

## Capitolo 7

# Rappresentazione grafica delle funzioni di trasferimento: diagrammi di Bode

### 7.1 Rappresentazione grafica di funzioni di trasferimento razionali

La funzione di trasferimento "è una funzione di variabile complessa  $W(s)$ , Laplace trasformata della risposta impulsiva, definita per  $\Re s > \sigma(w)$ , dove  $\sigma(w)$  è l'ascissa di convergenza.

Limitandoci al caso di funzioni di trasferimento razionali proprie

$$W(s) = \frac{\sum_i b_i s^i}{\sum_i a_i s^i},$$

quando la rappresentazione è irriducibile si ha

$$\sigma(w) = \sup\{|\alpha| : \sum_i a_i \alpha_i = 0\}$$

e nel semipiano  $\Re s > \sigma(w)$  la  $W(s)$  è funzione analitica. La funzione  $W(s)$  è poi unicamente prolungabile su tutto il piano complesso nella *funzione meromorfa*  $W(s)$ , che a sua volta individua in modo unico la sua restrizione all'asse immaginario

$$W(j\omega) = \sum_i b_i (j\omega)^i / \sum_i a_i (j\omega)^i.$$

Viceversa, la restrizione  $W(j\omega)$  di  $W(s)$  all'asse immaginario è sufficiente per ottenere in modo unico la  $W(s)$ . Quest'ultimo fatto è piuttosto importante quando si intende fornire una rappresentazione grafica della funzione di trasferimento, perché consente di sostituire alla sua rappresentazione sul piano complesso (o almeno sul semipiano di convergenza) quella di una funzione a valori complessi della variabile reale  $\omega$ .

Nella rappresentazione grafica di  $W(j\omega)$  sovente conviene considerare il logaritmo (complesso) di  $W(j\omega)$  e assumere come variabile indipendente in luogo di  $\omega$  il suo logaritmo (per  $\omega > 0$ ). Il ricorso a una scala logaritmica offre il vantaggio di

- analizzare la funzione per ampie escursioni delle variabili
- ottenere i diagrammi di funzioni complicate per sovrapposizione di diagrammi elementari standard (su ciò torneremo a lungo nel seguito).

Si noti, infine, che nella mappa

$$W : \omega \mapsto \Re W(j\omega) + j\Im W(j\omega) = |W(j\omega)|e^{j\angle W(j\omega)}$$

e nella mappa

$$\ln W : \omega \mapsto \ln |W(j\omega)| + j\angle W(j\omega)$$

la “fase”  $\angle W(j\omega)$  è individuata solo al modulo di multipli interi di  $2\pi$ . Ciò è irrilevante nella valutazione del numero complesso  $W(j\omega)$  in corrispondenza a uno specifico valore di  $\omega$ , ma richiede una certa attenzione quando ciò che si intende valutare è la variazione di fase di  $W(j\omega)$  al variare di  $\omega$  su un assegnato intervallo di pulsazioni, ossia l’angolo con vertice nell’origine del piano di Gauss che il vettore  $W(j\omega)$  descrive al variare di  $\omega$ .

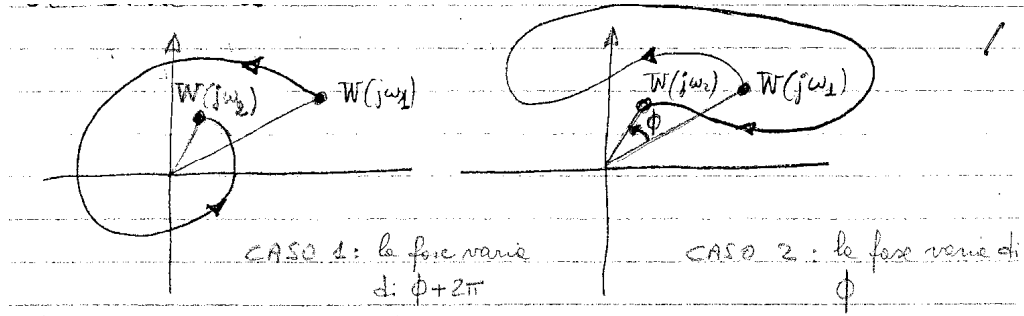


Figura 7.1.1

Ancora più delicata da valutare è la situazione in cui  $W(j\omega)$  si annulla o ha un polo sull’asse immaginario, dato che in tal punto la fase non è definita. Ma anche su questo argomento torneremo fra breve.

## 7.2 Diagrammi di Bode di una funzione razionale: introduzione

Fattorizzando sul campo reale i polinomi a numeratore e a denominatore di  $W(s)$  in fattori irriducibili del primo e del secondo grado, si può sempre esprimere  $W(s)$  nella forma

$$W(s) = K' \frac{(s - \alpha'_1)^{\nu'_1} (s - \alpha'_2)^{\nu'_2} \cdots (s^2 + 2\delta'_1 \omega'_{n1} s + (\omega'_{n1})^2)^{\mu'_1} \cdots (s^2 + 2\delta'_{q'} \omega'_{nq'} s + (\omega'_{nq'})^2)^{\mu'_{q'}}}{(s - \alpha_1)^{\nu_1} (s - \alpha_2)^{\nu_2} \cdots (s^2 + 2\delta_1 \omega_{n1} s + (\omega_{n1})^2)^{\mu_1} \cdots (s^2 + 2\delta_q \omega_{nq} s + (\omega_{nq})^2)^{\mu_q}} \quad (7.1)$$

## 7.2. DIAGRAMMI DI BODE DI UNA FUNZIONE RAZIONALE: INTRODUZIONE 3

e quindi anche nella “forma di Bode”

$$W(s) = K \frac{\left(1 + sT_1'\right)^{\nu_1'} \cdots \left(1 + sT_{p'}'\right)^{\nu_{p'}'} \left(1 + 2\frac{\delta_1'}{\omega_{n1}'}s + \frac{s^2}{(\omega_{n1}')^2}\right)^{\mu_1'} \cdots \left(1 + 2\frac{\delta_{q'}'}{\omega_{nq'}'}s + \frac{s^2}{(\omega_{nq'}')^2}\right)^{\mu_{q'}'}}{s^{\nu_0} \left(1 + sT_1\right)^{\nu_1} \cdots \left(1 + sT_p\right)^{\nu_p} \left(1 + 2\frac{\delta_1}{\omega_{n1}}s + \frac{s^2}{(\omega_{n1})^2}\right)^{\mu_1} \cdots \left(1 + 2\frac{\delta_q}{\omega_{nq}}s + \frac{s^2}{(\omega_{nq})^2}\right)^{\mu_q}} \quad (7.2)$$

Per ottenere (7.2) da (7.1)

- si moltiplica ciascun fattore  $s - \alpha$ , con  $\alpha \neq 0$ , per  $T = -1/\alpha$ , ottenendo un fattore del tipo

$$1 + Ts$$

- si moltiplica ciascun fattore  $s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2$  per  $1/\omega_n^2$ , ottenendo un fattore del tipo

$$1 + 2\frac{\delta}{\omega_n}s + \frac{s^2}{\omega_n^2}$$

- si raccolgono, a compensare le precedenti moltiplicazioni, i prodotti dei reciproci dei  $T$  e degli  $\omega_n$ , ottenendo

$$K = K' \frac{T_1^{\nu_1} \cdots (\omega_{n1}')^{2\mu_1'} \cdots}{(T_1')^{\nu_1'} \cdots (\omega_{n1})^{2\mu_1} \cdots}$$

- $\nu_0$  può essere positivo, nel qual caso  $W(s)$  ha un polo nell'origine, negativo se  $W(s)$  ha uno zero nell'origine, o nullo.

La costante

$$K = [W(s)s^{\nu_0}] \Big|_{s \rightarrow 0} \quad (7.3)$$

è detta *guadagno (o costante) di Bode* e coincide con  $W(0)$  quando non vi siano singolarità (i.e. poli o zeri) nell'origine.

È facile constatare che l'andamento di  $W(j\omega)$  è noto quando sia conosciuto per i soli valori positivi della pulsazione  $\omega$ ; infatti, avendo la funzione razionale  $W(s)$  coefficienti reali, si ha

$$W(\check{s}) = (W(s))^\sim$$

e, in particolare

$$W(-j\omega) = (W(j\omega))^\sim \quad (7.4)$$

La (refsempli) implica, per quanto riguarda modulo e fase di  $W(j\omega)$ ,

$$|W(-j\omega)| = |W(j\omega)| \quad (7.5)$$

$$\angle W(-j\omega) = -\angle W(j\omega) \quad (7.6)$$

I diagrammi di Bode sono due: uno per il modulo (o il “guadagno”)  $|W(j\omega)|$ ,  $\omega \in \mathbb{R}_+$ , uno per la fase  $\angle W(j\omega)$ ,  $\omega \in \mathbb{R}_+$ . In entrambi, la pulsazione è riportata in scala logaritmica (in base 10, o 2, o naturale). La scala logaritmica è utilizzata anche per il guadagno, che è abitualmente espresso

- in decibel :  $|W(j\omega)|_{\text{db}} = 20 \log_{10} |W(j\omega)|$

- in neper :  $|W(j\omega)|_{\text{np}} = \ln |W(j\omega)|$

Per la fase, si utilizzano indifferentemente misure in radianti o in gradi sessagesimali. Infine, pur essendo logaritmiche le scale, si riportano spesso in ascissa i valori effettivi della pulsazione, anziché quelli del suo logaritmo (i.e. nel punto di coordinata  $x = \log \omega$  si riporta il valore di  $\omega$  anziché quello di  $x$ )

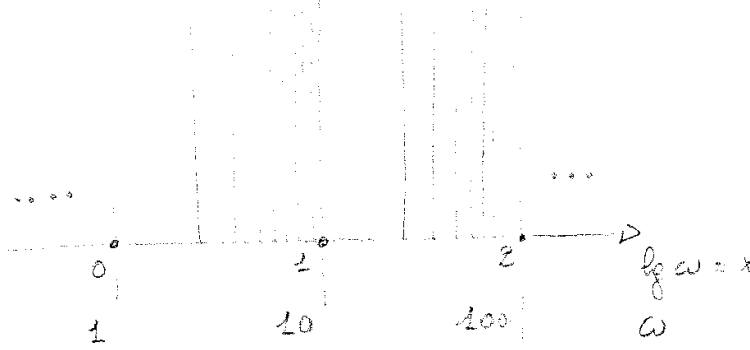


Figura 7.2.1

Se  $W(j\omega)$  è fattorizzata in forma di Bode

$$K \frac{(1 + j\omega T_1')^{\nu_1'} \cdots (1 + j\omega T_{p'})^{\nu_{p'}} \left(1 + 2\frac{\delta_1'}{\omega_{n1}'} j\omega - \frac{\omega^2}{(\omega_{n1}')^2}\right)^{\mu_1'} \cdots \left(1 + 2\frac{\delta_{q'}}{\omega_{nq}'} j\omega - \frac{\omega^2}{(\omega_{nq}')^2}\right)^{\mu_{q'}}}{(j\omega)^{\nu_0} (1 + j\omega T_1)^{\nu_1} \cdots (1 + j\omega T_p)^{\nu_p} \left(1 + 2\frac{\delta_1}{\omega_{n1}} j\omega - \frac{\omega^2}{(\omega_{n1})^2}\right)^{\mu_1} \cdots \left(1 + 2\frac{\delta_q}{\omega_{nq}} j\omega - \frac{\omega^2}{(\omega_{nq})^2}\right)^{\mu_q}} \quad (7.7)$$

si ha

$$\begin{aligned} 20 \log_{10} |W(j\omega)| &= 20 \log_{10} |K| \\ &+ \nu_1' 20 \log_{10} |1 + j\omega T_1'| + \dots \\ &+ \mu_1' 20 \log_{10} \left| 1 + \frac{2\delta_1'}{\omega_{n1}'} j\omega - \frac{\omega^2}{(\omega_{n1}')^2} \right| + \dots \\ &- \nu_0 20 \log_{10} |j\omega| \\ &- \nu_1 20 \log_{10} |1 + j\omega T_1| - \dots \\ &- \mu 20 \log_{10} \left| 1 + \frac{2\delta_1}{\omega_{n1}} j\omega - \frac{\omega^2}{(\omega_{n1})^2} \right| - \dots \end{aligned} \quad (7.8)$$

e

$$\begin{aligned} \angle W(j\omega) &= \angle K \\ &+ \nu_1' \angle (1 + j\omega T_1') + \dots \\ &+ \mu_1' \angle \left( 1 + \frac{2\delta_1'}{\omega_{n1}'} j\omega - \frac{\omega^2}{(\omega_{n1}')^2} \right) + \dots \\ &- \nu_0 \angle j\omega \\ &- \nu_1 \angle (1 + j\omega T_1) - \dots \end{aligned}$$

$$- \mu \angle \left( 1 + \frac{2\delta_1}{\omega_{n1}} j\omega - \frac{\omega^2}{(\omega_{n1})^2} \right) - \dots \quad (7.9)$$

Pertanto, il guadagno (in db o in altra scala logarithmica) si ottiene sommando algebricamente i guadagni corrispondenti ai singoli fattori della funzione di trasferimento, e lo stesso vale per la fase. Ciò consente di ricondurre il tracciamento a quello delle funzioni elementari (le costanti e i polinomi di primo e secondo grado) e di ottenere il diagramma finale per somma algebrica dei corrispondenti “diagrammi elementari”. Il paragrafo seguente sarà dedicato appunto alla determinazione della struttura di tali diagrammi elementari.

### 7.3 Diagrammi di Bode delle funzioni elementari

Si riportano qui di seguito i diagrammi di Bode delle funzioni elementari, ovvero

$$k, j\omega, 1 + j\omega T, 1 + \frac{2\delta}{\omega_n} - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}$$

e delle loro reciproche. La scala delle ascisse riporta il logaritmo in base 10 della pulsazione, quella delle ordinate il valore in decibel del guadagno e in radianti della fase.

#### 1) funzione costante $K$

Se  $|K| = 1$  la retta è l'asse delle ascisse, se  $|K| < 1$  la retta sta “sotto” l'asse delle ascisse, e sta “sopra” se  $|K| > 1$

Per  $1/K$  il diagramma del guadagno si riflette rispetto all'asse delle ascisse, essendo  $20 \log_{10} |1/K| = -20 \log_{10} |K|$

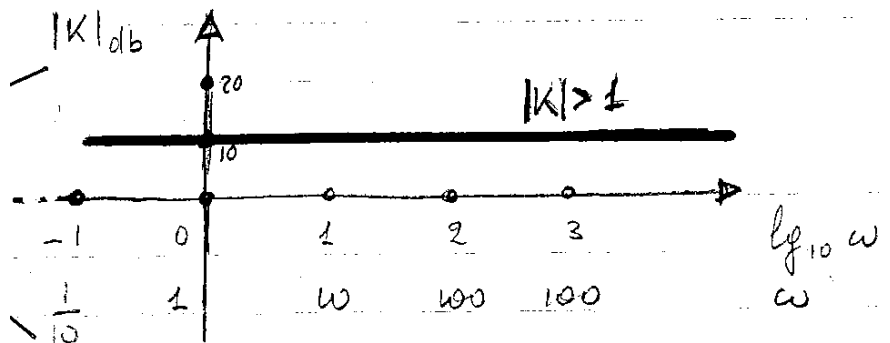


Figura 7.3.1

La fase è nulla se  $K > 0$ , vale  $-\pi$  se  $K < 0$ . Il passaggio al reciproco non altera la fase.

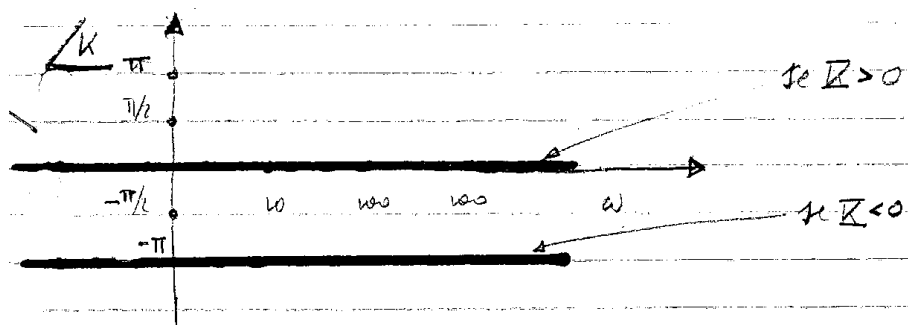


Figura 7.3.2

**2) funzioni  $j\omega$  e  $\frac{1}{j\omega}$** 

Si ha  $|j\omega|_{\text{db}} = 20 \log_{10} |j\omega| = 20 \log_{10} \omega$  e, per la fase,  $\angle j\omega = \pi/2 \quad \forall \omega$ .

Per il guadagno della funzione reciproca si ha  $\left| \frac{1}{j\omega} \right|_{\text{db}} = 20 \log_{10} \left| \frac{1}{j\omega} \right| = -20 \log_{10} \omega$

Per la fase  $\angle \frac{1}{j\omega} = -\pi/2 \quad \forall \omega$ .

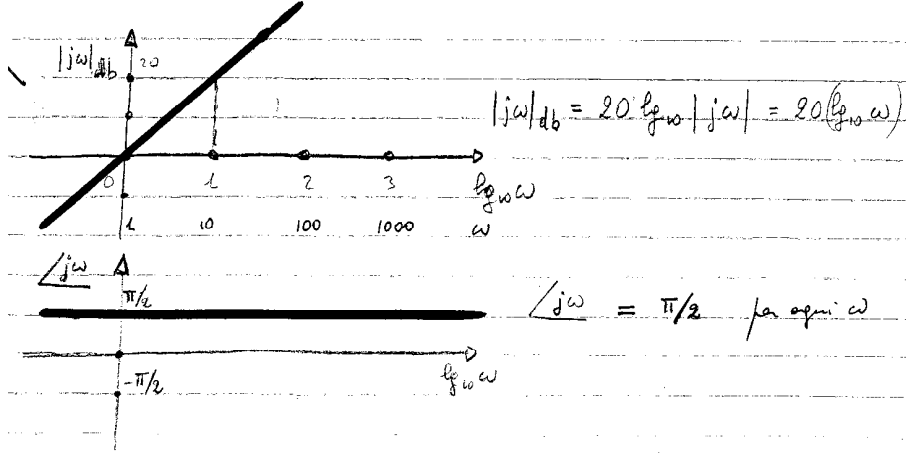


Figura 7.3.3

**Definizione 7.3.1** [DECADE E OTTAVA] Si dice “decade” un intervallo di pulsazioni che ha ampiezza unitaria nella scala logaritmica in base 10, ovvero un intervallo di pulsazioni comprese fra  $\bar{\omega}$  e  $10\bar{\omega}$ .

Un intervallo di un’ottava è invece quello compreso fra una pulsazione  $\bar{\omega}$  e la pulsazione doppia  $2\bar{\omega}$ .

È chiaro allora che il guadagno della funzione  $j\omega$  (di  $1/j\omega$ ) si accresce (diminuisce) di 20 db per decade.

**3) la funzione  $1 + j\omega T$  e la reciproca**

Per il tracciamento del diagramma del guadagni, si ha

$$|1 + j\omega T|_{\text{db}} = 20 \log_{10} |1 + j\omega T| \quad (7.10)$$

In modo esatto quando  $\omega = 0$ , e con piccolo errore quando la pulsazione  $\omega$  è piccola, la (7.10) può essere approssimata dalla funzione nulla. Per grandi valori di  $\omega$ , invece, nella valutazione del guadagno è trascurabile l’addendo 1 rispetto a  $j\omega T$  e si ottiene

$$|1 + j\omega T|_{\text{db}} \sim 20 \log_{10} |j\omega T| = 20 \log_{10} \omega + 20 \log_{10} |T| \quad (7.11)$$

Nel diagramma logaritmico la (7.11) è una retta che attraversa l’asse delle ascisse per

$$\log_{10} \omega = -\log_{10} |T| = \log_{10} |1/T|$$

e ha pendenza positiva pari a 20 db per decade.

La *approssimazione asintotica* del guadagno consiste di due semirette:

- per piccoli  $\omega$ , inferiori a  $|1/T|$ , è la semiretta orizzontale corrispondente a un guadagno di 0 db;
- per  $\omega \geq |1/T|$  è la semiretta di equazione (7.11).

Il punto corrispondente alla pulsazione  $|1/T|$  si dice punto di “spezzamento” o di “rottura” del diagramma asintotico.

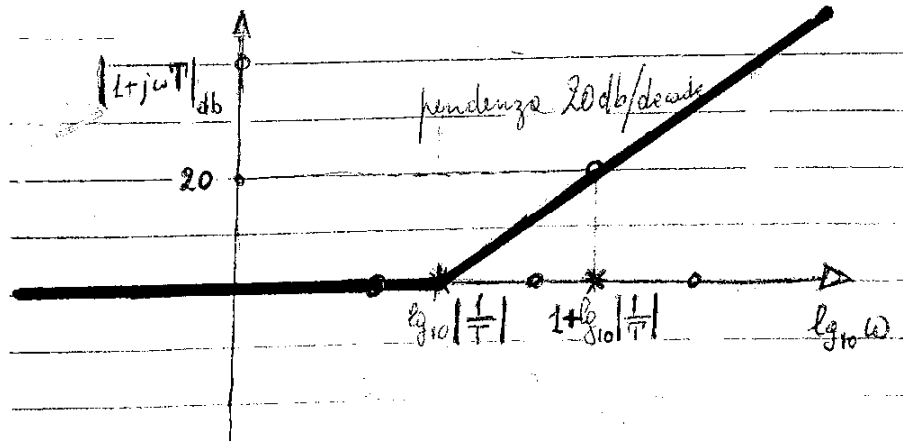


Figura 7.3.4

Si noti che, se la pulsazione raddoppia, ossia se l'intervallo fra la pulsazione più bassa e la più alta è di un'ottava, l'incremento di guadagno nella zona delle alte frequenze è dato da

$$20 \log_{10} |2\omega T| - 20 \log_{10} |1| = 20 \log_{10} 2 = 6 \text{ db}$$

Fra la curva esatta del guadagno e la sua approssimazione asintotica il massimo scostamento si ha alla pulsazione di rottura  $\omega = |1/T|$  e vale 3 db. Infatti

$$20 \log_{10} |1 \pm j| = 20 \log_{10} \sqrt{2} = \frac{20}{2} \log_{10} 2 \sim 3 \text{ db} \quad (7.12)$$

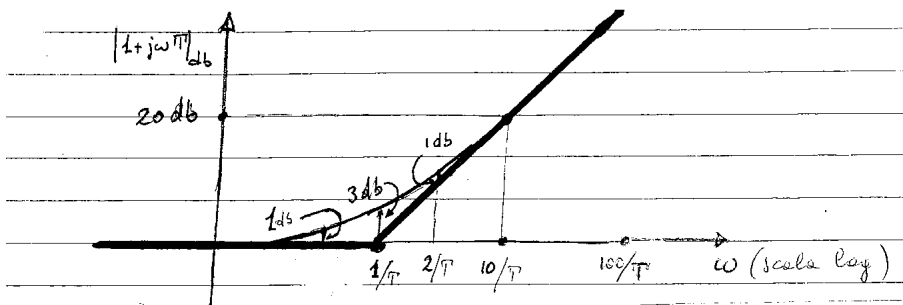


Figura 7.3.5

- ESERCIZIO 7.3.1 Si verifichi che a distanza di un'ottava prima e dopo la pulsazione di spezzamento  $|1/T|$ , cioè alle pulsazioni  $|1/(2T)|$  e  $|2/T|$ , l'errore del diagramma asintotico rispetto a quello esatto è di circa 1 db.

‡ Soluzione. In  $\omega = |2/T|$  il valore esatto del guadagno è  $20 \log_{10} |1 + j2| = 20 \log_{10} \sqrt{5} \sim 7$  mentre il valore previsto dal diagramma asintotico è  $20 \log_{10} |2/T| = 20 \log_{10} 2 \sim 6$

Per la fase  $\angle(1 + j\omega T) = \arctg(\omega T)$ , quando  $\omega$  tende a zero la fase tende a zero, mentre quando  $\omega$  diverge la fase tende a  $\pi/2$  se  $T$  è positivo e a  $-\pi/2$  se  $T$  è negativo.

Inoltre, per  $T > 0$  (per  $T < 0$ ) la fase cresce (decresce) monotonicamente e vale  $\pi/4$  ( $-\pi/4$ ) nel punto di spezzamento  $\omega = |1/T|$ .

L'approssimazione più drastica consiste nel rappresentare  $\angle(1 + j\omega T)$  con due semirette orizzontali, ponendo nulla la fase per  $\omega < |1/T|$  e pari a  $\pi/2$  o a  $-\pi/2$  per  $\omega > |1/T|$ , a seconda che sia  $T > 0$  o  $T < 0$ .

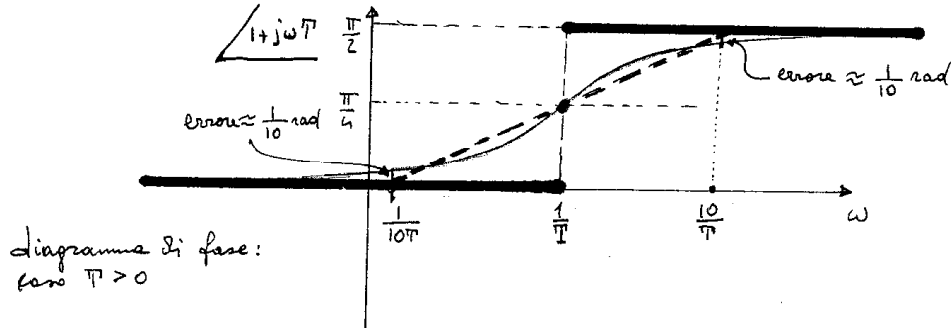


Figura 7.3.6

La figura 7.3.6 fa riferimento al caso  $T > 0$  ed è evidente che l'errore è massimo alla pulsazione di spezzamento, dove vale  $\pi/4$ .

Un'approssimazione meno cruda si ottiene conservando le due semirette asintotiche per  $\omega < \frac{1}{10|T|}$  e per  $\omega > \frac{10}{|T|}$  e raccordando linearmente (rispetto alla scala logaritmica delle pulsazioni) sull'intervallo  $[\frac{1}{10|T|}, \frac{10}{|T|}]$ . Ciò consente, fra l'altro, di avere errore nullo in  $\frac{1}{|T|}$ , dove la fase vale  $\pm\pi/4$ . In questo caso, l'errore nei punti angolosi della spezzata vale circa  $1/10$  di radiante.

Un'altra approssimazione si basa sulla spezzata ottenuta utilizzando (per  $T > 0$ ) la tangente alla curva "esatta" nel punto  $(1, \pi/4)$  e le semirette orizzontali oltre ai punti di intersezione delle stesse con la tangente:

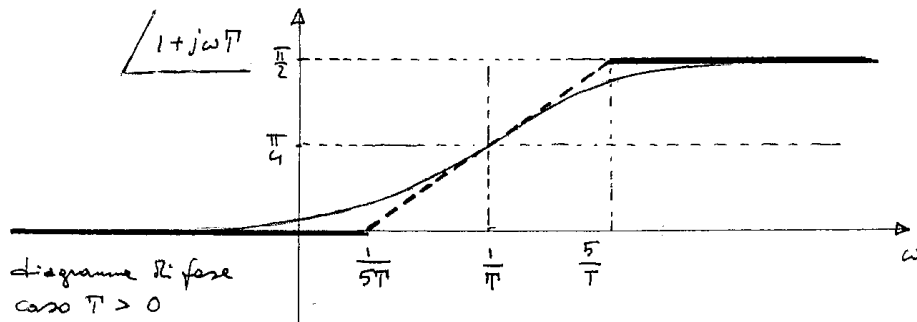


Figura 7.3.7

Tali punti cadono circa in  $\omega = \frac{1}{5|T|}$  e in  $\omega = 5|T|$ .

Riportiamo infine i diagrammi asintotici per la funzione reciproca  $1/(1 + j\omega T)$ : l'andamento delle figure si deduce dai precedenti in modo ovvio.

Si lascia come esercizio l'approssimazione della funzione reciproca mediante spezzate.



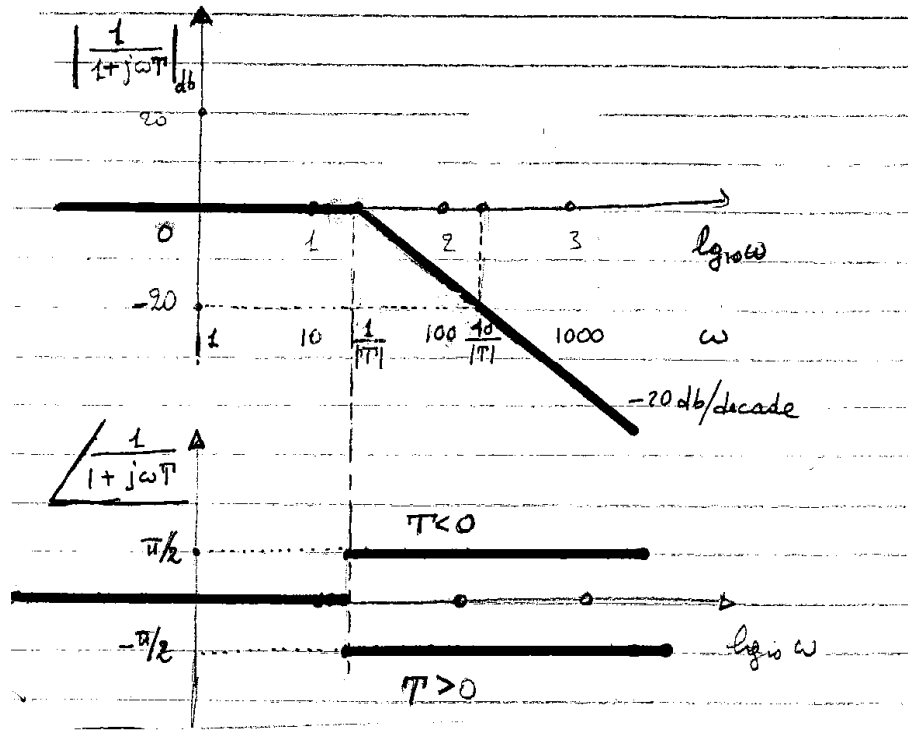


Figura 7.3.8

4) **funzione**  $1 + 2\frac{\delta}{\omega_n}j\omega - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}$ ,  $\delta \in (-1, 1)$

È facile ottenere per il guadagno l'espressione

$$\begin{aligned} \left| 1 + 2\frac{\delta}{\omega_n}j\omega - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right|_{db} &= 20 \log_{10} \left| \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) + j2\delta\frac{\omega}{\omega_n} \right| = 20 \log_{10} \left[ \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4\delta^2\frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= 10 \log_{10} \left[ \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4\delta^2\frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right] \end{aligned} \quad (7.13)$$

Per piccoli valori di  $\omega$  il guadagno è prossimo a zero e vale esattamente zero per  $\omega = 0$ , ovvero per  $\log_{10} \omega = -\infty$ . Per grandi valori di  $\omega$  si possono trascurare in (7.13) le potenze di  $\omega$  inferiori alla quarta, ottenendo l'espressione asintotica

$$\left| 1 + 2\frac{\delta}{\omega_n}j\omega - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right|_{db} \sim 10 \log_{10} \frac{\omega^4}{\omega_n^4} = 40 \log_{10} \omega - 40 \log_{10} \omega_n \quad (7.14)$$

Nel diagramma logaritmico la (7.14) è rappresentata da una retta che attraversa l'asse delle ascisse per  $\log_{10} \omega = \log_{10} \omega_n$  e che ha pendenza positiva pari a 40 db per decade. L'approssimazione asintotica più cruda utilizza fino alla pulsazione  $\omega_n$  la semiretta di guadagno nullo, e per  $\omega > \omega_n$  la semiretta a pendenza 40 db/decade, associata all'equazione (7.14)

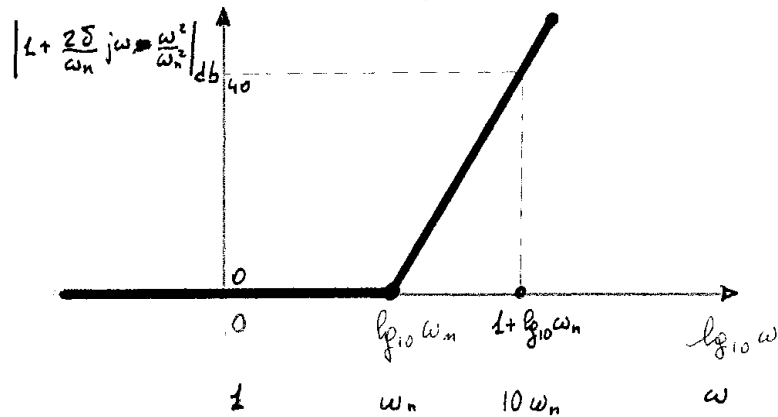


Figura 7.3.9

Vogliamo ora valutare quali sono gli scostamenti del diagramma esatto del guadagno dal diagramma asintotico sopra considerato. Si noti che la funzione (7.13) dipende dal parametro  $\delta$  (lo “smorzamento”, se  $\delta > 0$ ), e perciò gli errori, e le correzioni eventuali, dipenderanno da  $\delta$ .

Per  $\omega = \omega_n$ , l'espressione (7.13) vale  $10 \log_{10}(4\delta^2) = 20 \log_{10} |2\delta|$ .

- Se  $|\delta| = 1/2$ , si ha

$$20 \log_{10} |2\delta| = 0, \text{ come nella rappresentazione asintotica}$$

- Se  $|\delta| > 1/2$  si ha

$$20 \log_{10} |2\delta| > 0 \text{ e per } |\delta| \rightarrow 1 \text{ si arriva al valore } 20 \log_{10} 2 \sim 6 \text{ db}$$

- Se  $|\delta| < 1/2$  si ha

$$20 \log_{10} |2\delta| < 0 \text{ e per } |\delta| \rightarrow 0 \text{ l'errore del diagramma asintotico tende a } \infty$$

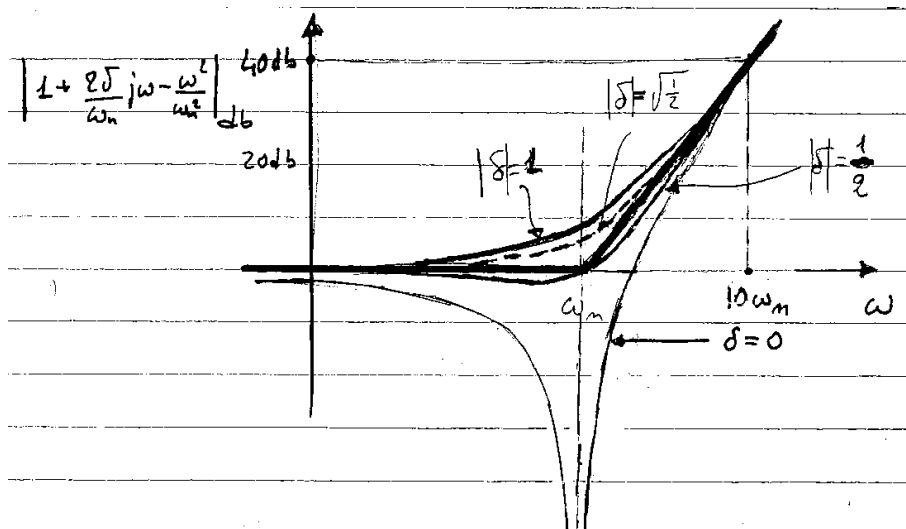


Figura 7.3.10

Possiamo quindi concludere che per piccoli valori di  $|\delta|$  la deviazione del diagramma esatto rispetto a quello asintotico è assai cospicua, e l'uso del diagramma asintotico può indurre errori sensibili di valutazione.

Per comprendere meglio l'andamento effettivo della funzione  $|1 + 2\frac{\delta}{\omega_n}j\omega - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}|$  al variare di  $\omega$ , deriviamone il quadrato rispetto a  $\omega$  ed eguagliamo la derivata a zero:

$$\frac{d}{d\omega} \left[ \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4\delta^2 \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right] = 0$$

La derivata si annulla alla pulsazione

$$\tilde{\omega} = \omega_n \sqrt{1 - 2\delta^2}, \quad (7.15)$$

che è un numero reale solo se  $2\delta^2 \leq 1$ , ossia se  $|\delta| \leq \sqrt{1/2}$ . In corrispondenza a tale valore  $\tilde{\omega}$  la curva del modulo ha un minimo, il cui valore è pari a

$$[(1 - (1 - 2\delta^2))^2 + 4\delta^2(1 - 2\delta^2)]^{1/2} = [4\delta^2 - 4\delta^4]^{1/2} = 2\delta\sqrt{1 - \delta^2} \quad (7.16)$$

Per  $\delta \leq \sqrt{1/2}$ , la (7.16) fornisce un valore minore di 1, come ci dovevamo attendere dal momento che il guadagno vale 1 in  $\omega = 0$  e  $\tilde{\omega}$  è il punto in cui il guadagno è minimo. Il guadagno in decibel, nel punto di minimo, vale

$$20 \log_{10}(2\delta\sqrt{1 - \delta^2}) = 20 \log_{10} 2 + 20 \log_{10} \delta + 10 \log_{10}(1 - \delta^2) \sim 6 + 20 \log_{10} \delta$$

e tende a  $-\infty$  quando  $\delta \rightarrow 0$ .

La fase è data da

$$\angle \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + 2j\delta \frac{\omega}{\omega_n}\right) = \arctg \left[ \frac{2\delta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - (\frac{\omega}{\omega_n})^2} \right] = \arccos \left[ \frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}{|1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + 2j\delta \frac{\omega}{\omega_n}|} \right] \quad (7.17)$$

Per  $\delta > 0$ , ossia quando gli zeri del polinomio appartengono al semipiano  $\Re s < 0$ , la fase è nulla per  $\omega = 0$  ed è funzione crescente di  $\omega$  per ogni  $\omega \in \mathbb{R}_+$ , raggiungendo il valore  $\pi/2$  in  $\omega = \omega_n$  e tendendo a  $\pi$  quando  $\omega \rightarrow \infty$ .

Per  $\delta < 0$ , la fase, nulla in  $\omega = 0$ , decresce al crescere di  $\omega$ , assumendo per ogni  $\omega$  valori opposti a quelli che assumerebbe in corrispondenza al parametro  $-\delta$ .

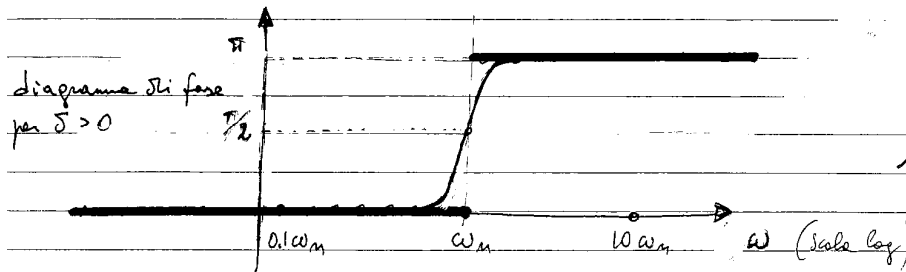


Figura 7.3.11



Infine, per la funzione reciproca si possono ripetere - mutatis mutandis - le considerazioni svolte finora. Nelle figure a seguire si forniscono solamente i diagrammi asintotici di prima approssimazione.

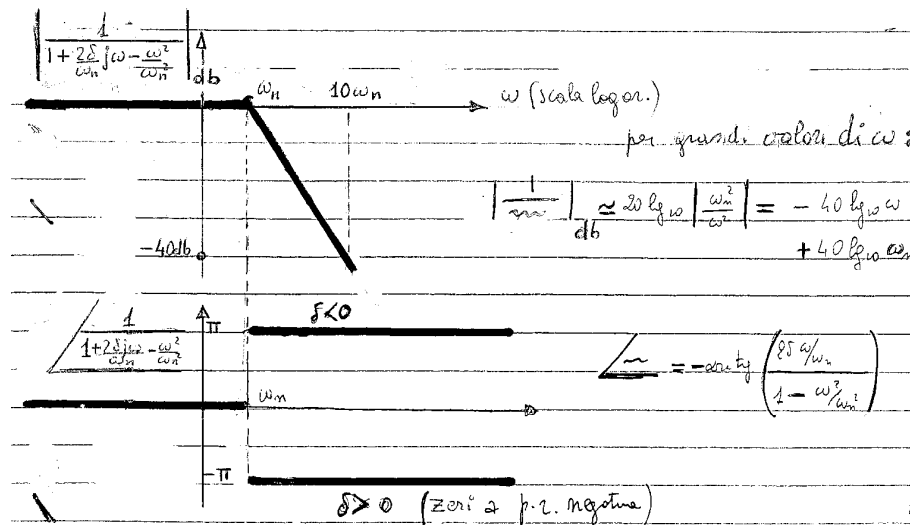


Figura 7.3.14

## 7.4 Tracciamento del diagramma di Bode

Data una funzione razionale  $W(j\omega)$  in forma di Bode, i diagrammi di Bode si ottengono per sovrapposizione dei diagrammi (asintotici o non) delle funzioni elementari componenti.

Alcune regole pratiche per il tracciamento del diagramma, con riferimento alle (7.8) e (7.9).

1. Si individuano i punti di rottura sull'asse  $\omega$ , cioè le ascisse dei vertici delle spezzate:

$$\log_{10} \left| \frac{1}{T_i} \right|, \quad \log_{10} \left| \frac{1}{T'_i} \right|, \quad \log_{10} \omega_{ni}, \quad \log_{10} \omega'_{ni},$$

2. Nel diagramma asintotico dei moduli, il primo tratto ha pendenza  $-20\nu_0$  db/decade [si ricordi che  $\nu_0$ , se positivo, rappresenta la molteplicità del polo nell'origine; se negativo, rappresenta la molteplicità dello zero nell'origine] Tenendo conto soltanto dei fattori  $(j\omega)^{-\nu_0}$  e del guadagno  $K$ , al quale corrisponde  $|K|_{\text{db}} = 20 \log_{10} |K|$ , si traccia una retta che attraversa l'asse delle ordinate in  $|K|_{\text{db}}$  e ha pendenza  $-20\nu_0$ .
3. Ad ogni successivo punto di rottura, si varia la pendenza, incrementandola di  $20\nu'$  db/decade per uno zero reale di molteplicità  $\nu'$ , diminuendola di  $20\nu$  db/decade per un polo reale di molteplicità  $\nu$ , incrementandola di  $40\mu'$  db/decade per una coppia di zeri complessi coniugati di molteplicità  $\mu'$ , diminuendola di  $40\mu$  db/decade per una coppia di poli complessi coniugati di molteplicità  $\mu$ .
4. Per il diagramma delle fasi, quando  $\omega$  tende a 0, e quindi il suo logaritmo tende a  $-\infty$  la fase è  $-\nu_0 \frac{\pi}{2}$ , cui si aggiunge  $-\pi$  se  $K$  è una costante negativa.

5. Ad ogni punto di rottura si varia la fase di

$$\left\{ \begin{array}{ll} +\nu'_i \frac{\pi}{2} & \text{negli zeri reali negativi, i.e. se } T' > 0, \\ -\nu'_i \frac{\pi}{2} & \text{negli zeri reali positivi, i.e. se } T' < 0 \\ +\mu'_i \pi & \text{nelle coppie di zeri compl.coniugati a parte reale negativa } (\delta' > 0), \\ -\mu'_i \pi & \text{nelle coppie di zeri compl.coniugati a parte reale positiva } (\delta' < 0) \\ -\nu_i \frac{\pi}{2} & \text{nei poli reali negativi, i.e. se } T > 0, \\ +\nu_i \frac{\pi}{2} & \text{nei poli reali positivi, i.e. se } T < 0 \\ -\mu_i \pi & \text{nelle coppie di poli compl.coniugati a parte reale negativa } (\delta > 0), \\ +\mu_i \pi & \text{nelle coppie di poli compl.coniugati a parte reale positiva } (\delta < 0) \end{array} \right.$$

6. I diagrammi esatti si ottengono da quelli asintotici sommando all'ordinata dell'asintotico i termini correttivi relativi ai fattori del primo e del secondo ordine.

**Esempio 7.4.1** Tracciamento dei diagrammi di Bode di

$$W(s) = \frac{200(s+2)}{s(s^2+10s+100)}$$

a) Riscriviamo  $W(s)$  in forma di Bode

$$W(s) = \frac{200 \cdot 2(1+s\frac{1}{2})}{s \cdot 100(1+\frac{1}{10}s+\frac{s^2}{100})} = 4 \frac{(1+s\frac{1}{2})}{s(1+\frac{1}{10}s+\frac{s^2}{100})} = 4 \frac{(1+sT)}{s(1+\frac{2\delta}{\omega_n}s+\frac{s^2}{\omega_n^2})}$$

con  $T = 1$ ,  $\omega_n = 10$ ,  $\delta = 1/2$ .

b) Abbiamo perciò, in ordine di pulsazione crescente,

- un polo nell'origine, con molteplicità 1,
- uno zero di modulo  $|1/T| = 2$ ,
- una coppia di poli complessi coniugati, con pulsazione naturale  $\omega_n = 10$  e smorzamento  $\delta = 0,5$ : essi si trovano nei punti  $-5 \pm 10j\sqrt{0,75} = -5 \pm j5\sqrt{3}$  del piano complesso.

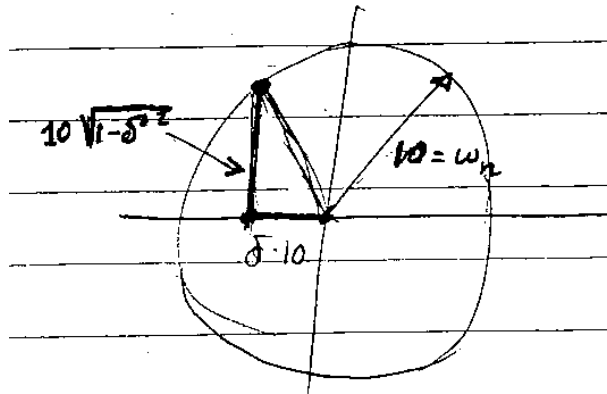


Figura 7.4.1

c) Tracciamento del diagramma di guadagno

- si comincia con il fattore  $4/j\omega$ : si tratta di una retta con pendenza  $-20$  db/decade, che interseca l'asse delle ordinate nel punto

$$20 \log_{10} 4 \sim 12 \text{db};$$

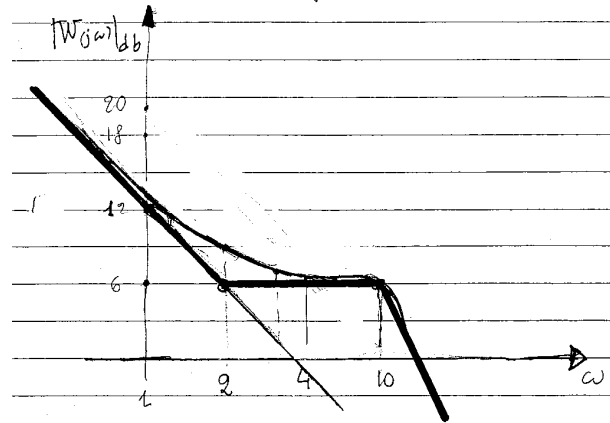


Figura 7.4.2

- per  $\omega = 2$  c'è una pulsazione di rottura, corrispondente a uno zero della f.d.t.: la pendenza della curva di guadagno cresce di  $20$  db/decade, quindi nel diagramma asintotico la pendenza si azzerava fino alla pulsazione di rottura successiva;
- alla pulsazione  $10$  c'è una coppia di poli complessi coniugati: nel diagramma asintotico ha inizio una pendenza di  $-40$  db/decade.

d) Correzioni:  $+3$ db nel punto  $\omega = 2$ ,  $+1$  db nel punto  $\omega = 4$  (un'ottava dopo lo spezzamento) e nel punto  $\omega = 1$  (un'ottava prima dello spezzamento)

Poiché  $\delta$  vale  $1/2$ , non si dà luogo a correzione in  $\omega_n = 10$ .

e) Per il diagramma di fase, si riporta a tratto continuo nella figura A il diagramma asintotico risultante dalla somma dei diagrammi asintotici dei tre fattori; nella figura B si riportano invece gli andamenti con approssimazione lineare di ciascuno dei tre fattori, la cui somma dà luogo all'andamento tratteggiato di figura A.

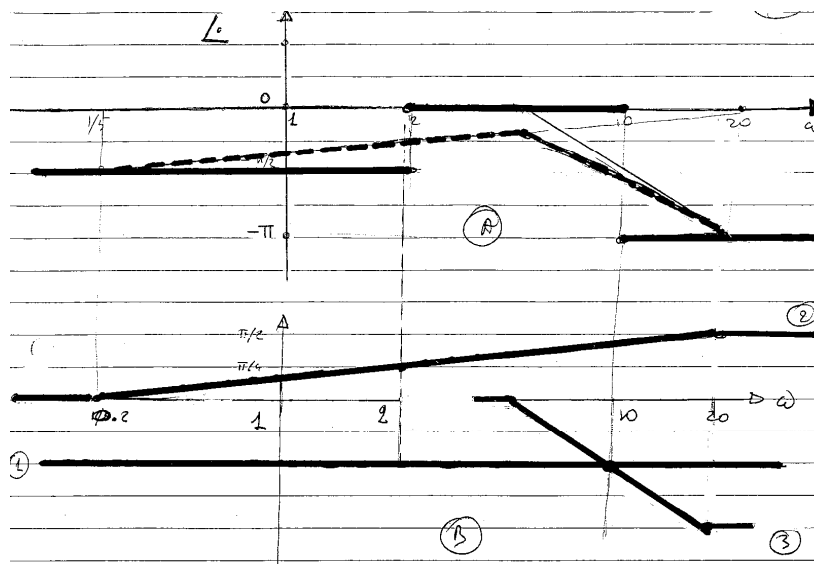


Figura 7.4.3

## 7.5 Esempi di tracciamento

## Esempio 7.5.1

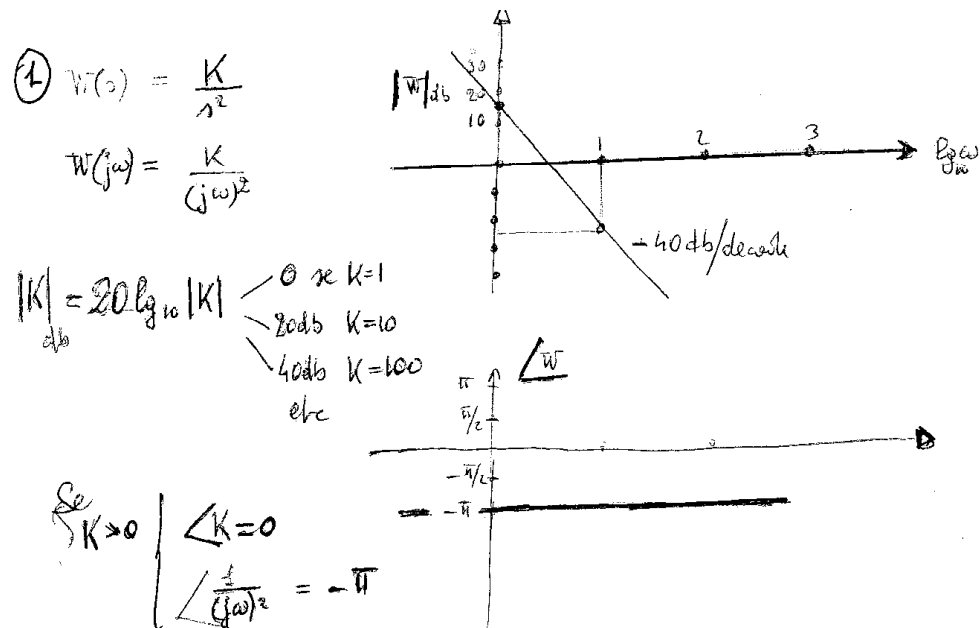


Figura 7.5.1

## Esempio 7.5.2

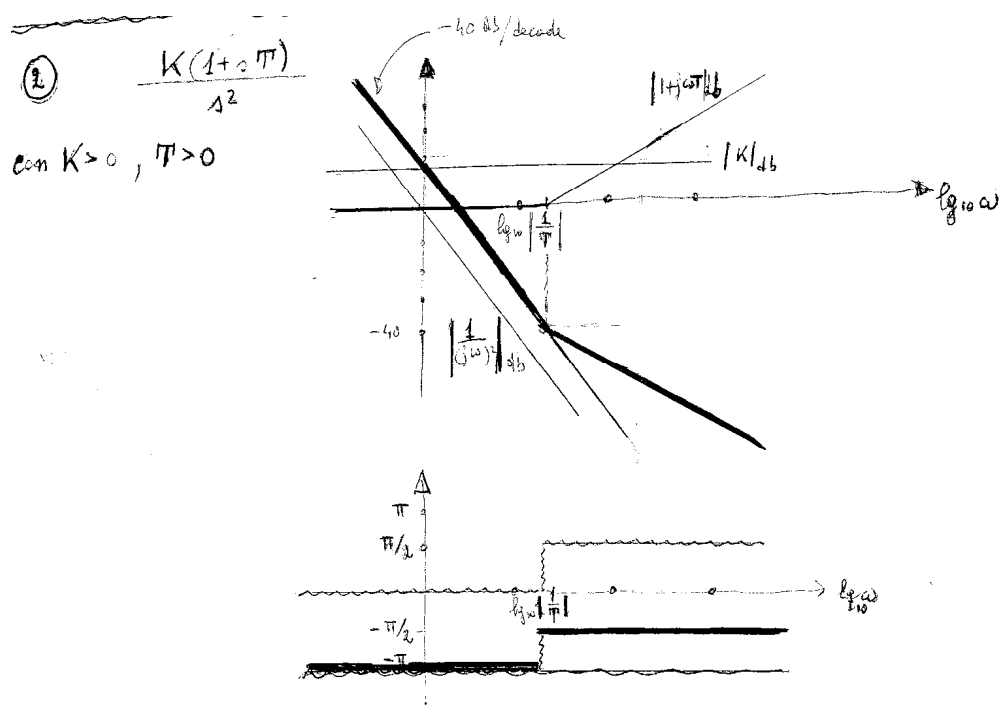


Figura 7.5.2



## Esempio 7.5.3

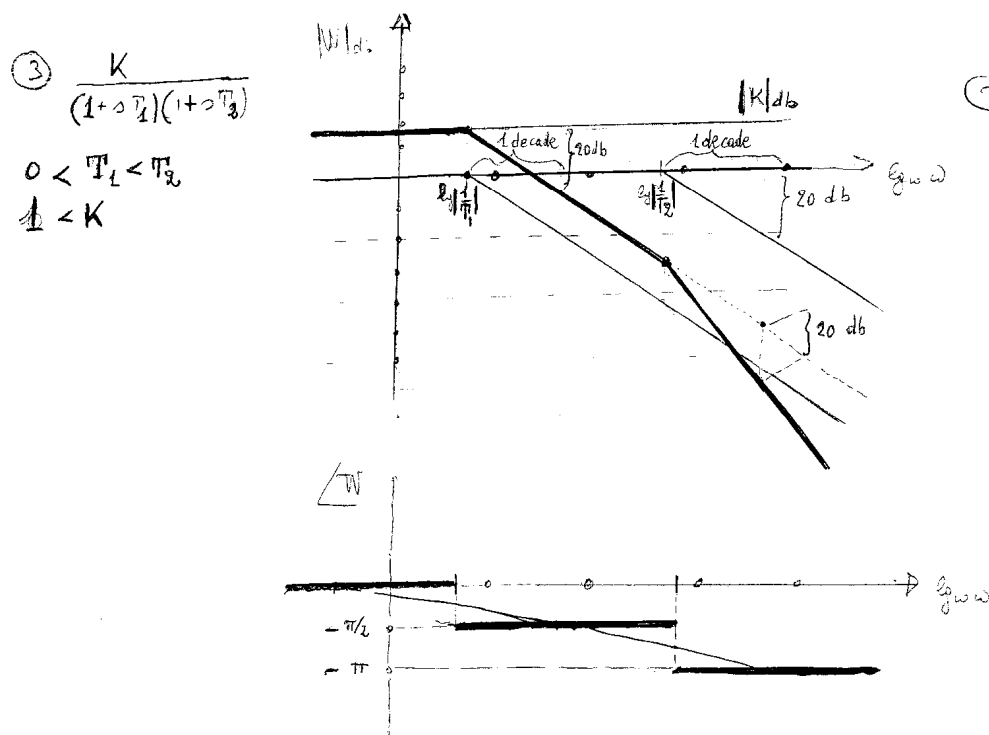


Figura 7.5.3

## Esempio 7.5.4

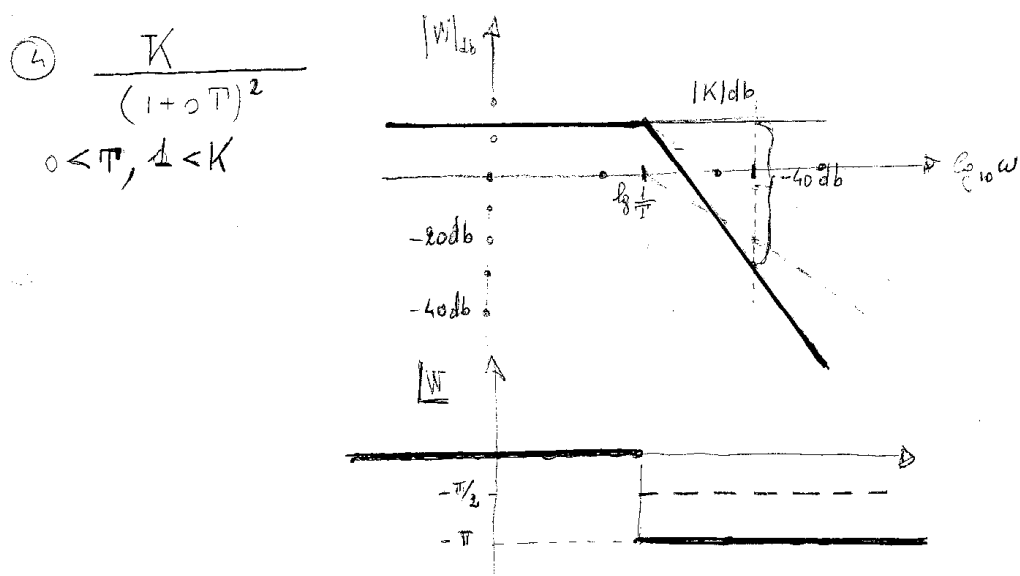


Figura 7.5.4

## Esempio 7.5.5

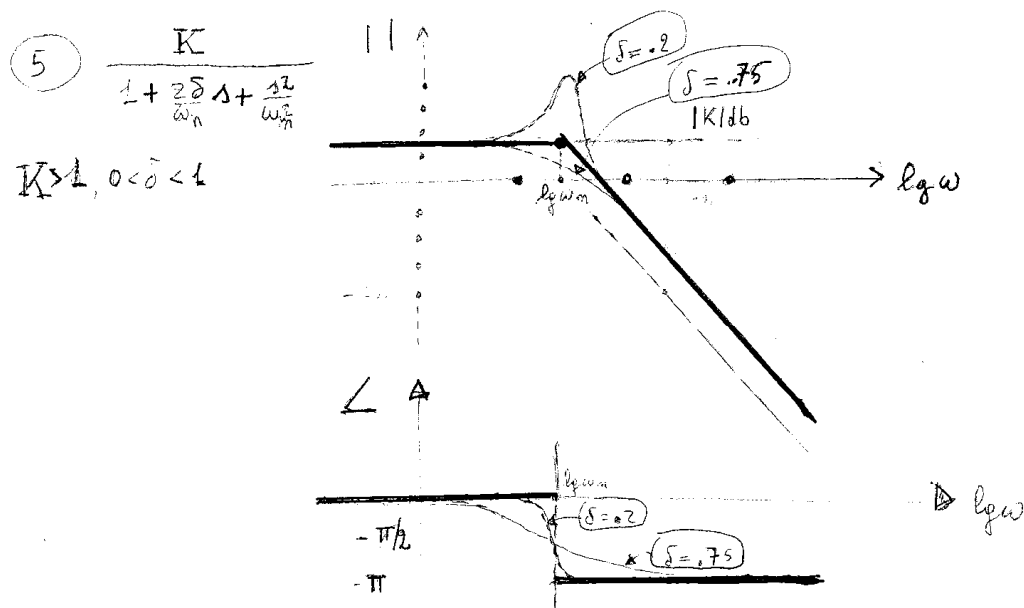


Figura 7.5.5

## Esempio 7.5.6

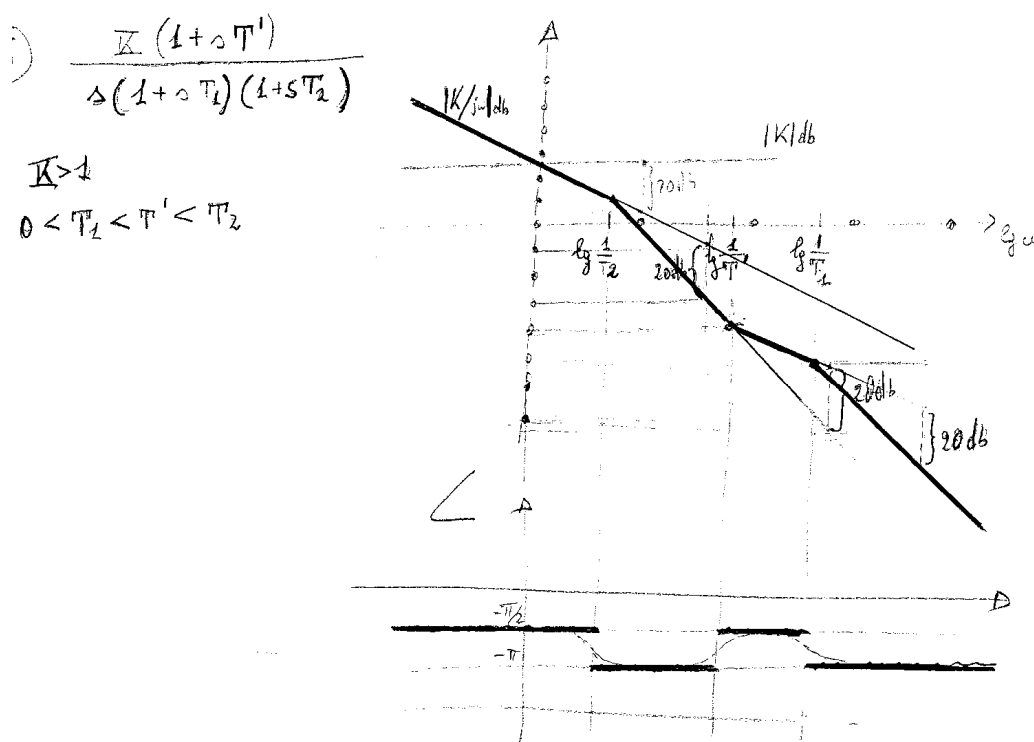


Figura 7.5.6

## 7.6 Complementi

### 7.6.1 Stima della funzione di trasferimento

Spesso è possibile stimare la funzione di trasferimento dai diagrammi di Bode della risposta in frequenza.

- Il primo passo consiste nell'approssimare con segmenti di retta, di pendenza  $20\nu$  db/decade (con  $\nu$  numero intero) il *diagramma del guadagno*;
- i valori di frequenza nei quali si hanno i cambiamenti di pendenza sono le pulsazioni di spezzamento;
- nei poli la pendenza diminuisce, mentre cresce in corrispondenza agli zeri;
- se l'incremento di pendenza è di 40 db/decade, lo spezzamento può corrispondere
  - a un polo reale doppio
  - a una coppia di poli complessi coniugati con frequenza naturale nel punto di spezzamento

Nel secondo caso, lo smorzamento può essere stimato esaminando l'andamento del guadagno nell'intorno del punto di spezzamento.

La curva del guadagno non individua univocamente la  $W(j\omega)$ . Infatti, moltiplicando  $W(s)$  per una funzione "passatutto" del tipo

$$\frac{1 - Ts}{1 + Ts} \quad \text{oppure} \quad \frac{1 - \frac{2\delta}{\omega_n}s + \frac{s^2}{\omega_n^2}}{1 + \frac{2\delta}{\omega_n}s + \frac{s^2}{\omega_n^2}} \quad (7.18)$$

non si altera il diagramma del guadagno, dato che ciascuna funzione ha guadagno di 0 db/decade ad ogni frequenza.

Essa peraltro *altera la fase*. Per la prima delle (7.18), ad esempio, si ha

$$\angle(1 - j\omega T)/(1 + j\omega T) = \angle(1 - j\omega T) - \angle(1 + j\omega T)$$

e d'altra parte

$$\angle(1 - j\omega T) = -\angle(1 + j\omega T)$$

Quindi il diagramma di fase della funzione passatutto, per  $T > 0$  ha l'andamento riportato in figura 7.6.1

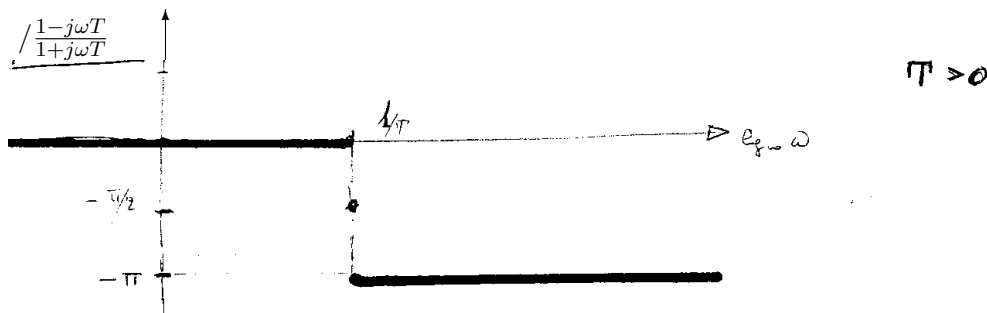


Figura 7.6.1

e la funzione  $\frac{1-Ts}{1+Ts}$  introduce un ritardo di fase di  $\pi$  senza alterare il guadagno della funzione di trasferimento di cui è un fattore.

- ESERCIZIO 7.6.1 Dati i diagrammi di Bode di figura 7.6.2, studiare le proprietà della funzione di trasferimento.

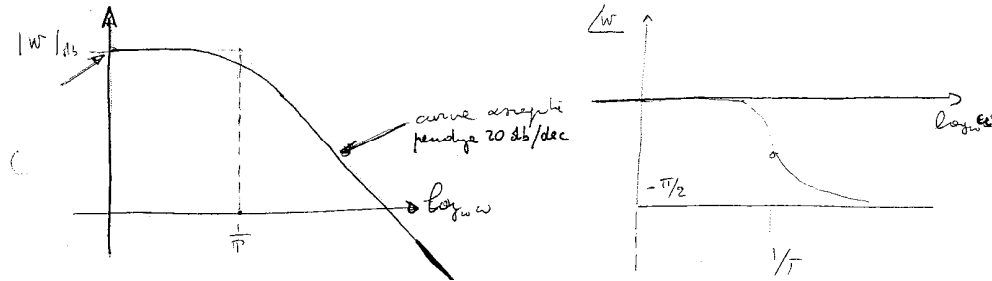


Figura 7.6.2

# Cenni di soluzione. (1) Si determina il punto di spezzamento  $1/|T|$  prolungando i tratti rettilinei: si deve avere un fattore del tipo  $1/(1+sT)$ ; (2) sull'asse delle ordinate si legge il valore  $20 \log_{10} |K|$ , quindi si ricava  $|K|$ ; (3) dalla fase asintotica per  $\omega \rightarrow 0$  si conclude che la costante di Bode  $K$  è positiva, dal fatto che intorno a  $1/T$  la fase decresce, si conclude che  $T$  è positivo. Quindi

$$W(s) = \frac{K}{1+sT} \text{ con } K, T > 0$$

- ESERCIZIO 7.6.2 Dai diagrammi di Bode di figura 7.6.3 ricavare le proprietà di una funzione di trasferimento del secondo ordine.

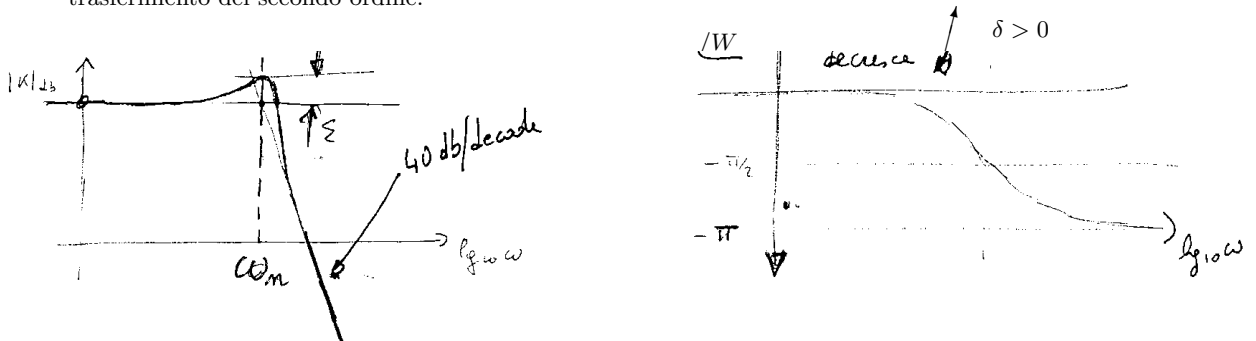


Figura 7.6.3

# Cenni di soluzione. (1) La fase è nulla per  $\omega \rightarrow 0$ , quindi  $K$  è positivo e si può desumere dall'intersezione della curva asintotica del guadagno con l'asse delle ordinate;

(2) il fattore del secondo ordine è un denominatore della funzione di trasferimento, dato che per  $\omega$  grande si ha una pendenza negativa pari a 40 db/decade;

(3) dall'andamento del diagramma asintotico del guadagno si conclude che in  $\omega_n$  c'è uno spezzamento, corrispondente a un polo doppio reale o a una coppia polare complessa coniugata: l'andamento intorno a  $\omega_0$  giustifica l'ipotesi di una coppia complessa coniugata;

Per  $\omega = \omega_n$  risulta

$$\left| \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + \frac{2\delta}{\omega_n} j\omega \right)^{-1} \right|_{\text{db}} = \left| \frac{1}{2\delta} \right|_{\text{db}}$$

(4) se  $\epsilon$  è lo scarto nel punto  $\omega_n$  (vedi figura), allora  $|\delta| = 1/2$  se  $\epsilon = 0$ ,  $|\delta| < 1/2$  se  $\epsilon > 0$ ,  $|\delta| > 1/2$  se  $\epsilon < 0$ ;

nel nostro caso,  $\epsilon$  è positivo, quindi vale la seconda ipotesi: se, ad esempio, sul diagramma di

ampiezza si legge  $\epsilon = 5$  db, allora

$$20 \log_{10} \left| \frac{1}{\delta} \right| = 5 \Rightarrow \log_{10} \left| \frac{1}{\delta} \right| = 1/4 \Rightarrow \left| \frac{1}{2\delta} \right| = 10^{1/4} \Rightarrow |\delta| = \frac{1}{2 \cdot 10^{1/4}};$$

(5) per determinare il segno di  $\delta$ , si osserva che la curva di fase decresce nell'intorno di  $\omega_0$ : quindi deve essere  $\delta > 0$ .

### 7.6.2 Picco di risonanza

Si consideri la funzione

$$W(j\omega) = \frac{1}{1 + \frac{2\delta}{\omega_n} j\omega - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \quad (7.19)$$

L'andamento del guadagno in db della funzione (7.19) è, ovviamente, l'opposto di quello della funzione polinomiale studiata al punto (4) del paragrafo 7.3. Se lo smorzamento  $\delta$  è inferiore a  $1/\sqrt{2}$ , la curva del guadagno ha un massimo per

$$\tilde{\omega} = \omega_n \sqrt{1 - 2\delta}$$

Il guadagno corrispondente alla pulsazione  $\tilde{\omega}$  è  $1/(2\delta\sqrt{1 - \delta^2})$  ovvero, in decibel

$$\begin{aligned} |W(j\tilde{\omega})|_{\text{db}} &= -20 \log_{10} 2 - 20 \log_{10} \delta - 10 \log_{10} (1 - \delta^2) \\ &\sim -6 - 20 \log_{10} \delta = 20 \log_{10} \frac{1}{\delta} - 6 \end{aligned} \quad (7.20)$$

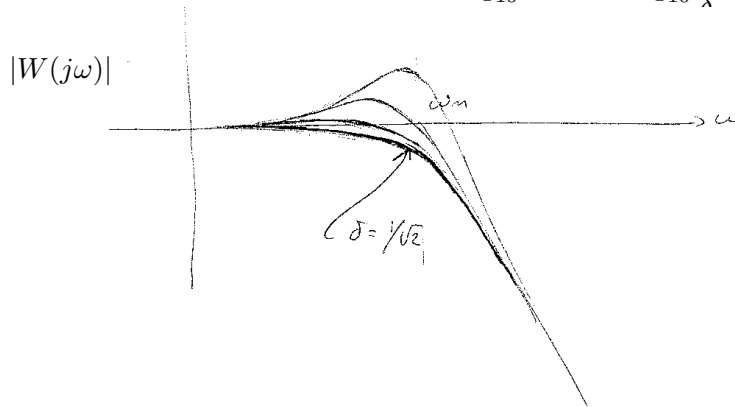


Figura 7.6.4

dove l'approssimazione vale se  $\delta$  è molto prossimo a zero.

La pulsazione  $\tilde{\omega}$ , il cui valore è sempre inferiore a  $\omega_n$ , si dice “pulsazione di risonanza” e, quando  $\delta \rightarrow 0$ , si ha

$$\tilde{\omega} \rightarrow \omega_n \quad \text{e} \quad |W(j\tilde{\omega})|_{\text{db}} \rightarrow +\infty.$$

### 7.6.3 Formula di Bode

Nelle considerazioni che seguiranno, useremo in ascisse il logaritmo neperiano della pulsazione e in ordinate il logaritmo neperiano del modulo (assumeremo quindi come unità di misura il “neper”, associato al segmento che congiunge due valori il cui rapporto è pari ad  $e$ ). Nel diagramma dei moduli abbiamo che

- $|j\omega|_{\text{np}} = \ln |j\omega| = \ln \omega$  è rappresentato da una retta a pendenza unitaria passante per l'origine;

- $|1 + j\omega T|_{\text{np}}$  ha come diagramma asintotico una spezzata costituita da due semirette, ovvero

$$|1 + j\omega T|_{\text{np}} = \begin{cases} \ln 1 = 0 & \text{per } \omega \rightarrow 0: \text{ una semiretta orizzontale;} \\ \ln \omega + \ln |T| & \text{per } \omega \rightarrow +\infty: \text{ una semiretta con pendenza unitaria} \\ & \text{e punto di spezzamento in } \ln |1/T| \end{cases}$$

- etc. per le altre funzioni elementari

Si noti che, per quanto riguarda le pendenze nel diagramma asintotico di ampiezza, a  $\pm 20$  db/decade corrispondono  $\pm 1$  np/np e a  $\pm 40$  db/decade  $\pm 2$  np/np.

**Definizione 7.6.1** [FUNZIONI A FASE MINIMA] Una funzione di trasferimento razionale  $W(s)$  si dice a “fase minima” se è priva di zeri e di poli per  $\Re s \geq 0$

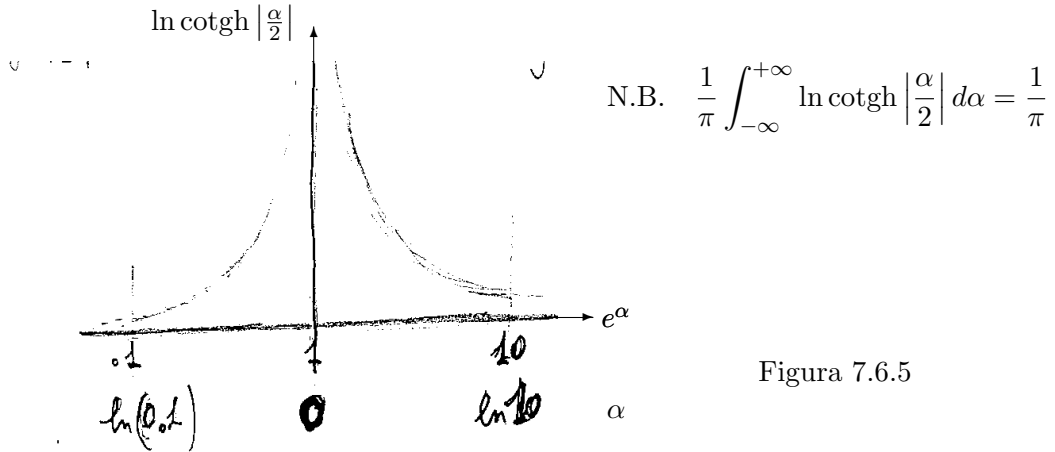
La formula di Bode, che qui ci limitiamo ad enunciare, consente di esprimere, nel caso di funzioni razionali a fase minima, la fase di  $W(j\omega)$  ad un’arbitraria pulsazione  $\bar{\omega}$  in funzione dell’intero andamento del modulo  $|W(j\omega)|_{\text{np}}$ .

**Teorema 7.6.2** [FORMULA DI BODE] Si ponga

$$\begin{aligned} x = \ln \omega, \quad \bar{x} = \ln \bar{\omega} & \quad (\text{scala delle frequenze : logaritmi naturali}) \\ y(\cot) : x \mapsto \omega \mapsto \ln |W(j\omega)| & \quad (\text{scala dei guadagni : logaritmi naturali}) \\ z(\cdot) : x \mapsto \omega \mapsto \angle W(j\omega) & \quad \text{in radianti} \end{aligned}$$

Nell’ipotesi che la funzione di trasferimento razionale  $W(j\omega)$  abbia fase minima e sia  $K > 0$ , risulta<sup>1</sup>

$$z(\bar{x}) = \angle W(i\bar{\omega}) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{dx} \ln \cotgh \left| \frac{x - \bar{x}}{2} \right| dx \quad \blacksquare \quad (7.21)$$



<sup>1</sup>Si ricorda che la cotangente iperbolica di  $\alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ , è definita in termini di seno e coseno iperbolico dalla formula

$$\cotgh \alpha = \frac{\cosh \alpha}{\sinh \alpha} = \frac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{e^\alpha - e^{-\alpha}} = \frac{e^{2\alpha} + 1}{e^{2\alpha} - 1}$$

Come conseguenza del teorema di Bode, la fase alla pulsazione  $\bar{\omega}$  è la media pesata della derivata di  $\ln |W(j\omega)|$ , pensata come funzione di  $\ln \omega$  e assumendo come peso la funzione di figura 7.6.5, con  $\alpha = \ln \omega - \ln \bar{\omega}$ . La formula ha alcune interessanti conseguenze, che illustreremo brevemente.

- Se  $\bar{\omega}$  è lontano dai punti di spezzamento del diagramma di ampiezza, l'andamento di  $\ln |W(j\omega)|$  ha pendenza costante rispetto alla variabile  $\ln \omega$ , quindi la funzione  $dy/dx$  che compare in (7.21) è una costante in ogni intorno di  $\ln \bar{\omega}$  i cui estremi rimangano abbastanza lontani dai punti di spezzamento.

D'altra parte, la funzione  $\frac{1}{\pi} \ln \cotgh \left| \frac{\alpha}{2} \right|$  ha ampiezza trascurabile nei punti esterni all'intervallo  $I = [\ln \frac{1}{10}, \ln 10]$ , nel senso che l'integrale sull'intervallo è molto prossimo a  $\pi/2$ , mentre vale  $\pi/2$  l'integrale da  $-\infty$  a  $+\infty$ .

Conseguentemente, se l'intervallo  $I_{\bar{x}} = [\bar{x} + \ln \frac{1}{10}, \bar{x} + \ln 10]$  è contenuto nella regione dove  $dy/dx$  è costante, si può scrivere

$$\begin{aligned} z(\bar{x}) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{dx} \ln \cotgh \left| \frac{x - \bar{x}}{2} \right| dx \sim \frac{1}{\pi} \int_{I_{\bar{x}}} \frac{dy}{dx} \ln \cotgh \left| \frac{x - \bar{x}}{2} \right| dx \\ &\sim \frac{dy}{dx} \Big|_{x=\bar{x}} \int_{I_{\bar{x}}} \ln \cotgh \left| \frac{x - \bar{x}}{2} \right| dx \sim \frac{\pi}{2} \frac{dy}{dx} \Big|_{x=\bar{x}} \end{aligned}$$

Poiché la pendenza  $dy/dx$  nell'intorno di  $\bar{x} = \ln \bar{\omega}$  è espressa da un numero intero (si usano i neper!), la fase è un multiplo intero di  $\pi/2$ . Si ritrova così, come regola generale per le funzioni a fase minima, un risultato già noto dalla costruzione dei diagrammi di Bode<sup>2</sup>

- Il ricorso alla formula di Bode è particolarmente vantaggioso quando il diagramma di ampiezza non è noto in modo esatto (ad esempio, perché lo si è ottenuto per via sperimentale) in quanto consente egualmente di ricavare il diagramma di fase. In queste situazioni si può procedere

- approssimando il diagramma di ampiezza con una spezzata,
- determinando in corrispondenza la funzione costante a tratti  $dy/dx$

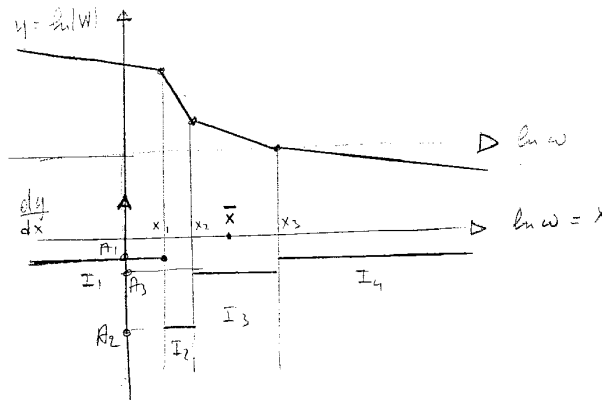


Figura 7.6.6

<sup>2</sup>Con la notazione in decibel, dove la pendenza è di  $20k$  db/decade, la fase risulta  $k\pi/2$

- ricorrendo (vedi figura 7.6.7) alla tabulazione della funzione

$$\beta(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^x \ln \cotgh \left| \frac{\alpha}{2} \right| d\alpha, \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

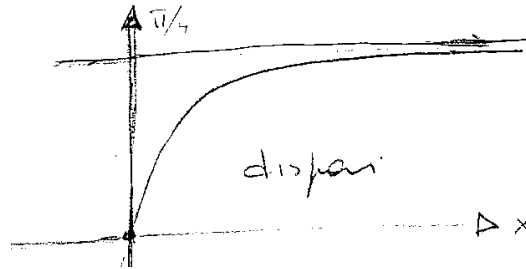


Figura 7.6.7

Infatti la fase in  $\bar{x}$  sarà data da

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{dx} \ln \cotgh \left| \frac{x - \bar{x}}{2} \right| dx \\ &= \frac{A_1}{\pi} \int_{-\infty}^{x_1} \ln \cotgh \left| \frac{x - \bar{x}}{2} \right| dx + \frac{A_2}{\pi} \int_{x_1}^{x_2} \ln \cotgh \left| \frac{x - \bar{x}}{2} \right| dx + \dots + \frac{A_{n-1}}{\pi} \int_{x_n}^{+\infty} \ln \cotgh \left| \frac{x - \bar{x}}{2} \right| dx \\ &= \frac{A_1}{\pi} \int_{-\infty}^{x_1 - \bar{x}} \ln \cotgh \left| \frac{u}{2} \right| du + \frac{A_2}{\pi} \int_{x_1 - \bar{x}}^{x_2 - \bar{x}} \ln \cotgh \left| \frac{u}{2} \right| du + \dots + \frac{A_{n-1}}{\pi} \int_{x_n - \bar{x}}^{+\infty} \ln \cotgh \left| \frac{u}{2} \right| du \\ &= A_1[\beta(x_1 - \bar{x}) - \beta(\infty)] + A_2[\beta(x_2 - \bar{x}) - \beta(x_1 - \bar{x})] + \dots \end{aligned}$$

**Osservazione** Se  $W(s)$  non ha fase minima (o se  $K$  è negativo), la formula di Bode non fornisce risultati corretti. Si consideri ad esempio la funzione

$$W(s) = \frac{2-s}{1+s} = 2 \frac{1 - \frac{1}{2}s}{1+s} = 2 \frac{1 + sT'}{1 + sT} \quad \text{con } T' = -\frac{1}{2}, \quad T = 1, \quad K = 2$$

La pendenza del diagramma delle ampiezze in  $[\ln 2, +\infty)$  è 0, ed una applicazione (errata!) della formula di Bode darebbe fase nulla per grandi valori di  $\omega$ . In realtà su  $[\ln 2, +\infty)$  la fase tende a  $-\pi$  (lo zero in  $T' < 0$  induce un decremento di fase).

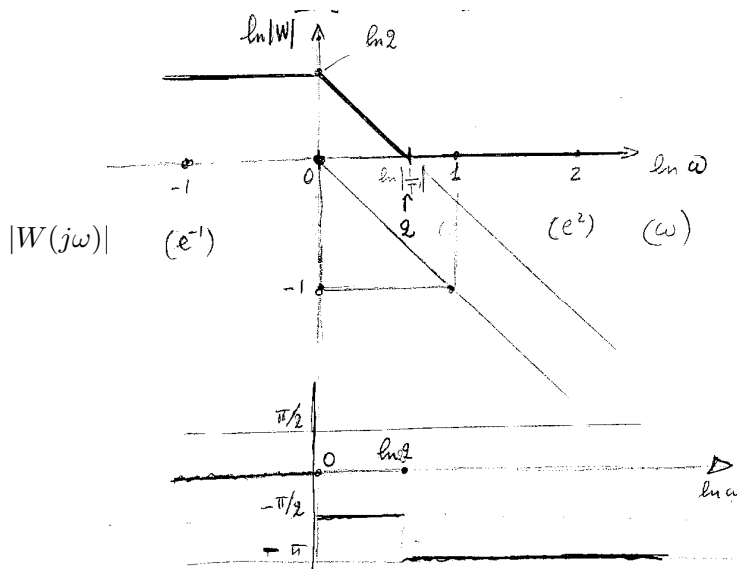


Figura 7.6.8



## 7.7 Riferimenti bibliografici

[Ma ] G.Marro, “Controlli Automatici”, Zanichelli

[LV ] A.Lepschy, U.Viaro “Guida allo studio dei controlli automatici”, Patron

[Si ] N.Sinha, “Control systems” Wiley, 1994