta^{(-1)} h \star \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k \delta^{(k)}\Big) = \delta^{(-1)} h \star \Big(v + \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k \delta^{(k)}\Big) \tag{5.53}$$

Infine, il vettore $\mathbf{b};= [\,\beta_0 \quad \beta_1 \quad \cdots \quad \beta_{n-1}\,]^T$ dei combinatori utilizzati in (5.50) è legato al vettore $\mathbf{x}$ della condizioni iniziali dalla relazione (si veda il par. 4.7)

$$\mathbf{b} = \mathcal{R}^{-1}\mathbf{x}$$

con

$$\mathcal{R} = [\,\mathbf{e}_n \quad F\mathbf{e}_n \quad \ldots \quad F^{n-1}\mathbf{e}_n\,], \quad \mathbf{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ -a_0 & -a_1 & a & \ldots & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

La (5.53) si riscrive allora nella forma compatta

$$y_f + \delta^{(-1)} y_{\text{hom}} = \delta^{(-1)} h \star [\,\delta^{-1} \quad \delta \quad \delta^{(1)} \quad \ldots \quad \delta^{(n-1)}\,] \begin{bmatrix} v \\ \\ \mathcal{R}^{-1}\mathbf{x} \\ \\ \end{bmatrix} \tag{5.54}$$

Il risultato fornito dalla (5.53) ha un carattere essenzialmente formale: anziché calcolare separatamente il termine y_f mediante una convoluzione e il termine $y_{\text{hom}}\delta^{(-1)}$ risolvendo l'equazione omogenea inizializzata da $\mathbf{x}$, si possono ottenere entrambi mediante un'operazione di convoluzione con il nucleo di Green. Ciò consente di utilizzare lo stesso operatore di convoluzione per descrivere l'uscita indotta in $[, +\infty)$ a partire da condizioni iniziali non nulle.

5.7 Riferimenti bibliografici

- A. Zemanian "Distribution theory and transform analysis" McGraw-Hill 1965, ripubblicato da Dover nel 1981

- G.Folland "Fourier analysis and its applications", Wadsworth & Brooks/Cole 1992 [pp 303 e segg.]

- L.Schwartz "Théorie des distributions" Hermann, 1966 [alquanto più difficile dei precedenti]