Capitolo 8

Rappresentazione grafica delle funzioni di trasferimento: diagramma di Nyquist

8.1 Proprietà generali del diagramma di Nyquist

Il diagramma di Nyquist (o "polare") della funzione $W(j\omega)$ è definito nel piano di Gauss (x, y) come la curva di rappresentazione parametrica

$$\begin{aligned} x &= \Re\mathrm{e}\, W(j\omega) \\ y &= \Im\mathrm{m}\, W(j\omega) \end{aligned} \tag{8.1}$$

al variare di ω in $\mathbb{R}$. Essa è usualmente graduata nei valori della pulsazione, che vengono specificati lungo la curva in numero sufficiente da rendere agevole l'interpolazione. I valori del moduli $|W(j\omega)|$ e della fase $\angle W(j\omega)$ sono di deduzione immediata, cosicché è agevole passare del diagramma di Nyquist a quelli di Bode e viceversa.

Le seguenti ue proprietà sono di importanza fondamentale per il tracciamento e lostudio del diagramma di Nyquist.

Proprietà 8.1.1 [Coniugio] *Ogni funzione di trasferimento $W(s)$ ottenuta dalla Laplace trasformata di una delle equazioni differenziali introdotte nel capitolo 4 è razionale e a coefficienti reali, quindi soddisfa*

$$\check{W}(j\omega) = \frac{\check{q}(j\omega)}{\check{p}(j\omega)} = \frac{q(-j\omega)}{p(-j\omega)} = W(-j\omega). \tag{8.2}$$

Pertanto, il punto del diagramma di Nyquist corrispondente alla pulsazione $-\omega$ è il complesso coniugato del punto corrispondente alla pulsazione ω e il diagramma di Nyquist relativo alle pulsazioni negative si ottiene per coniugio di quello relativo alle pulsazioni positive, ovvero, gemetricamente, per ribaltamento intorno all'asse x

Si noti che la medesima proprietà vale, più in generale, ogniqualvolta $W(s)$ è la trasformata di una funzione $w(t)$a valori reali e $W(j\omega)$ ne rappresenta la restrizione all'asse immaginario, se il semipiano di convergenza lo include, o la restrizione all'asse immaginario del prolungamento analitico di $W(s)$ in caso contrario.

Si supponga ora che $W(s)$ sia priva di zeri e di poli sull'asse immaginario e sia

$$W(s) = \frac{b_0 + b_1 s + \cdots + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + \cdots + s^n} = K' \frac{(s - \alpha_1')(s - \alpha_2') \cdots (s - \alpha_m')}{(s - \alpha_1)(s - \alpha_2) \cdots (s - \alpha_n)}$$

Sull'asse immaginario risulta allora, per ogni ω

$$W(j\omega) = K' \frac{(j\omega - \alpha_1')(j\omega - \alpha_2') \cdots (j\omega - \alpha_m')}{(j\omega - \alpha_1)(j\omega - \alpha_2) \cdots (j\omega - \alpha_n)},$$

quindi il modulo e la fase di $W(j\omega)$ sono rispettivamente

$$|W(j\omega)| = |K'| \frac{|j\omega - \alpha_1'||j\omega - \alpha_2'| \cdots |j\omega - \alpha_m'|}{|j\omega - \alpha_1||j\omega - \alpha_2| \cdots |j\omega - \alpha_n|}, \tag{8.3}$$

$$\begin{aligned} \angle W(j\omega) &= \angle K' + \angle(j\omega - \alpha_1') + \angle(j\omega - \alpha_2') + \cdots + \angle(j\omega - \alpha_m') \\ &\quad - \angle(j\omega - \alpha_1) - \angle(j\omega - \alpha_2) - \cdots - \angle(j\omega - \alpha_n) \end{aligned} \tag{8.4}$$

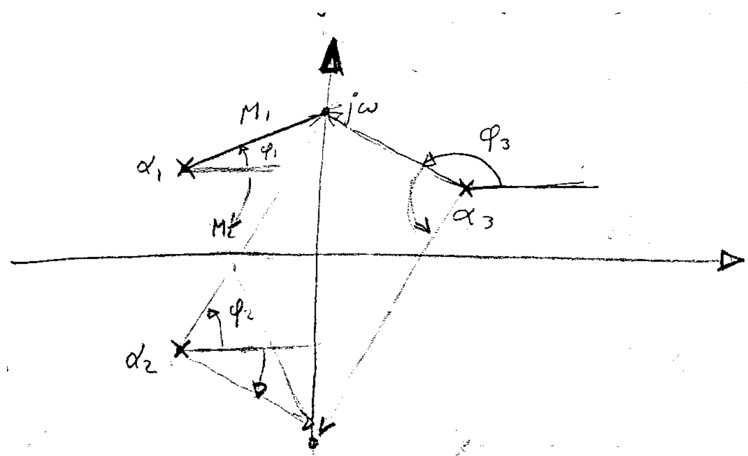


Figura 8.1.1

Dalla figura 8.1.1 è ovvio che la "variazione totale della fase" per ω variabile da $-\infty$ a $+\infty$ è somma di

- un contributo pari a π per ciascuno zero a parte reale negativa e per ciascun polo a parte reale positiva,

- un contributo pari a $-\pi$ per ciascuno zero a parte reale positiva e per ciascun polo a parte reale negativa.

Sulla base di quanto precede, possiamo concludere con la seguente

Proprietà 8.1.2 [Variazione di fase] *Se $W(s)$ è priva di poli e zeri immaginari, e se gli zeri e i poli a parte reale positiva, contati con la rispettiva molteplicità, sono rispettivamente in numero di*[1] *Z_u e P_u, mentre quelli a parte reale negativa sono in numero di Z_s e P_s, la variazione totale di fase quando ω varia da $-\infty$ a $+\infty$ è data da*

$$\begin{aligned} V_f &= \pi(P_u - Z_u) - \pi(P_s - Z_s) && (8.5) \\ &= \pi(P_u - Z_u) - \pi(n - P_u - m + Z_u) \\ &= 2\pi(P_u - Z_u) + \pi(m - n) && (8.6) \end{aligned}$$

[1] pedice "u" per "unstable", pedice "s" per "stable"

Quando $W(s)$ ha $P_{\rm im}$ poli e $Z_{\rm im}$ zeri sull'asse immaginario (contandoli, al solito, con le rispettive molteplicità), la formula (7.5) continua a valere, pur di considerare soltanto la cosiddetta "variazione al finito", ottenuta sommando le variazioni di fase corrispondenti ai percorsi fra due singolarità consecutive

$$j(\omega_\nu + \epsilon) \;\to\; j(\omega_{\nu+1} - \epsilon), \qquad \omega_\nu < \omega_{\nu+1}, \qquad \epsilon > 0$$

lungo l'asse immaginario, quando ϵ tende a zero.
La (7.6) viene sostituita, invece, da

$$V_f = 2\pi(P_u - Z_u) + \pi(m - n) + \pi(P_{\rm im} - Z_{\rm im}). \tag{8.7}$$

8.2 Comportamento del diagramma a pulsazione nulla

Se la funzione di trasferimento è di tipo zero (ossia non ha zeri o poli nell'origine), allora nella funzione di trasferimento, espressa in forma irriducibile, risulta $a_0, b_0 \neq 0$ e si ha

$$\lim_{\omega \to 0_+} W(j\omega) = \lim_{\omega \to 0_+} \frac{b_0 + j\omega b_1 + \cdots}{a_0 + j\omega a_1 + \cdots} = \frac{b_0}{a_o} = W(0) \tag{8.8}$$

Se il tipo è $\nu_0 > 0$ (ossia sono presenti ν_0 poli nell'origine), chiaramente si ha

$$\lim_{\omega \to 0_+} W(j\omega) = \infty \tag{8.9}$$

mentre, se la funzione di trasferimento ha uno zero nell'origine ($\nu_0 < 0$) evidentemente si ha

$$\lim_{\omega \to 0_+} W(j\omega) = 0 \tag{8.10}$$

Nel caso (7.8) può essere interessante conoscere come il diagramma polare lascia l'asse reale quando ω passa dal valore zero a valori positivi.

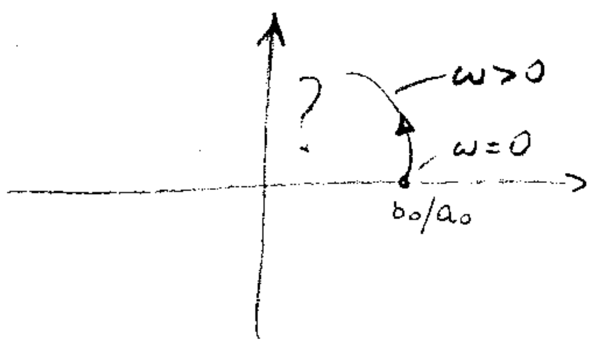


Figura 8.1.2

A tale scopo, consideriamo la derivata di $W(s)$ nell'origine

$$\left.\frac{dW(s)}{ds}\right|_{s=0} = \left.\frac{q'(s)p(s) - q(s)p'(s)}{p^2(s)}\right|_{s=0} = \frac{b_1 a_0 - b_0 a_1}{a_0^2}$$

e poniamo

$$W(j\omega) - W(0) \sim \frac{dW(s)}{ds}\Big|_{s=0} j\omega = \frac{b_0}{a_0}(\frac{b_1}{b_0} - \frac{a_1}{a_0})j\omega = j\omega W(0)(\frac{b_1}{b_0} - \frac{a_1}{a_0})$$

Quindi, purché sia $\frac{b_1}{b_0} \neq \frac{a_1}{a_0}$, la curva lascia l'asse perpendicolarmente, orientata "verso l'alto" se $W(0)$ e $\frac{b_1}{b_0} - \frac{a_1}{a_0}$ hanno segno concorde, "verso il basso" se hanno segno discorde.

Esempio 8.2.1 Si consideri la funzione di trasferimento

$$W(s) = \frac{1+s}{2+s}$$

per la quale si ha

$$W(0) = \frac{1}{2}; \quad \frac{dW}{ds}\Big|_{s=0} = \frac{1}{(2+s)^2}\Big|_{s=0} = \frac{1}{4}$$

Abbiamo allora, per piccoli valori di ω,

$$W(j\omega) \sim W(0) + \frac{1}{4}j\omega = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}j\omega$$

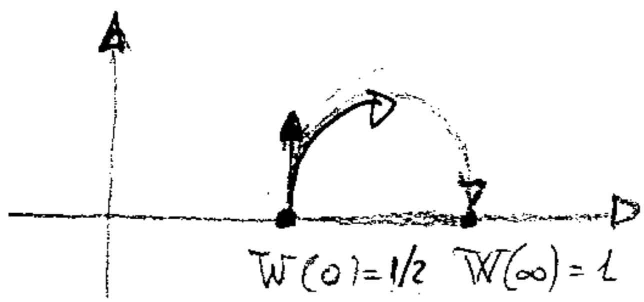


Figura 8.2.1

come risulta evidente dalla figura 8.2.1. Si noti altresì che la variazione di fase è data da

$$V_f = 2\pi(P_u - Z_u) + \pi(m-n) = 0$$

Esempio 8.2.2 Per la funzione di trasferimento

$$W(s) = \frac{-1+s}{2+s+s^2}$$

si ha $W(0) = -\frac{1}{2}$, $\frac{dW}{ds}|_{s=0} = \frac{-s^2+2s+3}{(2+s+s^2)2}|_{s=0} = \frac{3}{4}$, quindi, per piccoli ω,

$$W(j\omega) \sim W(0) + \frac{3}{4}j\omega = -\frac{1}{2} + \frac{3}{4}j\omega$$

in accordo con il diagramma di figura 8.2.2. Si noti che la variazione di fase quando ω varia da 0 a ∞ soddisfa

$$V_f = 2\pi(P_u - Z_u) + \pi(m-n) = -2\pi - \pi = -3\pi$$

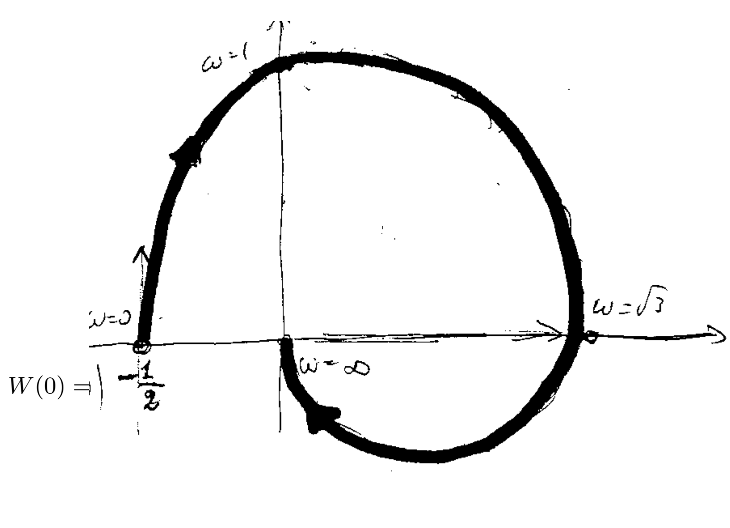


Figura 8.2.2

Per comprendere meglio l'andamento del diagramma di Nyquist, si possono considerare i corrispondenti digrammi di Bode di

$$W(j\omega) = -\frac{1}{2}\,\frac{1 + j\omega(-1)}{1 + \dfrac{2\delta}{\omega_n}j\omega - \dfrac{\omega^2}{\omega_n^2}}$$

con $\omega_n = \sqrt{2}$ e $\dfrac{2\delta}{\omega_n} = \dfrac{1}{2}$, che implica $\delta = 1/2\sqrt{2} \sim 0,35$

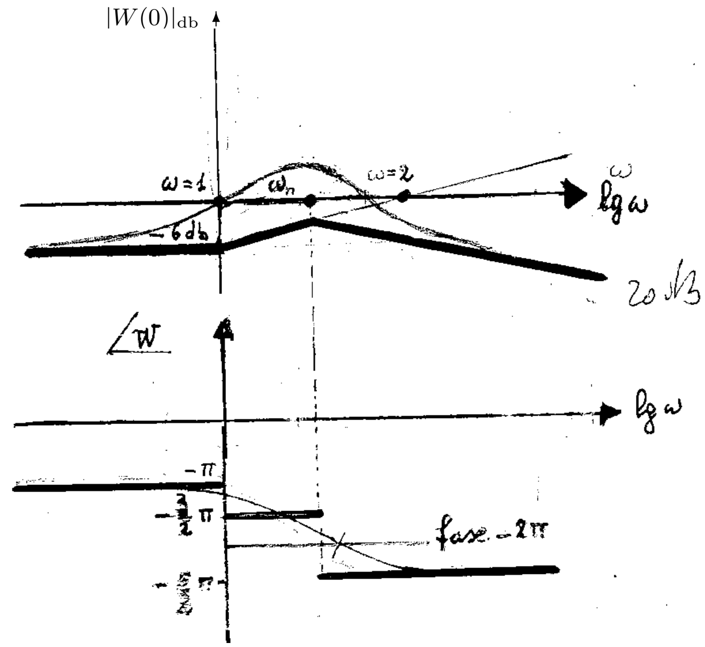


Figura 8.2.3

Dal diagramma di fase è chiara l'esistenza di una pulsazione in corrispondenza alla quale la fase è nulla (mod 2π) e quindi il disgramma di Nyquist attraversa il semiasse reale positivo. Esiste pure una pulsazione al finito cui corrisponde una fase di $\frac{3}{2]\pi}$ (e quindi parte reale nulla). Per un calcolo preciso, si noti che

$$\begin{aligned}
W(j\omega) &= -\frac{1 - j\omega}{(2-\omega)^2 + j\omega} = -\frac{(1-j\omega)(2-\omega^2-j\omega)}{(2-\omega^2)^2+\omega^2}\\
\Re\mathrm{e}\, W(j\omega) &= \frac{2\omega^2-2}{(2-\omega^2)^2+\omega^2} = 0 \text{ per } \omega = 1\\
W(j1) &= -\frac{1-j}{1+j} = j\\
\Im\mathrm{m}\, W(j\omega) &= \frac{j\omega(2-\omega^2)+j\omega}{(2-\omega^2)^2+\omega^2} = \frac{j\omega(3-\omega^2)}{(2-\omega^2)^2+\omega^2} = 0 \text{ per } \omega = \sqrt{3}\\
W(j\sqrt{3}) &= \Re\mathrm{e}\, W(j\sqrt{3}) = 1
\end{aligned}$$

Nel caso (7.9), per $\omega \to 0$ la funzione $W(j\omega)$ è descritta convenientemente dai termini dello svilippo in frazioni parziali relativi al polo nell'origine e, fra questi, da quello di ordine massimo. Se la funzione è

$$W(s) = \frac{b_0 + b_1 s + \cdots + b_m s^m}{s^{\nu_0}(a_{\nu_0} + a_{\nu_0+1}s + \cdots + s^{n-\nu_0})}$$

con b_0 e a_{ν_0} non nulli, per $s \to 0$ si ha

$$W(s) \sim \frac{b_0 + b_1 s}{s^{\nu_0}(a_{\nu_0} + a_{\nu_0+1}s)}$$

e quindi

$$W(j\omega) \sim (-j)^{\nu_0} \frac{a_{\nu_0} b_0 + j\omega(a_{\nu_0} b_1 - a_{\nu_0+1} b_0)}{\omega^{\nu_0}(a_{\nu_0}^2 + a_{\nu_0+1}^2 \omega^2)}$$

in cui il termine in ω^2 può essere trascurato rispetto alla costante e ai termini in ω.
La fase, per piccoli valori di ω, tende allora a

$$-\nu_0 \frac{\pi}{2} + \angle(a_{\nu_0} b_0)$$

mentre il modulo tende, come si è detto, a infinito.
In particolare, se $\nu_0 = 1$ si ha

$$W(j\omega) \sim -j \frac{b_0}{\omega a_1} + \frac{b_1 a_1 - b_0 a_2}{a_1^2} \tag{8.11}$$

e la parte reale tende al valore $\frac{b_1 a_1 - b_0 a_2}{a_1^2}$, che dà luogo a un asintoto verticale nel diagramma di Nyquist.

Esercizio 8.2.3 Si consideri la funzione di trasferimento

$$W(s) = \frac{10}{s(s+1)(s+4)}$$

Anche senza memorizzare la formula (7.11), si ottiene per via diretta

$$W(j\omega) = \frac{10}{j\omega(-\omega^2 + 5j\omega + 4)} \sim \frac{10}{-5\omega^2 + 4j\omega} \sim \frac{10(-5\omega^2 - 4j\omega)}{16\omega^2 + 25\omega^4} \sim -\frac{25}{8} - \frac{j}{\omega}\frac{5}{2},$$

da cui l'andamento di figura 8.2.4.

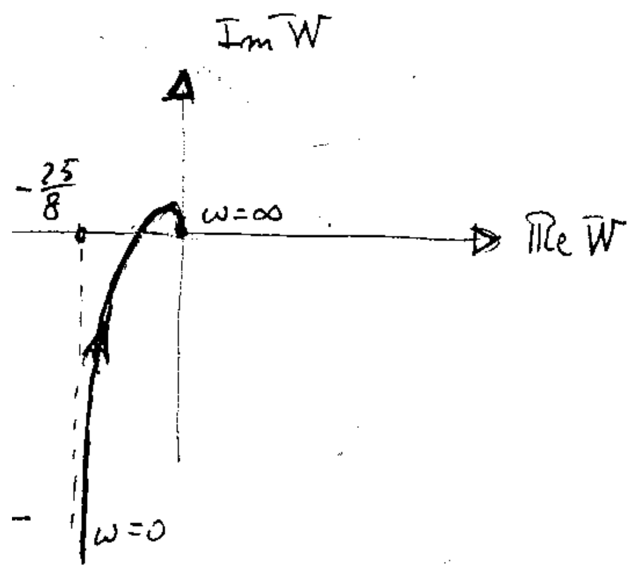


Figura 8.2.4

Infine, nel caso (7.10) in cui $W(s)$ ha μ zeri nell'origine, il comportamento di $W(j\omega)$ per piccoli valori di ω è descritto da

$$W(j\omega) \quad \sim \quad (j\omega)^{\mu} \frac{b_\mu + j\omega b_{\mu+1}}{a_0 + j\omega a_1} = (j\omega)^{\mu} \frac{(b_\mu + j\omega b_{\mu+1})(a_0 - j\omega a_1)}{a_0^2 + \omega^2 a_1^2}$$

$$\sim \quad (j\omega)^{\mu}\Big[\frac{b_\mu}{a_0} + j\omega\frac{b_{\mu+1}a_0 - b_\mu a_1}{a_0^2}\Big]$$

e, in particolare, se $\mu = 1$ (zero semplice nell'origine) si ha

$$W(j\omega) \sim j\omega\frac{b_1}{a_0} - \omega^2\frac{b_2 a_0 - b_1 a_1}{a_0^2}.$$

La fase quando $\omega \to 0_+$ tende allora a $\mu\dfrac{\pi}{2} + \angle(b_\mu/a_0)$.

Esempio 8.2.4 Si consideri la funzione di trasferimento con uno zero semplice nell'origine

$$W(s) = \frac{20s}{(s+1)(s+10)} = \frac{20s}{s^2+11s+10}$$

Si ha allora

$$\begin{aligned} W(j\omega) \quad &\sim \quad j\omega\frac{b_1 a_0}{a_0^2} - \omega^2\frac{b_2 a_0 - b_1 a_1}{a_0^2} \\ &= \quad j\omega\frac{200}{100} = \omega^2\frac{20\cdot 11}{100} = 2j\omega + 2,2\omega^2 \end{aligned}$$

Il diagramma di Nyquist è riportato in figura 8.2.5 (si traccino i diagrammi di Bode!)

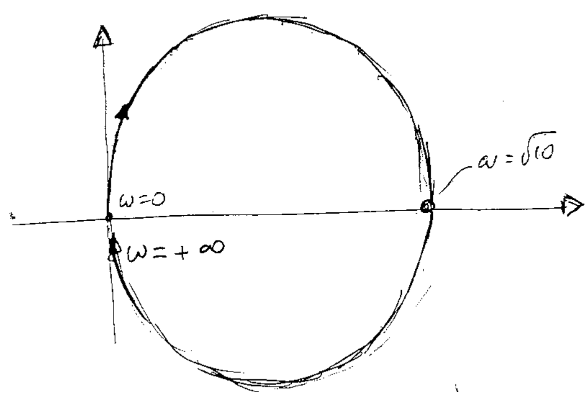


Figura 8.2.5

8.3 Comportamento del diagramma per $\omega \to \infty$

Se nella funzione di trasferimento si ha $m = n$, il diagramma tende a un punto dell'asse reale, che vale b_n quando $W(s)$ sia espressa nella forma

$$W(s) = \frac{b_0 + b_1 s + \cdots + b_n s^n}{a_0 + a_1 s + \cdots + s^n}$$

e vale

$$K\frac{(T_1')^{\nu_1'}(T_2')^{\nu_2'}\cdots(\frac{1}{\omega_{n1}'})^{\mu_1'}\cdots}{(T_1)^{\nu_1}(T_2)^{\nu_2}\cdots(\frac{1}{\omega_{n1}})^{\mu_1}\cdots}$$

nel caso in cui $W(s)$ sia espressa nella forma di Bode del paragrafo 7.2. Se $W(s)$ è strettamente propria, ossia se $m < n$, allora, al divergere di ω, $W(j\omega)$ tende all'origine e si ha l'espressione asintotica

$$\begin{aligned} W(j\omega) &\sim \frac{b_m(j\omega)^m}{(j\omega)^n} = \frac{b_m}{(j\omega)^{n-m}} \to 0 \\ \angle W(j\omega) &\to -\frac{\pi}{2}(n-m) + \angle b_m \end{aligned}$$

(assumendo, come d'uso, che il polinomio a denominatore sia monico). Nella forma di Bode, si ha invece

$$\angle W(j\omega) \to -\frac{\pi}{2}(n-m) + \angle K \frac{(T_1')^{\nu_1'}(T_2')^{\nu_2'} \cdots (\frac{1}{\omega_{n1}'})^{\mu_1'} \cdots}{(T_1)^{\nu_1}(T_2)^{\nu_2} \cdots (\frac{1}{\omega_{n1}})^{\mu_1} \cdots}$$

Esempio 8.3.1 Si consideri la funzione

$$W(s) = \frac{300(s^2+2s+4)}{s(s+10)(s+20)} = \frac{300s^2+600s+1200}{s^3+30s^2+200s} = 6\frac{1+\frac{2\delta}{\omega_n}s+\frac{1}{\omega_n^2}s^2}{s(1+\frac{1}{10}s)(1+\frac{1}{20}s)}$$

con $\omega_n = 2$ e con $2\delta/\omega_n = 1/2$, che implica $\delta = 1/2$. Essendo $n = m = 1$ e $b_m = b_2 = 300$, la fase asintotica per $\omega \to +\infty$ vale $-\pi/2$.
Di seguito riportiamo i diagrammi di Bode e quello di Nyquist di $W(j\omega)$.

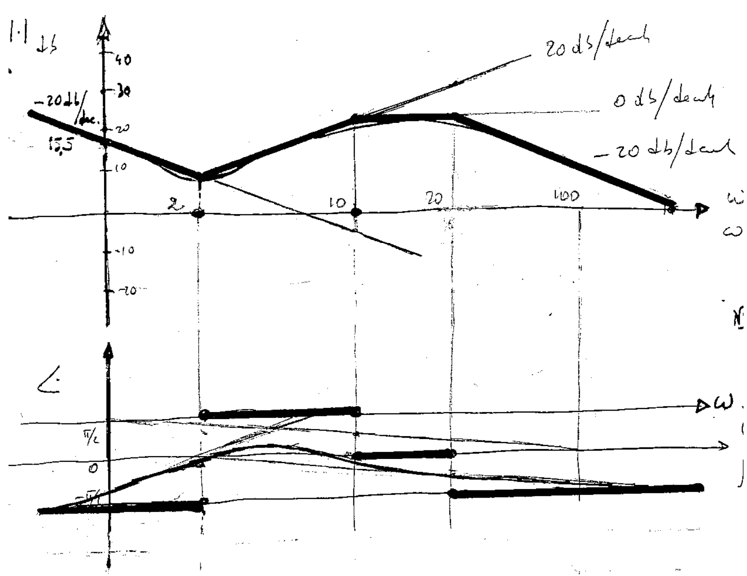
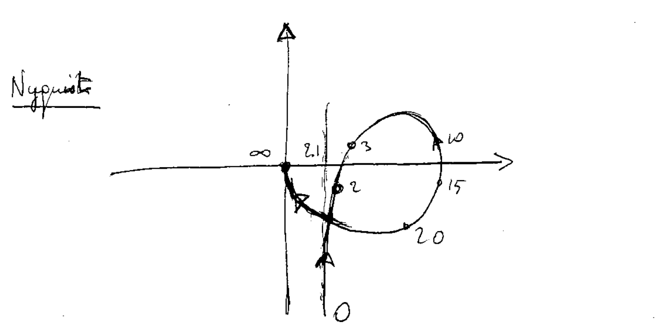


Figura 8.3.1



8.4 Complementi ed esercizi

Esempio 8.4.1 Consideriamo il diagramma di Nyquist di una funzione di trasferimento priva di zeri e dotata soltanto di poli reali e negativi:

$$W(s) = \frac{K'}{(s-\alpha_1)(s-\alpha_2)\cdots(s-\alpha_k)} = \frac{K}{(1-sT_1)(1-sT_2)\cdots(1-sT_k)(8.12)}$$

Nei diagrammi di Bode, il guadagno e la fase sono ovunque decrescenti. Quando ω varia dA $-\infty$ a $+\infty$ si ha una variazione totale di fase pari a

$$V_f = -k\pi \text{ (numero di multipli di } \pi \text{ eguale al numero dei poli).}$$

Di seguito, il diagramma di Nyquist per pulsazioni positive:

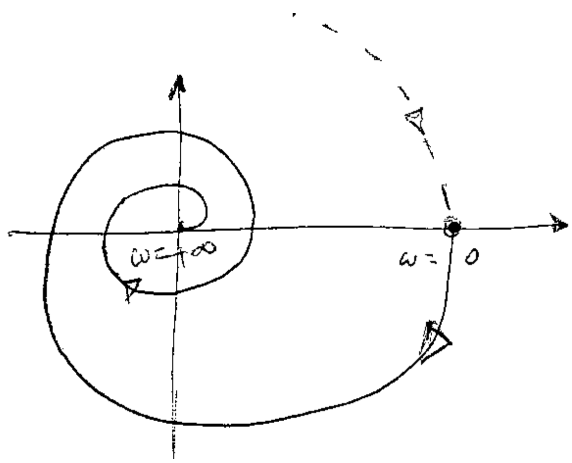


Figura 8.4.1

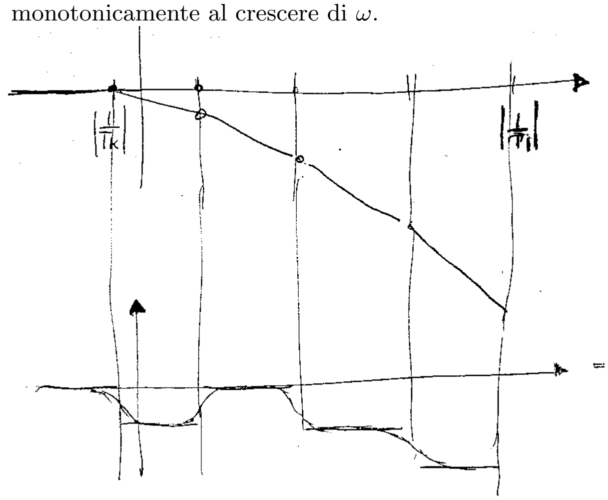
Esercizio 8.4.2 Consideriamo ancora la situazione dell'esercizio precedente, ma supponiamo che alcuni poli possano essere positivi e altri negativi, e quindi che in

$$W(s) = \frac{K}{(1-sT_1)(1-sT_2)\cdots(1-sT_k)}$$

alcuni dei T_i siano di segno positivo e altri di segno negativo. Se li ordiniamo in modo da avere

$$|T_1| \geq |T_2| \geq \cdots \geq |T_k|$$

il diagramma di Bode del guadagno è sempre decrescente al crescere di ω, mentre la fase decresce in corrispondenza a un T_i positivo (polo stabile) e cresce in corrispondenza a un T_i negativo (polo instabile). Il diagramma di Nyquist non ha più la struttura spiraliforme, ma l'ampiezza decresce monotonicamente al crescere di ω.



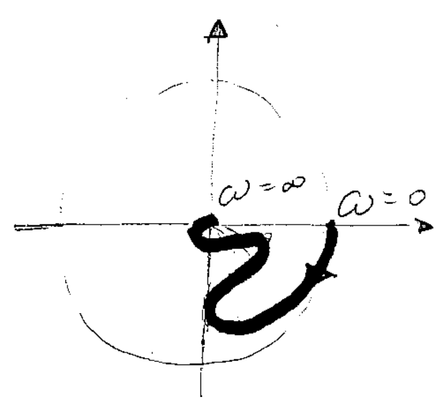


Figura 8.4.2

Nei due esempi precedenti, se manteniamo l'ipotesi di assenza di zeri, ma supponiamo che ci possano essere coppie di poli complessi coniugati, non è detto che il guadagno decresca monotonicamente con la pulsazione: si veda il diagramma di Bode in corrispondenza a piccoli valori di δ. Ovviamente, l'ampiezza nel diagramma di Nyquist non ha più carattere decrescente.

- Esercizio 8.4.1 Si dimostri che una funzione di trasferimento priva di zeri ha un guadagno ovunque decrescente se i suoi poli appartengono tutti ai settori tratteggiati d figura 8.4.3

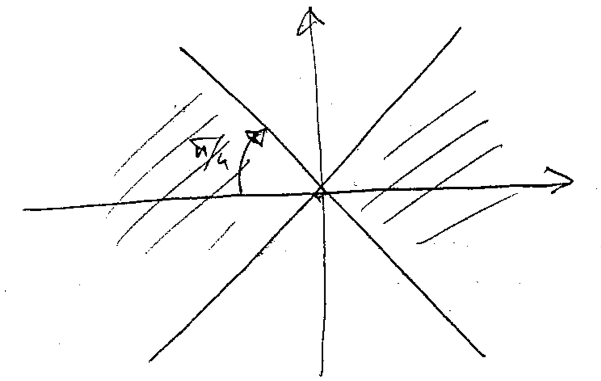


Figura 8.4.3

♯ *Suggerimento. Per i poli reali è ovvio, per quelli complessi coniugati, le correzioni al diagramma asintotico di ampiezza sono in diminuzione, se i poli appartengono ai settori indicati*

- Esercizio 8.4.2 Se una funzione di trasferimento è priva di zeri, la appartenenza di tutti i poli ai settori di figura 8.4.3 è condizione necessaria (oltre che sufficiente) perché il diagramma di guadagno sia ovunque decrescente?

  ♯ *Soluzione. No. Se una coppia di poli complessi coniugati di pulsazione naturale ω_n è preceduta da altri poli che inducono per $\omega < \omega_n$ una curva di guadagno con pendenza negativa, la correzione corrispondente a un valore $\delta < 1/\sqrt{2}$ può lasciare decrescente la curva di guadagno intorno a ω_n, come suggerito dalla figura 8.4.4*

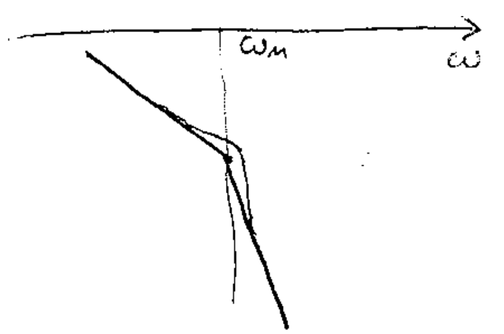


Figura 8.4.4

8.5 Riferimenti bibliografici

[Ma] G.Marro, "Controlli Automatici", Zanichelli

[Si] N.Sinha, "Control systems" Wiley, 1994