Capitolo 6

Applicazioni della trasformata di Laplace di funzioni e distribuzioni

6.1 Trasformata di funzioni e distribuzioni con supporto in $[0, +\infty)$

6.1.1 Trasformata delle funzioni

Se la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ soddisfa le condizioni

A1) $f(t) = 0, \ \forall t < 0$

A2) $f(t)e^{-ct}$ è assolutamente integrabile su $(-\infty, +\infty)$ per qualche $c \in \mathbb{R}$

allora, per ogni $s \in \mathbb{C}$ con $\Re\mathrm{e}\, s \geq c$ è definita la funzione

$$\mathcal{L}f := F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

che viene chiamata la trasformata di Laplace (unilatera, o destra) di $f(t)$.
L'estremo inferiore $\sigma_a(f)$ dei valori c per i quali vale la (A2) si chiama "ascissa di convergenza assoluta" della trasformata di f e il semipiano

$$\{s \in \mathbb{C} \ : \ \Re\mathrm{e}\, s > \sigma_a(f)\}$$

è il semipiano (o la regione) di convergenza assoluta della trasformata di f.

Richiamiamo alcuni fatti noti da corsi precedenti.

Lf1. [Trasformata di Fourier/trasformata di Laplace] Sia $\sigma > \sigma_a(f)$. Per ogni numero complesso $s = \sigma + j\omega$, la trasformata di Fourier della funzione $g(t) = f(t)e^{-\sigma t}$, $(\mathcal{F}g)(\omega)$ e la trasformata di Laplace di $f(t)$ soddisfano

$$(\mathcal{F}g)(\omega) = F(\sigma + j\omega) = (\mathcal{L}f)(s) \tag{6.1}$$

Lf2. [Linearità] La trasformata di Laplace è lineare, nel senso che, se $\sigma_a(f)$ e $\sigma_a(g)$ sono le ascisse di convergenza assoluta di f e g, allora

$$\mathcal{L}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathcal{L} f + \beta \mathcal{L} g \tag{6.2}$$

nel semipiano $\{s \in \mathbb{C} : \Re\mathrm{e}\, s > \max(\sigma_a(f), \sigma_a(g))\}$.

Lf3. [Analiticità] Se f soddisfa le condizioni (A1) e (A2), allora nel semipiano di convergenza assoluta la sua trasformata $F(s)$ è analitica e ha derivate espresse da

$$F^{(k)}(s) = \int_0^{+\infty} (-t)^k f(t) e^{-st} dt \tag{6.3}$$

Lf4. [Inversione] Se $f(t)$ soddisfa (A1) e (A2) ed è di classe C^1 su un intervallo (a, b), per ogni $t \in (a, b)$ e ogni $c > \sigma_a(f)$ dalla trasformata $F(s)$ si ricava $f(t)$ con la formula

$$f(t) = \lim_{y \to \infty} \frac{1}{2\pi j} \int_{c-jy}^{c+jy} F(s) e^{st} ds = \mathcal{L}^{-1}(F(s)) \tag{6.4}$$

e quindi con un cammino di integrazione sulla retta $c + j\omega,\ \omega \in \mathbb{R}$.

Lf5. [identità] Se f e g soddisfano le condizioni del punto precedente e se $F(s) = G(s)$ su una retta $c + \jmath\omega$ appartenente al semipiano comune di convergenza assoluta, allora si ha $f(t) = g(t), \forall t \in (a, b)$.

Lf6. [Condizione perché $F(s)$ sia una trasformata di Laplace] Se in $\Re\mathrm{e}\, s > a$ la funzione $F(s)$ è analitica e soddisfa $|F(s)| < c/|s|^2$, allora

a) $\mathcal{L}^{-1}(F(s))$ può essere calcolata lungo ogni retta verticale in $\Re\mathrm{e}\, s > a$ e la funzione $f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s))$ così ottenuta ha le seguenti proprietà:

b1) è continua per ogni t,

b2) è nulla per $t < 0$,

b3) $\mathcal{L} f = F(s)$ almeno per $\Re\mathrm{e}\, s > a$

Lf7. [Traslazione] Se f soddisfa (A1) e (A2), se[1] $\Delta \geq 0$ e se $F(s)$ è la trasformata di Laplace di f, allora $e^{-s\Delta} F(s)$ è la trasformata di Laplace della funzione traslata in ritardo $\sigma_{-\Delta} f$.

Lf8. [Cambiamento di scala] Sia $f_a(t) = f(at),\ a > 0$. Se $F(s)$ è la trasformata di f,

$$\mathcal{L} f_a = \frac{1}{a} F(\frac{s}{a}) \tag{6.5}$$

Lf9. [Trasformata della derivata di f] Se sono soddisfatte le seguenti condizioni

c1) $F(s) = \mathcal{L} f \quad$ per $\quad \Re\mathrm{e}\, s > \sigma_a$,

c2) $f(0_+)$ esiste finito,

[1] La condizione $\Delta \geq 0$ garantisce che $\sigma_{-\Delta} f$ soddisfi ancora la condizione (L1)

c3) $f^{(1)}(\cdot)$ soddisfa (L2),

allora

$$\mathcal{L}(f^{(1)}(t)) = \int_0^\infty f^{(1)}(t)e^{-st}dt = f(t)e^{-st}\Big|_{0_+}^{\infty} + \int_0^\infty se^{-st}f(t)dt = -f(0_+) + sF(s) \tag{6.6}$$

con ascissa minore o eguale a $\max(0, \sigma_a)$.

Lf9'. Sotto ipotesi analoghe a (Lf9)

$$\mathcal{L}(f^{(k)}(t)) = s^k F(s) - s^{k-1}f(0_+) - s^{k-2}f^{(1)}(0_+) - \ldots - f^{(k-1)}(0_+) \tag{6.7}$$

Lf10. [Trasformata della primitiva] Se f ha trasformata $F(s)$ con ascissa di convergenza assoluta $\sigma_a(f)$, allora

$$g(t) := \int_0^t f(\tau)d\tau$$

è Laplace trasformabile, con ascissa $\sigma_a(g) \le \max(0, \sigma_a(f))$ e si ha

$$\mathcal{L}(\int_0^t f(\tau)d\tau) = \frac{1}{s}F(s) \tag{6.8}$$

Per la dimostrazione delle proprietà sopra esposte, come per le analoghe proprietà riguardanti le distribuzioni, si può consultare [Ze].

6.1.2 Trasformata delle distribuzioni

Consideriamo ora le definizioni e le principali proprietà della trasformata di Laplace di una distribuzione in $\mathcal{D}'_+$, ossia di una distribuzione il cui supporto sia contenuto in $[0, +\infty)$

Supponiamo che Γ sia una distribuzione soddisfacente le condizioni

B1 Γ ha supporto contenuto in $[0, +\infty)$,

B2 esiste un numro reale $c$tale che $e^{-ct}\Gamma$ sia una distribuzione temperata.

Se $\lambda(t)$ è una funzione liscia, con supporto compatto a sinistra, e che assume il valore 1 in tutti i punti di un intorno del supporto di Γ, allora

- per $\Re\mathrm{e}\, s > c$ la funzione $\lambda(t)e^{-st}e^{ct}$ è una funzione rapidamente decrescente;
- $e^{-ct}\Gamma \in \mathcal{S}'$;
- Per $\Re\mathrm{e}\, s > c$ è definita

$$F(s) := \Big\langle \underbrace{e^{-ct}\Gamma}_{\text{distr.temperata}} \quad , \quad \underbrace{\lambda(t)e^{-(s-c)t}}_{\text{rap.decresc.}} \Big\rangle \tag{6.9}$$

- se $\sigma(\Gamma) := \inf\{c : \ e^{-ct}\Gamma \in \mathcal{S}'\}$, allora per ogn $c > \sigma(\Gamma)$ e per ogni $\lambda(\cdot)$ soddisfacente le condizioni sopra elencate, la funzione $F(s)$ è indipendente da c e da $\lambda(\cdot)$ ed è univocamente definita per $\Re\mathrm{e}\, s > \sigma(\Gamma)$.

Definizione 6.1.1 *La funzione $F(s)$ definita da (6.9) si dice la trasformata di Laplace della distribuzione Γ e si porrà, per brevità,*

$$F(s) = \langle \Gamma, e^{-st} \rangle = \mathcal{L}\Gamma \tag{6.10}$$

Conviene ricordare che se Γ_f è una distribuzione regolare assciata a una funzione f, le ascisse di convergenza $\sigma(\Gamma)$ e $\sigma_a(f)$ non sono necessariamente coincidenti [Ze].

Elenchiamo ora alcune proprietà fondamentali della Laplace trasformata delle distribuzioni.

Ld1. [LINEARITÀ] Se $\mathcal{L}\Gamma = F(s)$ per $\Re\mathrm{e}\, s > \sigma(\Gamma)$ e $\mathcal{L}\Theta = T(s)$ per $\Re\mathrm{e}\, s > \sigma(\Theta)$, allora per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ si ha

$$\mathcal{L}(\alpha\Gamma + \beta\Theta) = \alpha F(s) + \beta T(s) \qquad \text{per} \quad \Re\mathrm{e}\, s > \max\{\sigma(\Gamma), \sigma(\Theta)\} \tag{6.11}$$

Ld2. [IDENTITÀ] Se $\mathcal{L}\Gamma = \mathcal{L}\Theta$ su una retta $s = \sigma + \jmath\omega,\ \omega \in \mathbb{R}$, appartenente alla regione di convergenza, allora $\Gamma = \Theta$.

Ld3. [ANALITICITÀ] Per ogni distribuzione Γ La[lace trasformabile, la trasformata $F(s) = \mathcal{L}\Gamma$ è analitica nella regione di convergenza $\{s : \Re\mathrm{e}\, s > \sigma(\Gamma)\}$ e si ha[2]

$$\frac{(s)}{ds} = -\mathcal{L}(t\Gamma) \tag{6.12}$$

In generale, la analiticità prescinde dal punto all'infinito. Si veda, a conferma, il successivo esempio 6.1.2, nel quale $\delta^{(k)}$ ha per trasformata s^k, analitica in tutto il piano complesso eccetto il punto all'infinito, dove ha un polo. In molti casi poi (e sempre nel caso di funzioni razionali), $F(s)$ può essere prolungata in modo unico a una funzione meromorfa in tutto $\mathbb{C}$.

Esempio 6.1.1 La distribuzione δ soddisfa (B1) e (B2): ha supporto in $[0, +\infty)$ ed è temperata. Quindi in (6.9) si può scegliere per c qualsiasi valore, ovvero si ha $\sigma(\delta) = -\infty$.
Scegliendo $c = 0$ e $\lambda(t)$ di valore unitario in un intervallo aperto che include l'origine, otteniamo

$$\mathcal{L}\delta = \langle < e^{-ct}\delta, \lambda(t)e^{-st}e^{ct} \rangle = \langle \delta, \lambda(t)e^{-st} \rangle = 1, \quad \forall s \in \mathbb{C} \tag{6.13}$$

Esempio 6.1.2 La distribuzione $\delta^{(k)}$ soddisfa (B1) e (B2). Procedendo come nell'esempio precedente,

$$\mathcal{L}(\delta^{(k)}) = \langle \delta^{(k)}, \lambda(t)e^{-st} \rangle = (-1)^k \frac{\partial^k}{\partial t^k}[\lambda(t)e^{-st}]\bigg|_{t=0} = s^k, \quad \forall s \in \mathbb{C} \tag{6.14}$$

Esempio 6.1.3 si verifica che la distribuzione $\sigma_{-\Delta}\delta$ la Laplace trasformata

$$\mathcal{L}(\sigma_{-\Delta}\delta) = \langle \sigma_{-\Delta}\delta, \lambda(t)e^{-st} \rangle = e^{-s\Delta} \tag{6.15}$$

Esempio 6.1.4 Si ha altresì

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\sigma_{-\Delta}\delta^{(k)}) &= \langle \sigma_{-\Delta}\delta^{(k)}, \lambda(t)e^{-st} \rangle = \langle \delta^{(k)}, \lambda(t+\Delta)e^{-s(t+\Delta)} \rangle \\ &= (-1)^k \frac{\partial^k}{\partial t^k}[e^{-st}e^{-s\Delta}\lambda(t+\Delta)]\bigg|_{t=0} = s^k e^{-s\Delta} \end{aligned} \tag{6.16}$$

[2]La dimostrazione, non immediata, si può trovare in [Ze], pg 225

Ld4. [TRASFORMATA DELLA DERIVATA DI UNA DISTRIBUZIONE] Se $\Gamma \in \mathcal{D}'_{[0,\infty)}$ è trasformabile e se

$$F(s) = \mathcal{L}\Gamma = \langle e^{-ct}\Gamma,\ \lambda(t)e^{-st}e^{ct}\rangle \quad \text{per} \quad \Re\mathrm{e}\, s > \sigma(\Gamma)$$

allora $\Gamma^{(k)}$ è trasformabile e si ha

$$s^k F(s) = \mathcal{L}(\Gamma^{(k)}) \quad \text{per} \quad \Re\mathrm{e}\, s > \sigma(\Gamma) \tag{6.17}$$

PROVA DI (Ld4) Se $e^{-ct}\Gamma \in \mathcal{S}'$ allora appartiene a $\mathcal{S}'$ anche $\frac{d}{dt}(e^{-ct}\Gamma)$.
Quindi

$$e^{-ct}\,\Gamma^{(1)} = \frac{d}{dt}(e^{-ct}\Gamma) + ce^{-ct}\Gamma \quad \in \quad \mathcal{S}'$$

e per $\Re\mathrm{e}\, s > \sigma(\Gamma)$, tenuto conto che $\lambda(t)$ è costantemente unitaria in un intorno del supporto di Γ

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\Gamma^{(1)}) &= \langle e^{-ct}\Gamma^{(1)}, \lambda(t)e^{-st}e^{ct}\rangle = \langle \frac{d}{dt}(e^{-ct}\Gamma) + ce^{-ct}\Gamma, \lambda(t)e^{-st}e^{ct}\rangle \\
&= \langle e^{-ct}\Gamma,\ \lambda(t)se^{-st}e^{ct} - \lambda(t)ce^{-st}e^{ct}\rangle + \langle e^{-ct}\Gamma,\ c\lambda(t)e^{-st}e^{ct}\rangle \\
&= \langle e^{-ct}\Gamma,\ \lambda(t)se^{-st}e^{ct}\rangle = s\langle e^{-ct}\Gamma,\ \lambda(t)e^{-st}e^{ct}\rangle = sF(s) \qquad (6.18)
\end{aligned}$$

La formula è provata così per $k = 1$. Per $k > 1$ si procede per induzione ■

Osservazione Se f è una funzione ordinaria, soddisfacente le condizioni (A1) e (A2), esiste la sua trasformata di Laplace $\mathcal{L}f = F(s)$ per $\Re\mathrm{e}\, s > \sigma_a(f)$. D'altra parte, la distribuzione Γ_f associata a f soddisfa (B1) e (B2), quindi ammette una trasformata nel senso delle distribuzioni, e per $\Re\mathrm{e}\, s > \max\{\sigma(\Gamma_f), \sigma_a(f)\}$ la funzione $F(s)$ è la trasformata di f e di Γ_f.
Va notato che la funzione $f^{(1)}$, ottenuta derivando la funzione f sull'aperto $(0,+\infty)$ e completandone la definizione con valori nulli su $(-\infty, 0]$, induce una distribuzione regolare $\Gamma_{f^{(1)}}$ che in generale non coincide[3] con la derivata distribuzionale $(\Gamma_f)^{(1)}$ di Γ_f. Ad esempio, se $f^{(1)}$ è continua eccetto in 0 e se $f(0_+) \neq 0$, dall'esempio 5.2.2 segue

$$(\Gamma_f)^{(1)} = \Gamma_{f^{(1)}} + f(0_+)\delta$$

ovvero la derivata distribuzionale di Γ_f è somma della distribuzione regolare associata a $f^{(1)}$ e di una distribuzione singolare $f(0_+)\delta$.
La trasformata distribuzionale di $(\Gamma_f)^{(1)}$ si ottiene dalla trasformata ordinaria della funzione $f^{(1)}$, supposta derivabile in $(0,+\infty)$, aggiungendole la trasformata $f(0_+)$ della distribuzione singolare $\delta f(0_+)$:

$$\underbrace{[sF(s) - f()_+)]}_{\mathcal{L}(f^{(1)})} \; + \; \underbrace{f(0_+)}_{\mathcal{L}(\delta f(0_+))} \; = \; sF(s)$$

[3]ciò non riesce particolarmente strano quando si pensi che la definizione della distribuzione derivata prescinde dalla conoscenza della derivata della funzione

Ld5. [CONDIZIONE PERCHÉ $F(s)$ SIA TRASFORMATA DI UNA DISTRIBUZIONE] Condizione necessaria e sufficiente perché $F(s)$ sia la trasformata di una distribuzione in $\mathcal{D}'_+$ è che

i) sia analitica per $\Re\mathrm{e}\, s \geq c$, per qualche $c \in \mathbb{R}$

ii) soddisfi per ogni $s \in \mathbb{C}$, con $\Re\mathrm{e}\, s \geq c$,

$$|F(s)| \leq k|s|^N, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \ \exists k \in \mathbb{R}_+$$

- **Esempio 6.1.5** Si consideri la funzione

$$F(s) = \frac{s^3 + 2s + 1}{s^2 + 1}$$

con regione di analiticità $\Re\mathrm{e}\, s > 0$.
Ricordiamo che risulta $\mathcal{L}(\delta^{(-1)} \sin t) = \dfrac{1}{s^2+1}$ sia come trasformata della funzione che della distribuzione. Allora

$$F(s) = s^3 \frac{1}{s^2+1} + 2s\frac{1}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1}$$

è la trasformata (distribuzionale) di

$$\begin{aligned}
& (\delta^{(-1)} \sin t)^{(3)} + 2(\delta^{(-1)} \sin t)^{(1)} + \delta^{(-1)} \sin t \\
= \ & (\sin t)^{(3)} \delta^{(-1)} + (\sin t)^{(2)} \delta + (\sin t)^{(1)} \delta^{(1)} + (\sin t)(0_+)\delta^{(2)} \\
+ \ & 2(\sin t)^{(1)} \delta^{(-1)} + 2(\sin t)(0_+)\delta \\
+ \ & (\sin t)\delta^{(-1)} \\
= \ & [\cos t + \sin t]\delta^{(-1)} + \delta^{(1)}(t)
\end{aligned}$$

In alternativa, si può sviluppare $F(s)$ in frazioni parziali e procedere successivamente all'antitrasformazione.

Ld6. [CONVERGENZA] Se le distribuzioni Γ_i hanno tutte supporto contenuto in $[0, +\infty)$ ed esiste $c \in \mathbb{R}$ tale per cui

$$e^{-ct}\Gamma_i \to e^{-ct}\Gamma \qquad \text{in} \quad \mathcal{S}'$$

allora

$$F_i(s) := \mathcal{L}(\Gamma_i) \to F(s) := \mathcal{L}(\Gamma) \qquad \text{per} \quad \Re\mathrm{e}\, s > c \tag{6.19}$$

Il risultato seguente è di fondamentale importanza, perché consente di ridurre, nel dominio delle trasformate, l'operazione di convoluzione fra due distribuzioni (in particolare, fra due funzioni) alla moltiplicazione delle trasformate.

Ld7. [CONVOLUZIONE] Se le distribuzioni Γ e Θ in $\mathcal{D}'_+$ sono entrambe trasformabili secondo Laplace, con

$$\begin{aligned}
F(s) &= \mathcal{L}\Gamma \qquad && \text{per} \quad \Re\mathrm{e}\, s > \sigma(\Gamma) \\
T(s) &= \mathcal{L}\Theta \qquad && \text{per} \quad \Re\mathrm{e}\, s > \sigma(\Theta)
\end{aligned}$$

allora $\Gamma \star \Theta$ è Laplace trasformabile e si ha

$$F(s)T(s) = \mathcal{L}(\Gamma \star \Theta) \qquad \text{per} \quad \Re\mathrm{e}\, s > \max\{\sigma(\Gamma), \sigma(\Theta)\} \tag{6.20}$$

Esempio 6.1.6 Si consideri la distribuzione $\Gamma = \sum_{\nu=0}^{\infty} e^{\nu}\delta(t-\nu)$.

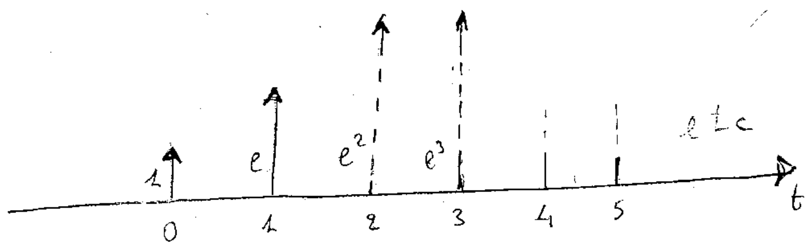

Figura 6.1.1

Poiché, prendendo $c = 1$ nella definizione, si ha

$$e^{-t}\Gamma = \sum_{\nu=0}^{\infty} \delta(t-\nu) \in \mathcal{S}' \cap \mathcal{D}'$$

la distribuzione Γ è trasformabile secondo Laplace e risulta

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\Gamma &= \langle e^{-t}\Gamma, \lambda(t)e^{-st}e^{t}\rangle = \langle \sum_{\nu=0}^{\infty} \delta(t-\nu), \lambda(t)e^{-st}e^{t}\rangle = \langle \sum_{\nu=0}^{\infty} \sigma_{-\nu}\delta, \lambda(t)e^{-st}e^{t}\rangle \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty} e^{-s\nu}e^{\nu} = \sum_{\nu=0}^{\infty} e^{-(s-1)\nu} \qquad \text{per} \quad \Re\mathrm{e}\, s > 1 \end{aligned}$$

Si consideri ora la convoluzione di Γ con se stessa. Si ha

$$\mathcal{L}(\Gamma \star \Gamma) = (\mathcal{L}\Gamma)(\mathcal{L}\Gamma) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu+1)e^{-\nu(s-1)}$$

(basta porre $x := e^{-(s-1)}$ ed eseguire il prodotto per serie). Antitrasformando, si ricava allora

$$\Gamma \star \Gamma = \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu+1)e^{\nu}\delta(t-\nu)$$

(si applichi il teorema di convergenza per dimostrare la liceità dell'inversione termine a termine).

6.2 Antitrasformata di funzioni razionali

Ogni funzione razionale a coefficienti complessi (in particolare, reali)

$$W(s) = \frac{\sum_{j=0}^{m} b_j s^j}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i} + \frac{q(s)}{p(s)}$$

ammette uno sviluppo in frazioni parziali sul campo complesso

$$W(s) = \sum_{h=1}^{H} \sum_{k=1}^{\nu_h} \frac{c_h k}{s-\alpha_h)^k} + r(s) \tag{6.21}$$

in cui

- $r(s)$ è un polinomio a coefficienti complessi (in particolare, reali), quoziente della divisione del numeratore per il denominatore di $W(s)$

- $\alpha_h,\ h = 1, 2, \ldots, H$ sono gli zeri distinti (sul campo complesso) del polinomio $p(s)$ e ν_h ne è la molteplicità

- se $p(s)$ e $q(s)$ hanno coefficienti reali, allora se $\alpha_{\bar h}$ è uno zero complesso di p(s), con molteplicità $\nu_{\bar h}$, anche $\breve\alpha_{\bar h}$ è uno zero complesso di p(s), con la medesima molteplicità e se $c_{\bar h k}$ è il numeratore corrispondente a $(s - \alpha_{\bar h})^k$, allora $\breve c_{\bar h k}$ è il numeratore corrispondente a $(s - \breve\alpha_{\bar h})^k$

Infine, se i polinomi $p(s)$ e $q(s)$ hanno coefficienti reali, allo sviluppo (6.21) sul campo complesso si può sostituire uno sviluppo sul campo reale del tipo

$$W(s) = \sum_{h=1}^{R}\sum_{k=1}^{\nu_h} \frac{c_h k}{s - \alpha_h)^k} \ + \ \sum_{h=1}^{C}\sum_{k=1}^{\mu_h} \frac{d_{hk} + s e_{hk}}{(s^2 + 2\delta_h\omega_{nh}s + \omega_{nh}^2)^k} \ + \ r(s) \tag{6.22}$$

Vogliamo verificare che ciascuno degli addendi che figurano in (6.22) è (in un opportuno semipiano $\Re\mathrm{e}\, s > \sigma_h$) la trasformata di una distribuzione impulsiva nell'origine o di (una combinazione dei) modi dell'operatore differenziale $p(D)$ associato al denominatore di $W(s)$, moltiplicata per il gradino unitario.

1) $r(s) = \rho_0 + \rho_1 s + \rho_2 s^2 + \ldots + \rho_{m-n}s^{m-n}$ è la trasformata della distribuzione

$$\rho_0\delta + \rho_1\delta^{(1)} + \rho_2 s\delta^{(2)} + \ldots + \rho_{m-n}\delta^{(m-n)}$$

2) Se $\alpha \in \mathbb{R}$, $\dfrac{1}{s-\alpha}$ è la trasformata della funzione $\delta^{(-1)}e^{\alpha t}$ nel semipiano $\Re\mathrm{e}\, s > \alpha$. La verifica è immediata dalla definizione:

$$\int_0^\infty e^{\alpha t}e^{-st}dt = \int_0^\infty e^{-(s-\alpha)t}dt = \frac{-1}{s-\alpha}e^{-(s-\alpha)t}\Big|_{t=0}^{t=\infty} = \frac{1}{s-\alpha}$$

La condizione $\Re\mathrm{e}\,(s-\alpha) < 0$ garantisce la convergenza dell'integrale.

3) La conclusione precedente vale anche per α complesso nel semipiano $\Re\mathrm{e}\, s > |\alpha|$. Se poniamo $\alpha = \omega_n(-\delta + j\sqrt{1-\delta^2})$ con $|\delta| < 1$, vediamo che

$$\frac{1}{2}[\frac{1}{s-\alpha} + \frac{1}{s-\breve\alpha}] \ = \ \frac{s - (\alpha+\breve\alpha)/2}{s^2 - (\alpha+\breve\alpha)s + \alpha\breve\alpha} \ = \ \frac{s + \delta\omega_n}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}$$

è la Laplace trasformata di

$$\delta^{(-1)}\Big(\frac{e^{\alpha t} - e^{-\alpha t}}{2j}\Big) \ = \ \delta^{(-1)}e^{-\delta\omega_n t}\frac{e^{j\omega} + e^{-j\omega}}{2} \ = \ \delta^{(-1)}e^{-\delta\omega_n t}\cos(\omega t) \tag{6.23}$$

dove si è posto, al solito,

$$\omega = \omega_n\sqrt{1-\delta^2}.$$

D'altra parte, la funzione razionale a coefficienti reali

$$\frac{1}{2j}[\frac{1}{s-\alpha} - \frac{1}{s-\breve\alpha}] \ = \ \frac{(\alpha-\breve\alpha)/2j}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{\omega}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}$$

è la trasformata di

$$\delta^{(-1)}\Big(\frac{e^{\alpha t}-e^{-\alpha t}}{2j}\Big)=\delta^{(-1)}e^{-\delta\omega_n t}\sin(\omega t) \tag{6.24}$$

Da quanto detto, è chiaro che ogni espressione del tipo $(d+es)/(s^2+2\delta\omega_n s+\omega_n^2)$ è la trasformata di una combinazione lineare delle funzioni (6.23) e (6.24).

4) La convoluzione

$$\delta(-1)e^{\alpha t}\,\star\,\delta^{(-1)}\frac{t^\nu}{\nu!}e^{\alpha t}$$

è la funzione

$$f(t)=\int_0^t e^{\alpha(t-\tau)}\frac{\tau^\nu}{\nu!}e^{\alpha\tau}d\tau=\int_0^t e^{\alpha t}\frac{\tau^\nu}{\nu!}d\tau=e^{\alpha t}\frac{1}{(\nu+1)!}\tau^{\nu+1}\Big|_0^t=\frac{t^{\nu+1}}{(\nu+1)!}e^{\alpha t}$$

Poiché $1/(s-\alpha)$ è la trasformata di $\delta^{(-1)}e^{\alpha t}$, se assumiamo induttivamente che $1/(s-\alpha)^\nu$ sia la trasformata di $\delta^{(-1)}\frac{t^{\nu-1}}{(\nu-1)!}e^{\alpha t}$, applicando il punto (Ld7) del paragrafo 6.1 si conclude che

$$\frac{1}{(s-\alpha)^{\nu+1}}=\mathcal{L}\left(\delta^{(-1)}\frac{t^\nu}{\nu!}e^{\alpha t}\right) \tag{6.25}$$

5) È un pò più laborioso, e non ci soffermiamo su questo punto, verificare che funzioni razionali del tipo

$$\frac{d+es}{(s^2+2\delta\omega_n s+\omega_n^2)^\nu}$$

siano trasformate secondo Laplace di opportune combinazioni dei 2ν modi oscillatori

$$\delta^{(-1)}e^{-\delta\omega_n t}t^h\sin(\omega t),\quad \delta^{(-1)}e^{-\delta\omega_n t}t^h\cos(\omega t),\qquad h=0,1,\dots,\nu-1$$

6.3 Equazioni differenziali lineari alle $\mathcal{L}$-trasformate

Osserviamo preliminarmente che se $f\in\mathcal{D}'_+$ ammette in $\mathcal{D}'_+$ una inversa convoluzionale g e entrambe le distribuzioni sono Laplace trasformabili, con trasformate $F(s)$ e $G(s)$ rispettivamente, allora

i) $G(s)=1/F(s)$.
Infatti $f\star g=\delta$ implica $F(s)G(s)=1$ per (Ld7) del paragrafo 6.1.

ii) Per ogni $v\in\mathcal{D}'_+$, trasformabile con trasformata $V(s)$, l'equazione convoluzionale

$$f\star g=v \tag{6.26}$$

è equivalente a

$$F(s)Y(s)=V(s) \tag{6.27}$$

nel senso che l'(unica) soluzione di (6.27)

$$\bar{Y}(s)=F^{-1}(s)V(s)=G(s)V(s) \tag{6.28}$$

è la trasformata dell'(unica) soluzione convoluzionale della (6.26) in $\mathcal{D}'_+$

$$\bar{y}=g\star v \tag{6.29}$$

Consideriamo ora l'equazione differenziale

$$P(D)y = (\sum_{i=0}^{n} a_i D^i)y = (\sum_{j=0}^{m} b_j D^j)u = q(D)u \tag{6.30}$$

con $a_n = 1$ e sotto l'ipotesi che $u \in \mathcal{D}'_+$ ammetta trasformata $U(s)$. Per determinare le soluzioni in $\mathcal{D}'_+$ possiamo riscrivere la (6.30) nella forma

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \delta^{(i)} \star y = \sum_{j=0}^{m} b_j \delta^{(j)} \star u \tag{6.31}$$

il cui secondo membro è ancora trasformabile, essendo la convoluzione di distribuzioni trasformabili, e ha trasformata $\sum_{j=0}^{m} b_j s^j U(s)$. La distribuzione $\sum_{i=0}^{n} a_i \delta(i)$ ha trasformata $\sum_{i=0}^{n} a_i s^i$ e la sua inversa convoluzionale è la funzione di Green $\delta^{(-1)}h$, pure essa trasformabile (si ricordi che h è combinazione lineare dei modi e che la restrizione ad $\mathbb{R}_+$ di ciascuno dei modi è trasformabile).
Allora, tenuto conto del punto (i), la funzione di Green ha trasformata $1/\sum_{i=0}^{n} a_i s^i$ e, per il punto (ii), l'equazione (6.31) equivale a

$$(\sum_{i=0}^{n} a_i s^i)Y(s) = (\sum_{j=0}^{m} b_j s^j)U(s).$$

Essa ha soluzione

$$Y_f(s) = \frac{\sum_{j=0}^{m} b_j s^j}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i} U(s), \tag{6.32}$$

trasformata dell'unica soluzione in $\mathcal{D}'_+$

$$y_f = \delta^{(-1)}h \star \sum_{j=0}^{m} b_j \delta^{(j)} \star u \tag{6.33}$$

In particolare, se $u = \delta$, la *risposta impulsiva*

$$w = \delta^{(-1)}h \star \sum_{j=0}^{m} b_j \delta^{(j)}$$

ha per trasformata

$$W(s) = \frac{\sum_{j=0}^{m} b_j s^j}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i} = \frac{p(s)}{q(s)} \tag{6.34}$$

Da (6.32) e (6.33) si trae la seguente conclusione

Proposizione 6.3.1 *per ogni ingresso $u \in \mathcal{D}'_+$ che sia trasformabile, la trasformata $Y_f(s)$ della corrispondente uscita forzata y_f è data dal prodotto*

$$Y_f(s) = W(s)U(s) \tag{6.35}$$

fra la trasformata $W(s)$ della risposta impulsiva del sistema e la trasformata $U(s)$ dell'ingresso applicato.

La funzione complessa di variabile complessa $W(s)$ definita da (6.34) si dice "funzione di trasferimento" del sistema descritto dalla equazione differenziale (6.30).

Definizione 6.3.2 *La funzione di trasferimento (6.34) si dice "propria" se il grado m del polinomio a numeratore è minore o uguale al grado n del polinomio a numeratore. Se $m < n$ la funzione di trasferimento si dice "strettamente propria".*

Come nel paragrafo 6.2, se $m > n$ si può applicare a $P(s)$ e a $q(s)$ l'algoritmo di divisione euclidea, ottenendo

$$q(s) = p(s)h(s) + r(s), \qquad \deg r < \deg p$$

e riscrivere $W(s)$ nella forma

$$W(s) = \frac{r(s)}{p(s)} + h(s) = \bar{W}(s) + h(s) \tag{6.36}$$

dove $\bar{W}(s)$ è strettamente propria e $h(s)$ è un polinomio di grado $m-n$. Se al sistemaviene applicato un ingresso impulsivo δ, la sua risposta impulsiva w comprende

- impulsi dei vari ordini $\gamma_0\delta + \gamma_1\delta^{(1)} + \ldots + \gamma_{m-n}\delta^{(m-n)}$ nell'origine se $m \geq n$;
- una funzione $\bar{w}$, la cui trasformata è $\bar{W}(s)$, della cui struttura si è discusso nel paragrafo 2.2.

Osservazione 1 La soluzione (6.35) non tiene conto dell'effetto di eventuali condizioni iniziali non nulle presenti prime dell'istante $t = 0$: la distribuzione y_f con supporto in $[0, +\infty)$ è la soluzione cui corrisponde la trasformata $Y_f(s)$ data dalla formula testé ottenuta. Si può inglobare nell'espressione l'effetto in $[0, +\infty)$ di eventuali condizioni iniziali non nulle presenti prima dell'istante $t = 0$, ponendo

$$\bar{\mathbf{x}} = \lim_{\epsilon \to)_-} \begin{bmatrix} y_{\text{hom}}(\epsilon) \\ y_{\text{hom}}^{(1)}(\epsilon) \\ \vdots \\ y_{\text{hom}}^{(n-1)}(\epsilon) \end{bmatrix}$$

e ricordando che l'evoluzione libera indotta da $\bar{\mathbf{x}}$ per $t \geq 0$ è

$$\delta^{(-1)} \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i h^{(i)}(\cdot),$$

con $[\,\beta_0 \quad \beta_1 \quad \ldots \quad \beta_{n-1}\,]^T = \mathcal{R}^{-1}\bar{\mathbf{x}}$ e con $\delta^{(-1)}h(\cdot)$ funzione di Green.
La Laplace-trasformata della funzione $\delta^{(-1)} \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i h^{(i)}(\cdot) = \sum_{i=0}^{n-1} [\delta^{(-1)} h^{(i)}(\cdot)]$ è data da

$$\frac{\sum_{i=0}^{n-1} \beta_i s^i}{p(s)} = \frac{[\,1 \quad s \quad \cdots \quad s^{n-1}\,]\,\mathcal{R}^{-1}\bar{\mathbf{x}}}{p(s)}$$

come si ricava applicando (Lf9') del paragrafo 6.1 e la condizione $h^{(i)}(0_+) = 0$ per $i = 0, 1, \ldots, n-2$.
L'uscita complessiva è allora espressa, alla Laplace trasformate, da

$$Y(s) = \frac{[\,1 \quad s \quad \cdots \quad s^{n-1}\,]\,\mathcal{R}^{-1}\bar{\mathbf{x}}}{p(s)} \; + \; W(s)U(s) \tag{6.37}$$

in cui l'antitrasformata del primo addendo non contiene impulsi per $t = 0$ perché il grado del numeratore è inferiore a quello del denominatore.

Osservazione 2 Gli eventuali fattori comuni fra $p(s)$ e $q(s)$ in (6.34) possono essere "cancellati" senza alterare il legame che il sistema realizza fra ingressi in $\mathcal{D}'_+$ e uscite in $\mathcal{D}'_+$. In altre parole, nel calcolo di $Y_f(s)$ mediante la (6.35) possiamo sempre supporre di avere $W(s)$ espressa in forma irriducibile. Si noti, peraltro, che in (6.37) il denominatore $p(s)$ utilizzato per esprimere la risposta libera deve essere effettivamente il polinomio associato all'operatore $p(D)$, e non un suo sottomultiplo o un suo multiplo.

La rappresentazione di una mappa ingresso uscita mediante una funzione di trasferimento, ovvero una funzione della variabile complessa s che, moltiplicata per la Laplace trasformata dell'ingresso, produce la Laplace trasformata dell'uscita, non è affatto ristretta al caso di sistemi descritti da equazioni differenziali del tipo $p(D)y = q(D)u$. In tutti i casi in cui il legame ingresso uscita in $\mathcal{D}'_+$ sia espresso nella forma

$$y_f = w \star u \tag{6.38}$$

con $w \in \mathcal{D}'_+$, se w ammette trasformata di Laplace $W(s)$ e se l'ingresso u è a sua volta Laplace trasformabile, con trasformata $U(s)$, da (6.38) si ricava

$$Y_f(s) = W(s)U(s) \tag{6.39}$$

e $W(s)$ sarà ancora detta la "funzione di trasferimento" del sistema.
Ad esempio, se w è un operatore di ritardo $\sigma_{-\Delta}\delta, \quad \Delta > 0$, si ha

$$W(s) = \mathcal{L}(\sigma_{-\Delta}\delta) = e^{-s\Delta}$$

e (6.39) diventa

$$Y_f(z) = e^{-s\Delta}U(s)$$

Salvo contrario avviso, ci riferiremo nel seguito a funzioni di trasferimento associate a sistemi del tipo $p(D)y = q(D)u$ e quindi a funzioni razionali della variabile complessa s. Ciò rende piuttosto agevole l'analisi: valgono i consueti teoremi di fattorizzazione, conseguenza del teorema fondamentale dell'Algebra, e le singolarità hanno tutte carattere polare e sono in numero finito.

6.4 Funzione di trasferimento e informazioni elementari sul sistema

Pur essendo possibile ottenere virtualmente ogni informazione sulla dinamica forzata di un sistema lineare studiando la sua funzione di trasferimento, esistono alcune informazioni che possono essere dedotte dalla funzione di trasferimento a costo "praticamente nullo", per pura ispezione o, al più, con operazioni algebriche molto semplici.

Molte informazioni di questa natura sono basate sui teoremi del valore iniziale e del valore finale di cui richiamiamo l'enunciato.

6.4.1 Teorema del valore iniziale

Teorema 6.4.1 DEL VALORE INIZIALE, PER FUNZIONI] *Supponiamo che*

1. *$f(\cdot)$ soddisfi le condizioni (A1) e (A2) del paragrafo 6.1,*
2. *per un opportuno numero complesso α ed un numero reale $\nu > -1$ esiste il limite*

$$\lim_{t \to 0_+} \frac{f(t)}{t^\nu} = \alpha \tag{6.40}$$

.

Allora, valutando $F(s)$ sull'asse reale, si ha

$$\lim_{\sigma \to +\infty} \sigma^{\nu+1} F(\sigma) = \gamma(\nu+1)\alpha \tag{6.41}$$

dove la funzione $\gamma : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ vale $\int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt, \ \forall x > 0.$ ■

Si noti che, nel teorema precedente, si ha

$$\gamma(1) = 1, \qquad \gamma(x+1) = x\gamma(x).$$

Se in (6.41) ν è un intero non negativo, si può porre allora $\gamma(\nu+1) = \nu!$ e da (6.40) e (6.41) si ricava la formula

$$\lim_{t \to 0_+} \frac{f(t)}{t^\nu} = \lim_{\sigma \to +\infty} \frac{\sigma^{\nu+1} F(\sigma)}{\nu!} \tag{6.42}$$

Come diretta applicazione di quanto detto, consideriamo il caso in cui $W(s)$ sia la funzione di trasferimento razionale e strettamente propria di un sistema lineare

$$W(s) = \frac{\sum_{i=0}^m b_i s^i}{\sum_{i=0}^n a_i s^i}. \quad n > m, \quad a_n = 1, b_m \neq 0 \tag{6.43}$$

In base a quanto abbiamo visto nel paragrafo 6.2, sappiamo qual è la struttura dell'antitrasformata w di $W(s)$: non essendo presenti termini impulsivi, essa è il troncamento per tempi non negativi di una combinazione lineare di funzioni trigonometriche e di esponenziali, eventualmente moltiplicati per potenze di t. Tale combinazione, non troncata, ammette uno sviluppo in serie di potenze di t, convergente su tutto $\mathbb{R}$:

$$w(t) = \delta^{(-1)} \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j t^j \tag{6.44}$$

e i limiti di $w(t)/t^\nu$ per $t \to 0_+$ si possono calcolare ricorrendo alla serie $\sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j t^j$ che per $t \geq 0$ rappresenta $w(\cdot)$.
È chiaro che per $\nu = 0$
$$\lim_{t\to 0_+} \frac{w(t)}{t^0} = \alpha_0$$
esiste sempre, è finito, ed è nullo se e solo se $\alpha_0 = 0$. Se si si verifica l'ultima eventualità, il limite
$$\lim_{t\to 0_+} \frac{w(t)}{t} = \alpha_1$$
è finito, ed è nullo se $\alpha_1 = 0$. Ripetendo il ragionamento, si conclude che, se risulta $\lim_{t\to 0_+} \frac{w(t)}{t^\nu} = 0$ per $\nu = 0, 1, \ldots, h$, allora esiste finito (ed eventualmente pur esso nullo) il limite
$$\lim_{t\to 0_+} \frac{w(t)}{t^{h+1}} = \alpha_{h+1}.$$
D'altra parte, il limite
$$\lim_{\sigma\to +\infty} \frac{\sigma^{\nu+1} W(\sigma)}{\nu!} \tag{6.45}$$
è nullo per $\nu+1 < n-m$ ed è finito e non nullo per $\nu+1 = n-m$. Applicando il teorema del valore iniziale si conclude che, se $\nu+1$ è minore di $n-m$, per la funzione $w(\cdot)$ esistono e sono tutti nulli i limiti
$$\lim_{t\to 0^+} w(t) = \lim_{t\to 0^+} \frac{w(t)}{t} = \ldots = \lim_{t\to 0^+} \frac{w(t)}{t^\nu} = 0$$
e garantiscono l'esistenza del limite successivo $\lim_{t\to 0^+} \frac{w(t)}{t^{\nu+1}}$, che è nullo a sua volta, a meno che non sia $\nu+1 = n-m$.
Abbiamo così verificato la seguente

Proposizione 6.4.2 *Se nella (6.43) è $n > m$, allora si ha*
$$\lim_{t\to 0_+} \frac{w(t)}{t^{n-m-1}} \;=\; \lim_{\sigma\to +\infty} \frac{\sigma^{n-m} W(\sigma)}{(n-m-1)!} \;\neq\; 0 \tag{6.46}$$
mentre risulta
$$\lim_{t\to 0_+} \frac{w(t)}{t^\nu} \;=\; 0 \qquad \text{per} \;\; \nu < n-m-1 \qquad \blacksquare \tag{6.47}$$

Se $W(s)$ non è strettamente propria, si può, come nel paragrafo precedente, esprimerla nella forma
$$W(s) = h(s) + \bar{W}(s)$$
con $\bar{W}(s)$ strettamente propria e $h(s)$ polinomiale. Poichè $h(s)$ ha come antitrasformata una combinazione di impulsi nell'origine, si ha
$$\lim_{t\to 0_+} w(t) = \lim_{t\to 0_+} \bar{w}(t),$$

dove $\bar{w}$ è la antitrasformata di $\bar{W}(s)$, e si possono applicare a $\bar{W}(s)$ le considerazioni precedenti. In particolare, se il numeratore di $\bar{W}(s)$ ha grado $\bar{m}$ e il denominatore ha grado n, si ottiene

$$\lim_{t \to 0_+} w(t) \;=\; \lim_{\sigma \to +\infty} \frac{\sigma^{n-\bar{m}} \bar{W}(\sigma)}{(n-\bar{m}-1)!}$$

Per quanto riguarda il comportamento delle derivate $w^{(k)}(\cdot)$ per $t \to 0_+$, se $W(s)$ è strettamente propria si ha

i) per $k < n-m-1$ si ha $w^{(k)}(0_+) = 0$.
Infatti la trasformata di $\delta^{(-1)} w^{(k)}(\cdot)$ è data da

$$W_k(s) \;=\; s^k W(s) - \begin{bmatrix} s^{k-1} & s^{k-2} & \dots & s & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(0_+) \\ w^{(1)}(0_+) \\ \vdots \\ w^{(k-2)}(0_+) \\ w^{(k-1)}(0_+) \end{bmatrix} \tag{6.48}$$

Se assumiamo induttivamente che siano nulli $w(0_+), w^{(1)}(0_+), \dots, w^{(k-1)}(0_+)$, otteniamo

$$\lim_{\sigma \to +\infty} \sigma W_k(\sigma) = \lim_{\sigma \to +\infty} \sigma^{k+1} W(\sigma) = 0$$

e $w^{(k)}(0_+)$ è nullo a sua volta.

ii) Per $k = n-m-1$, si ha

$$w^{(n-m-1)}(0_+) = \lim_{\sigma \to +\infty} \sigma W_k(\sigma) = \lim_{\sigma \to +\infty} \sigma^{n-m} W(\sigma) \neq 0 \tag{6.49}$$

Si confrontino (6.46) e (6.49)!

iii) Per $k > n-m-1$, si ricorre ancora alla (6.48), dove i valori $w^{(i)}(0_+)$ si suppongono noti dai passi precedenti, e si ottiene

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{w^{(k)}(t)}{t^\nu} = \lim_{\sigma \to +\infty} \frac{\sigma^{\nu+1} W_k(\sigma)}{\nu!} \tag{6.50}$$

Esempio 6.4.1 Si consideri la funzione razionale

$$W(s) = \frac{s+1}{(s-1)^3}$$

quindi con $m = 1$, $n = 3$, $n-m-1 = 1$. Tenuto conto delle osservazioni precedenti, si ha allora

$$\begin{aligned} \lim_{t \to 0_+} w(t) \quad &= \quad \lim_{\sigma \to +\infty} \frac{\sigma(\sigma+1)}{(\sigma-1)^3} = 0 \\ \lim_{t \to 0_+} \frac{w(t)}{t} \quad &= \quad \lim_{\sigma^2 \to +\infty} \frac{\sigma(\sigma+1)}{(\sigma-1)^3} = 1. \end{aligned}$$

Per quanto attiene alle derivate di w,

$$W_1(s) \quad := \quad \mathcal{L}(\delta^{(-1)} w^{(1)}) = \frac{s(s-1)}{(s+1)^3}$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to 0_+} w^{(1)}(t) &= \lim_{\sigma\to +\infty} \frac{\sigma^2(\sigma+1)^3}{(\sigma-1} = 1 \\
W_2(s) &:= \mathcal{L}(\delta^{(-1)} w^{(2)}) = \frac{s^2(s-1)}{(s+1)^3} - [\, s \quad 1\,] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{4s^2-3s+1}{(s-1)^3} \quad \text{etc.}
\end{aligned}
$$

- Esercizio 6.4.1 Si supponga che la funzione di trasferimento $W(s)$ sia razionale, strettamente propria, con un unico polo, reale, di molteplicità 3, in $s = \alpha < 0$. Si valuti il grado del denominatore nei casi seguenti

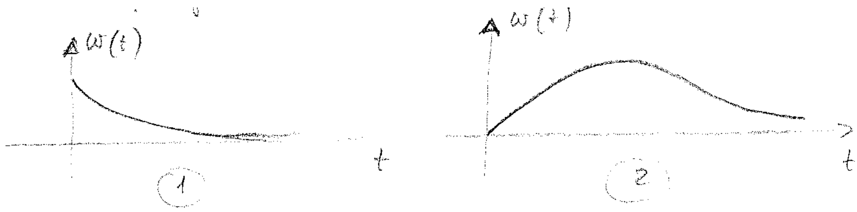

Figura 6.4.1

Esempio 6.4.2 Si consideri un motore in corrente continua, controllato dalla tensione di armatura. Nel dominio del tempo, si perviene alle relazioni considerate nel paragrafo 4.4.2 (controllo a tensione di eccitazione costante). Trasformando secondo Laplace in ambito distribuzionale le equazioni (4.20)-(4.23), otteniamo, con ovvio significato dei simboli,

$$
\begin{aligned}
V_a(s) &= R_a I_a(s) + sL_a I_a(s) + E(s) && (6.51)\\
E(s) &= K\Omega(s) && (6.52)\\
C(s) &= KI_s(s) && (6.53)\\
C(s) &= (B+sJ)\Omega(s) && (6.54)
\end{aligned}
$$

Dalle equazioni elettrica (6.51) ed elettromeccanica (6.52) e, rispettivamente, dalle equazioni elettromeccanica (6.53) e meccanica (6.54) si ricava

$$
\begin{aligned}
V_a(s) &= (R_a + sL_a) I_a(s) + K\Omega(s) && (6.55)\\
KI_a(s) &= (B+sJ)\Omega(s) && (6.56)
\end{aligned}
$$

da cui, eliminando $I_a(s)$, si perviene a

$$
\begin{aligned}
V_a(s) &= (R_a + sL_a)\frac{B+sJ}{K}\Omega(s) + K\Omega(s) \\
&= \left(\frac{R_a B}{K} + K\right)\Omega(s) + \left(\frac{R_a J}{K} + \frac{L_a B}{K}\right) s\Omega(s) + \frac{L_a J}{K} s^2 \Omega(s) && (6.57)
\end{aligned}
$$

La funzione di trasferimento è

$$
W(s) = \frac{\Omega(s)}{V_a(s)} = \frac{\dfrac{K}{L_a J}}{s^2 + \left(\dfrac{R_a}{L_a} + \dfrac{B}{J}\right)s + \dfrac{R_a B + K^2}{L_a J}}, \tag{6.58}
$$

strettamente propria, con $m = 0$ e $n = 2$. Pertanto nella risposta impulsiva deve essere $w()_+) = 0$.

Supponiamo dapprima che il sistema sia senza perdite, ovvero che si abbia $R_a = B = 0$. In questo caso la velocità angolare del motore in corrispondenza all'applicazione di un impulso unitario di tensione ha trasformata

$$
\Omega(s) = W(s) = \frac{\dfrac{K}{L_a J}}{s^2 + \dfrac{K^2}{L_a J}},
$$

e, nel dominio del tempo, troviamo[4]

$$\omega(t) = w(t) = \frac{1}{\sqrt{L_a J}} \sin\left(\frac{K}{\sqrt{L_a J}} t\right)$$

Il comportamento puramente oscillatorio senza smorzamento non dovrebbe stupire: in assenza di perdite e con rotore inizialmente fermo, l'energia al tempo $t = 0_+$ è immagazzinata sotto forma elettromagnatica nell'induttanza L_a e convertita progressivamente in energia meccanica di rotazione, poi riconvertita in energia elettromagnetica, etc.
Quanto alla corrente $I_a(s)$, essa soddisfa la relazione $KI_a(s) = sJ\Omega(s)$ e quindi si ha

$$I_a(s) = \frac{1}{L_a} \frac{s}{s^2 + \dfrac{K^2}{L_a J}}$$

cui corrisponde, nel dominio del tempo, una funzione

$$i_a(t) = \frac{1}{L_a} \cos\left(\frac{K}{\sqrt{L_a J}} t\right)$$

in accordo con il fatto che in $t = 0_+$ la corrente impressa nell'induttanza è $1/L_a$.
Quindi corrente di armatura e velocità di rotazione sono in quadratura.

Supponiamo ora che sia trascurabile l'induttanza del circuito di armatura, ma non lo siano le perdite elettriche e meccaniche. Allora (6.57) si semplifica in

$$V_a(s) = \left(R_a + \frac{B + sJ}{K} + K\right)\Omega(s)$$

e quindi

$$\frac{\Omega(s)}{V_a(s)} = \frac{\dfrac{K}{JR_a}}{s + \left(\dfrac{B}{J} + \dfrac{K^2}{JR_a}\right)} = \frac{k'}{s + \alpha}, \quad \text{con } \alpha > 0 \tag{6.59}$$

Applicando un impulso di tensione, la velocità angolare varia secondo la legge

$$\omega(t) = k' e^{-\alpha t}$$

ed è massima all'istante iniziale: l'energia fornita inizialmente e non dissipata in $t = 0$ sulla resistenza viene accumulata in forma meccanica e viene progressivamente consumata sulla resistenza e nelle perdite meccaniche: la velocità asintoticamente si estingue.

6.4.2 Teorema del valore finale e segnali canonici

Teorema 6.4.3 DEL VALORE FINALE, PER FUNZIONI] *Supponiamo che*

1. *$f(\cdot)$ sia localmente integrabile e soddisfi le condizioni (A1) e (A2) del paragrafo 6.1,*

2. *per un opportuno numero complesso α ed un numero reale $\nu > -1$ esiste il limite*

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{f(t)}{t^\nu} = \alpha \tag{6.60}$$

.

[4] si ricordi che $\sin(\omega t)$ e $\cos(\omega t)$ hanno come trasformate, rispettivamente, $\omega/(s^2 + \omega^2)$ e $s/(s^2 + \omega^2)$.

Allora, valutando $F(s)$ sull'asse reale e introducendo la funzione $\gamma(\cdot)$ definita nel teorema 6.4.1, si ha

$$\lim_{\sigma\to 0_+} \frac{\sigma^{\nu+1}F(\sigma)}{\gamma(\nu+1)} = \alpha \tag{6.61}$$

In particolare, se ν è un intero non negativo, da (6.60) e (6.61) si ha

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{t^\nu} = \lim_{\sigma\to 0_+} \frac{\sigma^{\nu+1}F(\sigma)}{\nu!} \qquad \blacksquare$$

Si noti che l'ipotesi (6.60) garantisce l'esistenza di $F(s)$ in $\Re\mathrm{e}\, s > 0$, e quindi la plausibilità della formula (6.61).

Definizione 6.4.4 [Tipo di un sistema lineare] *Un sistema lineare con funzione di trasferimento razionale $W(s)$ si dice di tipo ν_0, $\nu_0 \in \mathbb{N}$, se ν_0 è l'ordine del polo di $W(s)$ nell'origine.*

Definizione 6.4.5 [Segnali canonici] *I segnali canonici sono il gradino unitario e i suoi integrali successivi:*

$$\begin{array}{lrcll}
\text{gradino unitario} & \delta^{(-1)}(t) & = & \begin{cases} 0 & \mathit{per}\ t<0 \\ 1 & \mathit{per}\ t\ge 0 \end{cases} & \mathcal{L}(\delta^{(-1)}) = \dfrac{1}{s} \\
\text{rampa (lineare)} & \delta^{(-2)}(t) = \int_{-\infty}^t \delta^{(-1)}(\tau)d\tau & = & \begin{cases} 0 & \mathit{per}\ t<0 \\ t & \mathit{per}\ t\ge 0 \end{cases} & \mathcal{L}(\delta^{(-2)}) = \dfrac{1}{s^2} \\
\text{rampa parabolica} & \delta^{(-3)}(t) = \int_{-\infty}^t \delta^{(-2)}(\tau)d\tau & = & \begin{cases} 0 & \mathit{per}\ t<0 \\ \frac{t^2}{2!} & \mathit{per}\ t\ge 0 \end{cases} & \mathcal{L}(\delta^{(-3)}) = \dfrac{1}{s^3} \\
\ldots & \ldots & & &
\end{array}$$

Se $W(s)$ ha soltanto poli a parte reale negativa, eccettuato, eventualmente, un polo (semplice o multiplo) nell'origine, allaora, antitrasformando termine a termine lo sviluppo in frazioni parziali

$$W(s) = \frac{\alpha_{01}}{s} + \frac{\alpha_{02}}{s^2} + \ldots + \frac{\alpha_{0\nu_0}}{s^{\nu_0}} + (\ldots\ldots)$$

dove con $(\ldots\ldots)$ si indicano gli addendi relativi ai poli in $\Re\mathrm{e}\, s < 0$, si vede subito che le uniche componenti non infinitesime della risposta impulsiva sono quelle corrispondenti ai termini $\frac{\alpha_{01}}{s}$, $\frac{\alpha_{02}}{s^2}$, $\ldots \frac{\alpha_{0\nu_0}}{s^{\nu_0}}$, perché le altre sono una combinazione linere di modi convergenti a zero per $t \to +\infty$.
Se ν_0 è l'ordine del polo nell'origine, il coefficiente $\alpha_{0\nu_0}$ è diverso da zero e dalla espressione

$$w(t) = \delta^{(-1)}\left[\alpha_{01} + \alpha_{02}t + \alpha_{03}\frac{t^2}{2} + \ldots + \alpha_{0\nu_0}\frac{t^{\nu_0-1}}{(\nu_0-1)!}\right] + \text{termini infinitesimi}$$

si vede che esiste finito e non nullo

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{w(t)}{t^{\nu_0-1}} := \beta \neq 0 \tag{6.62}$$

Quindi è applicabile il teorema del valore finale nella forma

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{w(t)}{t^{\nu_0-1}} = \lim_{\sigma\to 0_+} \frac{\sigma^{\nu_0} W(\sigma)}{(\nu_0-1)!} \tag{6.63}$$

Per valori $k > \nu_0 - 1$ risulta

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{w(t)}{t^{\nu_0-1}} = 0$$

mentre per valori $k < \nu_0 - 1$ il limite è infinito. Vale quindi per ogni k la formula

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{w(t)}{t^{k}} = \lim_{\sigma\to 0_+} \frac{\sigma^{k+1} W(\sigma)}{k!} \tag{6.64}$$

Possiamo riformulare le conclusioni cui siamo pervenuti come segue

Proposizione 6.4.6 *Se il sistema è di tipo ν_0 e la sua funzione di trasferimento non ha poli in $\Re\mathrm{e}\, s \geq 0$, eccetto nell'origine, allora la risposta impulsiva è asintoticamente proporzionale al segnale canonico $\delta^{(-_0)}$, ovvero a*
un gradino se $\nu_0 = 1$,
una rampa se $\nu_0 = 2$,
una rampa parabolica se $\nu_0 = 3$, etc.
Il coefficiente di tale segnale è deducibile dalla valutazione della funzione $\sigma_0^{\nu} W(\sigma)$ nell'origine.

Prova Da (6.63) segue

$$w(t) = \beta\, t^{\nu_0-1}\, [\delta^{(-1)}(t) + \epsilon(t)] = (\nu_0-1)!\, \beta\, [\delta^{(-\nu_0)}(t) + \epsilon'(t)]$$

con ϵ ed ϵ'infinitesimi per $t \to +\infty$ e con

$$(\nu_0-1)!\beta = \lim_{\sigma\to 0_+} \sigma^{\nu_0} W(\sigma) \qquad \blacksquare$$

Nelle medesime ipotesi della proposizione 6.4.6 sui poli di $W(s)$, se si applica al sistema un segnale canonico $\delta^{(-k)}(t) = \delta^{(-1)} t^{k-1}(t)/(k-1)!$, la corrispondente uscita ha trasformata

$$Y_f(s) = \frac{W(s)}{s^k}$$

e presenta nell'origine un polo di ordine $k + \nu_0$. La risposta è ora asintoticamente proporzionale al segnale canonico $\delta^{(-\nu_0-k)}(t)$, risultando

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{y_f(t)}{t^{\nu_0+k-1}} = \lim_{\sigma\to 0_+} \frac{\sigma^{\nu_0} W(\sigma)}{(\nu_0+k-1)!} \neq 0$$

Esempio 6.4.3 La funzione

$$F(s) = \frac{s^4+2}{s^2(s+1)}$$

ha poli in $-1,\ 0,\ \infty$ e la molteplicità del polo nell'origine è $\nu_0 = 1$. Allora

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{t} = \lim_{\sigma\to 0_+} \sigma^2 \frac{\sigma^4+2}{\sigma^2(\sigma+1)} = 2$$

- ESERCIZIO 6.4.2 Nelle ipotesi dell'esercizio 6.4.1, si sviluppi $W(s)$ nella forma

$$\frac{\beta_1}{s-\alpha} + \frac{\beta_2}{(s-\alpha)^2} + \frac{\beta_3}{(s-\alpha)^3}$$

È sufficiente saper che $w^{(1)}$ ha l'andamento di figura 6.4.2 per decidere circa il grado del numeratore? e circa l'eventuale annullarsi dei coefficienti $\eta_i ?esefosse$w$^{(1)}(0_+) \neq 0$?

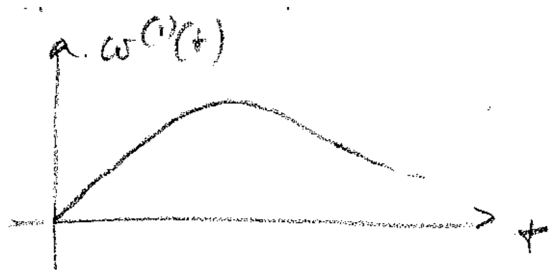

Figura 6.4.2

♯ *Suggerimento. Con riferimento all'osservazione (i) che segue la proposizione 6.4.2, la condizione* $w^{(1)}(0_+) = 0$ *implica* $1 = k < n - m - 1 = 2 - m$*, ovvero* $m < 1$*.*
Se invece risulta $w^{(1)}(0_+) \neq 0$*, per l'osservazione (ii) si ha n-m=2, quindi* $m = 1$*.*
Nel primo caso non è nullo solo il coefficiente β_3*, nel secondo è nullo* β_1*, ma non* β_2*.*

6.5 Riferimenti

[Ze] A.Zemanian, "Distribution theory and transform analysis". Dover

[ZD] Zadeh, Desoer, "Linear Systems"