

## Capitolo 9

# Stabilità ingresso-uscita dei sistemi lineari

### 9.1 Stabilità BIBO nel dominio del tempo

Consideriamo una mappa ingresso-uscita lineare, invariante, causale

$$\mathcal{A} : \mathcal{D}'_R \rightarrow \mathcal{D}'_R$$

espressa da una convoluzione con la risposta impulsiva  $w$ :

$$\mathcal{A} : u \mapsto \mathcal{A}u = y = u \star w \tag{9.1}$$

con  $w$  avente supporto in  $[0, +\infty)$ .

Limitandoci al caso in cui  $w$  è una funzione localmente integrabile e gli ingressi sono funzioni localmente integrabili con supporto compatto a sinistra, la (9.1) si può riscrivere nella forma

$$y(t) = (\mathcal{A}u)(t) = \int_{-\infty}^t w(t - \tau)u(\tau)d\tau \tag{9.2}$$

Nelle condizioni sopra precisate, abbiamo la

**Definizione 9.1.1** *Il sistema (9.1) (o la mappa ingresso-uscita (9.2)) si dice BIBO<sup>1</sup> stabile se per ogni ingresso in  $L_R^\infty$ , ovvero per ogni ingresso  $u(\cdot)$  “limitato”, nel senso che*

$$\sup_t |u(t)| =: \|u\|_\infty < \infty,$$

*l'uscita forzata corrispondente  $y = \mathcal{A}u$  appartiene a  $L_R^\infty$ , ossia è pure essa limitata, nel senso che*

$$\|\mathcal{A}u\|_\infty = \sup_t |(\mathcal{A}u)(t)| < \infty.$$

La seguente proposizione caratterizza completamente le risposte impulsive dei sistemi BIBO stabili.

---

<sup>1</sup>“bounded input/bounded output”

**Teorema 9.1.2** [STABILITÀ BIBO] Sia  $w(\cdot) \in L_+^{\text{loc}}$  la risposta impulsiva di un sistema lineare, invariante, causale.

Condizione necessaria e sufficiente perché il sistema sia BIBO stabile è che  $w(\cdot)$  appartenga a  $L_+^1$ , ovvero che sia assolutamente integrabile

$$\int_0^{+\infty} |w(t)| dt < \infty \quad (9.3)$$

PROVA La sufficienza della condizione è stata dimostrata nella proposizione 3.2.3, nella quale, al punto (ii), si è anche provata la disuguaglianza

$$\|y\|_\infty \leq \|w\|_1 \|u\|_\infty \quad (9.4)$$

Per verificare che la (9.3) è anche condizione necessario per la stabilità BIBO, ragioniamo per assurdo e supponiamo si abbia

$$\int_0^{+\infty} |w(t)| dt = \infty. \quad (9.5)$$

Notiamo preliminarmente che la funzione  $z(t) = \int_0^t |w(\tau)| d\tau$  è nulla per  $t = 0$ , è assolutamente continua, non decrescente e diverge per  $t \rightarrow +\infty$ , quindi esistono istanti  $0 < t_1 < t_2 < \dots$  tali da aversi

$$z(t_k) = k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (9.6)$$

Data una funzione  $f(\cdot)$ , la funzione “segno di  $f$ ” è definita da

$$\text{sgn } f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } f(t) \geq 0 \\ -1 & \text{se } f(t) < 0 \end{cases}$$

Consideriamo allora la successione di funzioni di ingresso  $u_1(\cdot), u_2(\cdot), \dots$ , definite da

$$u_k(\tau) = \begin{cases} \text{sgn } w(t - \tau) & \text{se } 0 \leq \tau \leq t_k \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases},$$

tutte a supporto compatto e a norma  $L^\infty$  unitaria.

L'uscita  $y_k(\cdot)$  corrispondente all'ingresso  $u_k(\cdot)$  nell'istante  $t_k$  vale

$$\begin{aligned} y_k(t_k) &= (\mathcal{A}u_k)(t_k) = \int_0^{t_k} w(t_k - \tau) \text{sgn } w(t_k - \tau) d\tau \\ &= \int_0^{t_k} |w(t_k - \tau)| d\tau = \int_0^{t_k} |w(\tau)| d\tau = k \end{aligned} \quad (9.7)$$

Successivamente all'istante  $t_k$ , l'uscita  $y_k$  può rimanere limitata oppure no. Se si verifica la seconda eventualità, ovvero se

$$\|y_k\| = \sup_{t \geq 0} |y_k(t)| = \sup_t |(\mathcal{A}u_k)(t)| = +\infty,$$

allora l'ingresso limitato  $u_k$  produce un'uscita  $y_k$  non limitata, e la prova è conclusa. Se invece per ognuna delle uscite  $y_k$  esiste un intero  $M_k$  tale che

$$\|y_k\|_\infty = \sup_t |y_k(t)| < M_k, \quad (9.8)$$

costruiamo un ingresso  $\bar{u}(\cdot)$ , a supporto in  $[0, +\infty)$  e a norma  $L^\infty$  unitaria, ponendo

$$\nu_1 = 1, \nu_2 = 2 + M_{\nu_1}, \nu_3 = 3 + M_{\nu_1} + M_{\nu_2}, \dots$$

$$T_i = t_{\nu_1} + t_{\nu_2} + \dots + t_{\nu_i}$$

$$\bar{u} = u_{\nu_1} \circ_{T_1} (\sigma_{-T_1} u_{\nu_2}) \circ_{T_2} (\sigma_{-T_2} u_{\nu_3}) \circ_{T_3} \dots \quad (9.9)$$

Si noti che ciascuna funzione presente nella catena (9.9) viene ritardata di un tempo  $T_i$  pari all'estremo superiore del supporto dei termini che la precedono e il grafico della funzione  $\bar{u}$  si ottiene "giustapponendo" i grafici di funzioni a supporto compatto e norma  $L^\infty$  unitaria, come illustrato in figura 9.1.1.

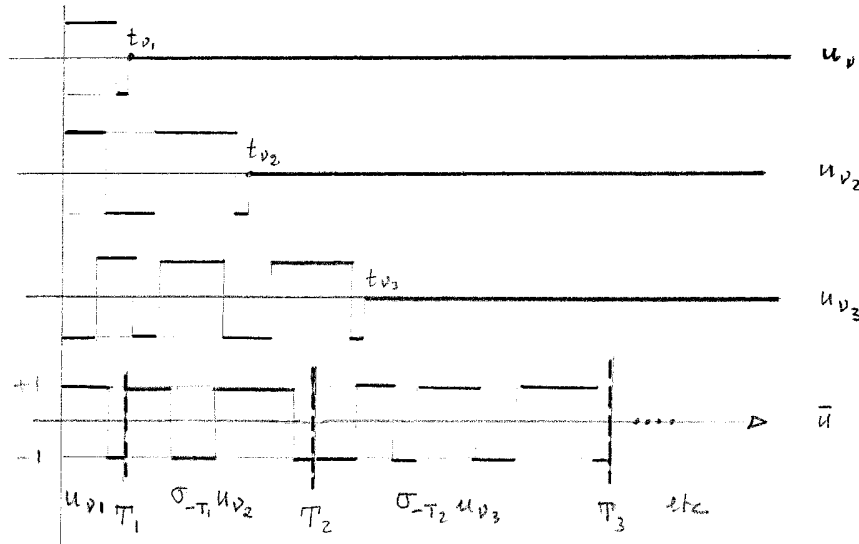


Figura 9.1.1

Nell'istante di concatenamento  $T_i$  la funzione di ingresso  $\sigma_{-T_{i-1}} u_{\nu_i}$  produce un'uscita di valore

$$\nu_i = i + M_{\nu_1} + M_{\nu_2} + \dots + M_{\nu_{i-1}},$$

mentre l'uscita dovuta agli  $i - 1$  ingressi concatenati fino all'istante  $T_{i-1}$  non eccede in modulo il valore

$$M_{\nu_1} + M_{\nu_2} + \dots + M_{\nu_{i-1}}.$$

Tenendo conto della linearità e della causalità della mappa  $\mathcal{A}$ , l'uscita  $\bar{y}(\cdot)$  determinata da  $\bar{u}(\cdot)$  assume negli istanti  $T_i$  un valore

$$\bar{y}(T_i) \geq i \quad (9.10)$$

Ciò prova che  $\bar{y} = \mathcal{A}\bar{u}$  non è una funzione  $L^\infty$  e che all'ingresso limitato  $\bar{u}$  corrisponde un'uscita  $\bar{y}$  non limitata. ■

**Osservazione 1** Se  $w(\cdot) = \delta^{(-1)}(\cdot)$  e se consideriamo un ingresso  $u(\cdot) \in L_R^\infty$  con supporto limitato (i.e. di durata finita), l'uscita corrispondente  $\mathcal{A}u$  appartiene a  $L^\infty$ , perché assume valori il cui modulo è superiormente limitato. In questa situazione, infatti, l'ingresso  $u(\cdot)$  appartiene a  $L_R^\infty \cap L_R^1$ , e la convoluzione della funzione  $\delta^{(-1)}(\cdot) \in L_+^\infty$  con una funzione  $u(\cdot) \in L_R^1$  appartiene a  $L_R^\infty$ , per la proposizione 3.2.3.

In altre parole, esistono sistemi la cui risposta impulsiva non appartiene a  $L_+^1$  (quindi non BIBO stabili), per i quali la generazione di uscite non appartenenti a  $L^\infty$  può essere ottenuta ricorrendo a segnali di ingresso di ampiezza (essenzialmente) limitata, ma soltanto se essi hanno una durata infinita.

**Osservazione 2** Se  $w \in L_+^1$ , anche la distribuzione  $\tilde{w} := w + \alpha\delta$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ , induce una mappa ingresso/uscita BIBO stabile, nel senso che, quando  $u \in L_R^\infty$ , anche  $y = \tilde{w} \star u$  appartiene a  $L_R^\infty$ .

Che cosa si può dire quando la risposta impulsiva è la distribuzione  $w + \alpha\delta^{(1)}$ ?

## 9.2 Stabilità BIBO nel dominio $s$

### 9.2.1 Trasformata di Laplace

Se la funzione  $w(\cdot)$  è in  $L_+^1$  e quindi rappresenta la risposta impulsiva di un sistema BIBO stabile, allora per ogni  $s \in \mathbb{C}$  con  $\Re s \geq 0$  la funzione  $e^{-st}w(t)$  è assolutamente integrabile.

Pertanto  $w(\cdot)$  ammette trasformata di Laplace  $W(s)$ , e il semipiano di assoluta convergenza, e quindi di analiticità della trasformata, è almeno  $\Re s > 0$ . In  $\Re s > 0$  risulta anche

$$|W(s)| \leq \int_0^\infty |w(t)e^{-st}| dt \leq \int_0^\infty |w(t)| dt = \|w\|_1 \quad (9.11)$$

e quindi  $W(s)$  è analitica e limitata nel semipiano aperto  $\Re s > 0$ .

**Definizione 9.2.1** Lo spazio di Hardy  $H^\infty$  consiste delle funzioni complesse di variabile complessa definite in  $\Re s > 0$  e ivi analitiche e limitate<sup>2</sup>.

Quanto visto sopra può allora riassumersi dicendo che la trasformata di Laplace di una funzione  $w(\cdot) \in L_+^1$  appartiene a  $H^\infty$ .

Accenniamo, senza dimostrazione, ad alcune proprietà dello spazio  $H^\infty$ .

H1 Se  $F(s) \in H^\infty$ , allora

$$\|F\|_\infty := \sup_{\Re s > 0} |F(s)| \quad (9.12)$$

definisce una norma, rispetto alla quale  $H^\infty$  è uno spazio completo (i.e. ogni sequenza di Cauchy in  $H^\infty$  converge a una funzione di  $H^\infty$ ).

<sup>2</sup>nel senso che, quando  $F(s) \in H^\infty$ , esiste una costante  $k$  tale che  $\sup_{s: \Re s > 0} |F(s)| < k$ .

H2 Se  $F(s) \in H^\infty$ , per quasi ogni  $\omega \in \mathbb{R}$  esiste finito il “limite tangenziale”

$$F(j\omega) := \lim_{s \in \mathcal{C}_\alpha(j\omega), s \rightarrow j\omega} F(s) \quad (9.13)$$

dove  $\mathcal{C}_\alpha(j\omega)$  è il cono convesso di apertura  $2\alpha > 0$  contenuto in  $\Re s > 0$ , di vertice  $j\omega$  e con asse parallelo all’asse reale (vedi figura 9.2.1).

H3  $\|F\|_\infty$  può essere valutata sull’asse immaginario, risultando

$$\|F\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{\omega \in \mathbb{R}} |F(j\omega)| \quad (9.14)$$

### 9.2.2 Trasformata di Fourier

Se  $w(\cdot) \in L^1_+$ , esiste come ordinario integrale di Lebesgue la trasformata di Fourier

$$\hat{w}(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} w(t)e^{-j\omega t} dt. \quad (9.15)$$

La funzione  $\hat{w}$  ha le seguenti proprietà:

F1  $\|\hat{w}\|_\infty := \sup_{\omega \in \mathbb{R}} |\hat{w}(j\omega)| \leq \|w\|_1$ ;

F2  $\hat{w}(j\omega)$  è funzione continua di  $\omega$ ;

F3  $\lim_{|\omega| \rightarrow \infty} \hat{w}(j\omega) = 0$  (“lemma di Riemann-Lebesgue”);

F4  $\hat{w}(\cdot) = 0$  se e solo se  $w(\cdot) = 0$  come funzione di  $L^1$ .

Dalle considerazioni precedenti si deduce che, per  $\Re s > 0$ ,

$$|\hat{w}(j\omega) - W(s)| \leq \int_0^\infty |w(t)| |e^{-j\omega t} - e^{-st}| dt \quad (9.16)$$

e, quando  $|s - j\omega| \rightarrow 0$ , la (9.16) tende a zero per il teorema di convergenza dominata di Lebesgue<sup>3</sup>. Allora, facendo tendere  $s$  a  $j\omega$  nel cono  $\mathcal{C}_\alpha(j\omega)$ , la funzione  $W(s)$  tende a  $\hat{w}(j\omega)$  ovunque, e  $W(j\omega)$ , definita tramite il limite (9.13), coincide con  $\hat{w}(j\omega)$ , definita tramite l’integrale (9.15):

$$\hat{w}(j\omega) = W(j\omega), \quad \forall \omega \in \mathbb{R}.$$

Inoltre, da H3, F1, F2 e F3 segue

$$\|W\|_\infty = \max_{\omega \in \mathbb{R}} |W(j\omega)|.$$

**Osservazione** Le funzioni  $F(j\omega)$  ottenibili dalle funzioni  $H^\infty$  con il passaggio al limite sul cono sono “molte di più” delle trasformate di Fourier di funzioni  $L^1_+$ . Esistono quindi funzioni  $H^\infty$  che non sono Laplace trasformate di risposte impulsive stabili.

<sup>3</sup>in (9.16) la funzione integranda è maggiorata da  $2|w(t)|$  e se  $s$  tende a  $j\omega$  allora  $|w(t)||e^{-j\omega t} - e^{-st}|$  per  $t$  fissato tende a zero con  $|s - j\omega|$

### 9.2.3 Il caso razionale

Consideriamo ora il caso della risposta impulsiva di un sistema dinamico descritto dall'equazione differenziale

$$p(D)y = q(D)u \quad (9.17)$$

con  $\deg p(s) = n > \deg q(s) = m$  e con  $p(s)$  monico. Come è noto, in queste condizioni

$$w = \delta^{(-1)} h \star \sum_{j=0}^m b_j \delta^{(j)}$$

è una distribuzione regolare, ovvero la funzione  $\delta^{(-1)} \sum_{j=0}^m b_j h^{(j)}$ , con trasformata di Laplace razionale strettamente propria

$$W(s) = \frac{q(s)}{p(s)} = \frac{\tilde{q}(s)}{\tilde{p}(s)} \quad (9.18)$$

dove  $\tilde{q}/\tilde{p}$  è una rappresentazione irriducibile di  $W(s)$

**Proposizione 9.2.2** *Sia  $w(\cdot)$  la risposta impulsiva del sistema (9.17), con  $\deg p > \deg q$ , e sia  $W(s)$  la corrispondente funzione di trasferimento razionale strettamente propria. Si equivalgono i seguenti fatti*

- i)  $W(s)$ , ristretta a  $\Re s > 0$ , è una funzione  $H^\infty$ ;
- ii) la funzione razionale  $W(s)$  non ha poli per  $\Re s \geq 0$ ;
- iii) nella rappresentazione irriducibile (9.18) di  $W(s)$  il polinomio  $\tilde{p}(s)$  non ha zeri in  $\Re s \geq 0$ ;
- iv)  $w(\cdot) \in L_+^1$ .

PROVA (i)  $\Rightarrow$  (ii)  $W(s)$ , se appartiene a  $H^\infty$ , deve essere analitica e quindi priva di poli per  $\Re s > 0$ . Se essa avesse un polo immaginario  $j\omega_0$ , comunque scelto  $M > 0$  esisterebbe un intorno di  $j\omega_0$  in cui risulterebbe  $|W(s)| > M$  e intersecando tale intorno con il semipiano aperto  $\Re s > 0$ , si vede che  $W(s)$  non potrebbe essere limitata nel semipiano, quindi non apparterebbe a  $H^\infty$ .

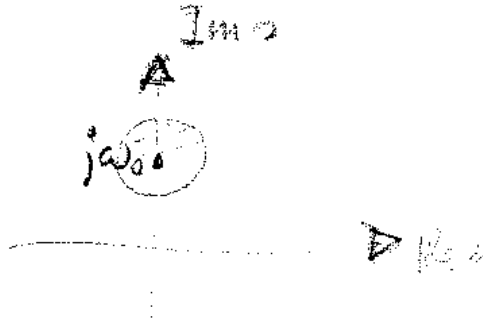


Figura 9.2.1

ii)  $\Rightarrow$  (iii) Poiché  $\tilde{q}(s)/\tilde{p}(s)$  è irriducibile, ogni zero di  $\tilde{p}(s)$  è un polo di  $W(s)$ . Quindi  $\tilde{p}(s)$  non può annullarsi in  $\Re s \geq 0$ .

iii)  $\Rightarrow$  (iv) Tutti i termini dello sviluppo in frazioni parziali di  $W(s)$  hanno per antitrasformate delle funzioni in  $L_+^1$ . Ciò deriva dal fatto che le funzioni  $\delta^{(-1)}t^\nu e^{\alpha t}$  sono assolutamente integrabili per  $\nu \in \mathbb{N}$  e per  $\alpha \in \mathbb{C}$ , con  $\Re \alpha < 0$ .

iv)  $\Rightarrow$  (i) All'inizio di questo paragrafo, si è visto che ogni funzione di  $L_+^1$  ha per trasformata una funzione  $H^\infty$ . ■

**Corollario 9.2.3** *Un sistema lineare descritto da una funzione di trasferimento razionale strettamente propria  $W(s)$  è BIBO stabile se e solo se  $W(s)$  non ha poli a parte reale positiva o nulla.* ■

Si noti che, ai fini della stabilità, nell'analisi di  $W(s)$  si deve guardare agli zeri di  $\tilde{p}(s)$  e non a quelli di  $p(s)$ .

- ESERCIZIO 9.2.1 Si verifichi che una funzione razionale propria, ma non strettamente propria, induce una mappa ingresso/uscita BIBO stabile se e solo se tutti i suoi poli hanno parte reale negativa. E se  $W(s)$  non è propria?

## 9.3 Risposta di un sistema BIBO stabile a ingressi sinusoidali

### 9.3.1 Risposta forzata

Siano  $w(\cdot) \in L_+^1$  la risposta impulsiva di un sistema BIBO stabile,  $W(s)$  la corrispondente funzione di trasferimento in  $H^\infty$  e  $W(j\omega)$  la funzione continua e nulla all'infinito che estende  $W(s)$  all'asse immaginario. In queste condizioni, la risposta forzata del sistema in corrispondenza a ingressi sinusoidali del tipo

$$u(t) = A\delta^{(-1)}(t) \sin(\omega_0 t + \phi) \tag{9.19}$$

ha l'importante proprietà di essere asintoticamente sinusoidale, con la medesima pulsazione di  $u(\cdot)$  e con ampiezza e fase dipendenti dal valore di  $W(j\omega_0)$ .

**Proposizione 9.3.1** *Se  $W(s)$  è la trasformata di Laplace di  $w \in L_+^1$ , l'uscita  $y = w \star u$  corrispondente all'ingresso (9.19) è espressa, per  $t \rightarrow +\infty$ , da*

$$y(t) = |W(j\omega_0)|A \sin(\omega_0 t + \phi + \angle W(j\omega_0)) \tag{9.20}$$

PROVA Essendo

$$A \sin(\omega_0 t + \phi) = \Im A e^{j(\omega_0 t + \phi)}$$

l'uscita  $y(\cdot)$  può essere espressa come

$$\begin{aligned} y(t) &= \Im \int_0^t A e^{j(\omega_0(t-\xi)+\phi)} w(\xi) d\xi = \Im \int_0^t A e^{j(\omega_0 t + \phi)} e^{-j\omega_0 \xi} w(\xi) d\xi \\ &= \Im \left[ A e^{j(\omega_0 t + \phi)} \int_0^t e^{-j\omega_0 \xi} w(\xi) d\xi \right] \end{aligned} \tag{9.21}$$

Poiché  $w(\cdot) \in L^1_+$ , si ha

$$W(j\omega_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t w(\xi) e^{-j\omega_0 \xi} d\xi,$$

e di conseguenza, quando  $t \rightarrow \infty$ ,

$$\left| A e^{j(\omega_0 t + \phi)} W(j\omega_0) - A e^{j(\omega_0 t + \phi)} \int_0^t w(\xi) e^{-j\omega_0 \xi} d\xi \right| \leq A \left| W(j\omega_0) - \int_0^t w(\xi) e^{-j\omega_0 \xi} d\xi \right| \rightarrow 0$$

e anche

$$y(t) - \Im \left( A e^{j(\omega_0 t + \phi)} W(j\omega_0) \right) \rightarrow 0.$$

Asintoticamente, per  $t \rightarrow +\infty$ , si ha allora

$$\begin{aligned} y(t) &= \Im \left( A e^{j(\omega_0 t + \phi)} |W(j\omega_0)| e^{j\angle W(j\omega_0)} \right) = \Im \left( A |W(j\omega_0)| e^{j(\omega_0 t + \phi + \angle W(j\omega_0))} \right) \\ &= |W(j\omega_0)| A \sin(\omega_0 t + \phi + \angle W(j\omega_0)) \end{aligned}$$

■

Si noti che, nel caso di sistemi BIBO stabili, il risultato della precedente proposizione consente di valutare modulo e fase della funzione  $W(j\omega)$  esaminando la risposta asintotica a sinusoidi di diverse pulsazioni, e quindi di ottenere sperimentalmente la funzione di trasferimento.

### 9.3.2 Rappresentazione simbolica delle grandezze sinusoidali

Di solito, quando si fa riferimento a grandezze sinusoidali, si ricorre alla loro *rappresentazione simbolica* mediante numeri complessi; il procedimento è noto da altri corsi e viene qui solo richiamato.

- I numeri complessi formano uno spazio vettoriale di dimensione 2 sul corpo reale, dato che ogni elemento di  $C$  si esprime in uno e un sol modo come combinazione lineare a coefficienti reali dei due numeri complessi 1 e  $j$ , che assumeremo come base.
- Anche le funzioni sinusoidali di assegnata pulsazione  $\omega_0$  formano uno spazio vettoriale  $\mathcal{S}(\omega_0)$  di dimensione 2 sul corpo reale, dato che ogni funzione

$$A \sin(\omega_0 t + \phi) = A \cos \phi \sin(\omega_0 t) + A \sin \phi \cos(\omega_0 t) \quad (9.22)$$

è combinazione lineare delle due funzioni  $\sin(\omega_0 t)$  e  $\cos(\omega_0 t)$  con combinatori reali  $A \cos \phi$  e  $A \sin \phi$ , e d'altra parte ogni combinazione

$$\begin{aligned} &A_1 \sin(\omega_0 t) + A_2 \cos(\omega_0 t) \\ &= \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \left( \frac{A_1}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2}} \sin(\omega_0 t) + \frac{A_2}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2}} \cos(\omega_0 t) \right) \end{aligned}$$

si esprime nella forma (9.22) pur di porre

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$$



e di scegliere  $\phi$  in modo da soddisfare

$$e^{j\phi} = \frac{A_1}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2}} + j \frac{A_2}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2}}$$

- Consideriamo ora la mappa  $\rho : \mathcal{S}(\omega_0) \rightarrow \mathbb{C}$  definita da

$$\rho : A \sin(\omega_0 t + \phi) = A \cos \phi \sin(\omega_0 t) + A \sin \phi \cos(\omega_0 t) \mapsto A \cos \phi + j A \sin \phi = A e^{j\phi} \quad (9.23)$$

Essa fa corrispondere ad ogni grandezza sinusoidale  $A \sin(\omega_0 t + \phi)$  in  $\mathcal{S}(\omega_0)$  un numero complesso le cui componenti  $A \cos \phi$  e  $A \sin \phi$  sulla base  $(1, j)$  di  $\mathbb{C}$  coincidono con le componenti di  $A \sin(\omega_0 t + \phi)$  sulla base  $(\sin(\omega_0 t), \cos(\omega_0 t))$  di  $\mathcal{S}(\omega_0)$ .

La mappa  $\rho$  è lineare: la grandezza sinusoidale

$$A \sin(\omega_0 t + \phi) + B \sin(\omega_0 t + \psi)$$

viene mappata in

$$(A \cos \phi + B \cos \psi) + j(A \sin \phi + B \sin \psi) = A e^{j\phi} + B e^{j\psi}$$

e realizza un isomorfismo fra gli spazi  $\mathcal{S}(\omega_0)$  e  $\mathbb{C}$ .

Possiamo concludere con la seguente

**Proposizione 9.3.2** *Se il sistema è BIBO stabile, ogni (troncamento a tempi positivi di un) ingresso sinusoidale di pulsazione  $\omega_0$  e di rappresentazione simbolica  $Ae^{j\phi}$  dà luogo ad una uscita asintoticamente sinusoidale con la medesima pulsazione e di rappresentazione simbolica*

$$A|W(j\omega_0)|e^{j(\phi+W(j\omega_0))} = W(j\omega_0)Ae^{j\phi} \quad \blacksquare \quad (9.24)$$

In questo senso, per sistemi BIBO stabili,  $W(j\omega)$  viene assunta come funzione di trasferimento alle varie pulsazioni del regime sinusoidale.

### 9.3.3 Risposta in regime permanente

Vogliamo concludere questo paragrafo accennando ad un'altra interpretazione della funzione  $W(j\omega)$ , non legata alla stabilità del sistema.

Consideriamo il sistema lineare descritto dall'equazione differenziale (9.17) e la corrispondente funzione di trasferimento razionale  $W(s) = q(s)/p(s)$ , prolungata dal semipiano  $\Re s > \sigma(w)$  a tutto il piano complesso. Il problema che affronteremo è il seguente:

**Problema 9.3.3** *Sotto quali condizioni, data una funzione di ingresso*

$$u(t) = B \sin(\omega_0 t + \phi), \quad t \in (-\infty, +\infty),$$

*esiste una funzione*

$$u(t) = C \sin(\omega_0 t + \gamma), \quad t \in (-\infty, +\infty),$$

che soddisfa l'equazione (9.17)?

E quando tali condizioni sono soddisfatte, come sono legate fra loro l'ampiezza e la fase dell'ingresso e dell'uscita?

Ricorriamo alla rappresentazione simbolica, ossia alla mappa  $\rho : \mathcal{S}(\omega_0) \rightarrow \mathbb{C}$  considerata sopra, e notiamo che all'operatore di derivazione in  $\mathcal{S}(\omega_0)$  corrisponde in  $\mathbb{C}$  la moltiplicazione per il numero complesso  $j\omega_0$ . Più precisamente, si ottiene il medesimo numero complesso derivando una grandezza sinusoidale e poi cercando la rappresentazione simbolica del risultato ottenuto, oppure rappresentando simbolicamente la grandezza sinusoidale con un numero complesso e moltiplicando quest'ultimo per  $j\omega_0$ :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}(\omega_0) & \longrightarrow & \mathcal{S}(\omega_0) \\ \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \end{array}$$

Pertanto, se la funzione sinusoidale  $C \sin(\omega_0 t + \gamma)$  è rappresentata dal numero complesso  $Ce^{j\gamma}$ , la funzione  $\sum_h c_h D^h C \sin(\omega_0 t + \gamma)$  è rappresentata dal numero complesso  $\sum_h c_h (j\omega_0)^h C e^{j\gamma}$ .

**Lemma 9.3.4** Se  $j\omega_0$  è uno zero del polinomio  $\sum_{h=0}^{\nu} c_h s^h$ , allora ogni funzione  $f \in \mathcal{S}(\omega_0)$  soddisfa l'equazione omogenea

$$\sum_{h=0}^{\nu} c_h D^h f = 0 \quad (9.25)$$

Viceversa, se  $f \neq 0$  è un elemento di  $\mathcal{S}(\omega_0)$  e soddisfa l'equazione (9.25), allora  $j\omega_0$  è uno zero del polinomio  $\sum_{h=0}^{\nu} c_h s^h$ .

PROVA Se  $Ce^{j\gamma}$  è il numero complesso che rappresenta la funzione sinusoidale  $f(\cdot) \in \mathcal{S}(\omega_0)$ , in rappresentazione simbolica la (9.25) equivale alla condizione

$$\sum_{h=0}^{\nu} c_h (j\omega_0)^h C e^{j\gamma} = 0. \quad (9.26)$$

Se  $f(\cdot) \neq 0$ , allora  $C$  non è nullo e si conclude che in  $j\omega_0$  si annulla il polinomio:  $\sum_{h=0}^{\nu} c_h (j\omega_0)^h = 0$ . Viceversa, se  $\sum_{h=0}^{\nu} c_h (j\omega_0)^h = 0$ , ogni numero complesso  $Ce^{j\gamma}$  soddisfa la (9.26). ■

La proposizione che segue risolve il problema che abbiamo posto.

**Proposizione 9.3.5** Con riferimento all'equazione (9.17)

- i) se  $j\omega_0$  è uno zero comune a  $p(s)$  e a  $q(s)$ , l'equazione è soddisfatta per ogni  $y$  e  $u$  in  $\mathcal{S}(\omega_0)$ ;
- ii) se  $p(j\omega_0) \neq 0$ , allora per ogni  $u \in \mathcal{S}(\omega_0)$ , con rappresentazione simbolica  $Be^{j\beta}$ , l'equazione (9.17) ha una e una sola soluzione  $\bar{y} \in \mathcal{S}(\omega_0)$ , con rappresentazione simbolica

$$Ae^{j\alpha} = W(j\omega_0)Be^{j\beta} \quad (9.27)$$

Se, in particolare, risulta  $q(j\omega_0) = 0$ , allora la soluzione è  $\bar{y} = 0$ .

iii) se  $p(j\omega_0) = 0$  e  $q(j\omega_0) \neq 0$ , l'equazione (9.17) ammette soluzioni  $y \in \mathcal{S}(\omega_0)$  solo in corrispondenza all'ingresso nullo, e in tal caso ogni  $y \in \mathcal{S}(\omega_0)$  risolve (9.17).

PROVA Una coppia di funzioni  $u, y \in \mathcal{S}(\omega_0)$ , di rappresentazione simbolica  $Be^{j\beta}$  e  $Ae^{j\alpha}$ , risolve la (9.17) se e solo se

$$p(j\omega_0)Ae^{j\alpha} = q(j\omega_0)Be^{j\beta},$$

per quanto affermato prima del lemma 9.3.4. Ma allora le conclusioni della proposizione 9.3.5 sono una conseguenza immediata del lemma. ■

Nei casi (ii) e (iii), gli zeri immaginari di  $p(s)$  sono le cosiddette “pulsazioni di risonanza” del sistema e quelli immaginari di  $q(s)$  sono le “pulsazioni di antirisonanza”.

Se  $p(j\omega_0) = 0$ , si può avere una uscita sinusoidale non nulla in corrispondenza all'ingresso nullo; se  $q(j\omega_0) = 0$ , si può avere una uscita nulla in corrispondenza a un ingresso sinusoidale non nullo.

Se  $j\omega_0$  non è zero di  $p(s)$ , chiameremo “risposta permanente” del sistema (9.17), in corrispondenza all'ingresso  $u(t) = B \sin(\omega_0 t + \beta)$  l'unica soluzione  $y_p(\cdot) \in \mathcal{S}(\omega_0)$  di rappresentazione simbolica (9.27).

**Osservazione 1** Quando sia nota la risposta permanente  $y_p(\cdot)$  corrispondente all'ingresso  $B \sin(\omega_0 t)$ , si può calcolare la risposta  $y(\cdot)$  prodotta dall'ingresso

$$u(t) = \delta^{(-1)} B \sin(\omega_0 t) \tag{9.28}$$

quando siano assegnate le condizioni iniziali

$$\mathbf{x}(0_+) = \begin{bmatrix} y(0_+) \\ y^{(1)}(0_+) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(0_+) \end{bmatrix} \tag{9.29}$$

attraverso il calcolo della soluzione dell'equazione omogenea  $p(D)y = 0$ .

A tale scopo, si può notare che il valore in  $t = 0$  dell'uscita in regime permanente  $y_p(t) = A \sin(\omega_0 t + \alpha)$  si ricava dalla sua rappresentazione simbolica  $Ae^{j\alpha}$  prendendone il coefficiente dell'immaginario  $A \sin \alpha$ , e che il vettore delle condizioni in  $t = 0$  corrispondente all'uscita in regime permanente  $y_p(\cdot)$  è dato da

$$\mathbf{x}_p(0) = \begin{bmatrix} y_p(0) \\ y_p^{(1)}(0) \\ \vdots \\ y_p^{(n-1)}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \sin \alpha \\ \omega_0 A \sin \left( \alpha + \frac{\pi}{2} \right) \\ \vdots \\ \omega_0^{n-1} A \sin \left( \alpha + (n-1) \frac{\pi}{2} \right) \end{bmatrix}$$

Posto  $\mathbf{x}_{\text{hom}}(0) := \mathbf{x}(0_+) - \mathbf{x}_p(0)$ , la soluzione  $y_{\text{hom}}(\cdot)$  dell'equazione omogenea

$$p(D)y = 0, \quad \text{soddisfacente le condizioni} \quad \begin{bmatrix} y_{\text{hom}}(0) \\ y_{\text{hom}}^{(1)}(0) \\ \vdots \\ y_{\text{hom}}^{(n-1)}(0) \end{bmatrix} = \mathbf{x}_{\text{hom}}(0),$$

sommata alla soluzione permanente  $y_p(\cdot)$  precedentemente determinata,

$$y(t) = y_{\text{hom}}(t) + y_p(t) \quad (9.30)$$

soddisfa l'equazione (9.17) in corrispondenza all'ingresso (9.28) e alle condizioni iniziali (9.29).

Se il sistema proprio (9.17) è BIBO stabile e se i polinomi  $p(s)$  e  $q(s)$  sono coprimi, allora la componente libera  $y_{\text{hom}}$  per  $t \rightarrow +\infty$  tende a zero e  $Ae^{j\alpha}$  rappresenta il comportamento asintotico dell'uscita qualunque sia la condizione iniziale, quando l'ingresso è  $\delta^{(-1)}B \sin(\omega_0 t + \beta)$ .

**Osservazione 2** Al variare della pulsazione  $\omega$  i sistemi strettamente propri sono *passa-basso*, perchè alle alte frequenze  $W(j\omega)$  tende a zero. Ciò significa che in regime sinusoidale permanente, una sinusoide in ingresso viene attenuata e quando  $\omega$  tende a infinito viene annullata, nel senso che l'uscita corrispondente  $y_p$  è nulla.

## 9.4 Polinomi strettamente hurwitziani (SH)

**Definizione 9.4.1** Un polinomio  $h(s) \in \mathbb{R}[s]$  si dice strettamente hurwitziano (SH) se tutti i suoi zeri hanno parte reale strettamente negativa

Il criterio di stabilità BIBO enunciato nella proposizione 9.2.2 fa riferimento agli zeri del polinomio  $\tilde{p}(s)$ , denominatore della funzione razionale  $W(s)$  espressa in forma irriducibile, e stabilisce che un sistema avente  $W(s)$  come funzione di trasferimento è BIBO stabile se e solo se tali zeri hanno parte reale negativa, ovvero se e solo se  $\tilde{p}(s)$  è SH.

Com'è noto, la determinazione per radicali degli zeri di un polinomio di grado superiore al quarto non è in generale possibile. Esistono tuttavia metodi che permettono di stabilire se un polinomio è SH senza determinarne esplicitamente gli zeri, e ciò ricorrendo a tecniche di Algebra elementare (che, per il criterio di Routh, si riducono, come vedremo, all'algoritmo di divisione di Euclide).

Prima di enunciare e di provare due criteri di stabilità, vogliamo ricordare una semplicissima condizione necessaria per la stretta hurwitzianità, espressa dalla seguente *regola dei segni di Cartesio*.

**Proposizione 9.4.2** [REGOLA DI CARTESIO] *Condizione necessaria perché*

$$h(s) = \sum_{i=0}^n a_i s^i \in \mathbb{R}[s]$$

*sia strettamente hurwitziano è che tutti i suoi coefficienti siano non nulli e abbiano il medesimo segno. La condizione è anche sufficiente per i polinomi di grado non superiore a due.*

PROVA fattorizziamo  $h(s)$  come prodotto di fattori irriducibili in  $\mathbb{R}[s]$ , del primo e del secondo grado

$$h(s) = c \prod_j (s + \alpha_j) \prod_i (s^2 + 2\delta_i \omega_{ni} s + \omega_{ni}^2)$$

Se tutte le radici hanno parte reale negativa, deve essere

$$\begin{aligned} \alpha_j &> 0, & \forall j \\ \delta_i &> 0, \quad \omega_{ni} > 0, & \forall i \end{aligned}$$

e tutti i coefficienti di  $h(s)/c$  hanno segno strettamente positivo, ovvero tutti i coefficienti di  $h(s)$  hanno lo stesso segno (tutti positivi, o tutti negativi).

Se il polinomio  $p(s)$  ha grado 1, è evidente che la sua radice è negativa se e solo se entrambi i coefficienti hanno lo stesso segno.

Se  $p(s) = a_2s^2 + a_1s + a_0$  e i coefficienti sono tutti positivi (alla stessa conclusione si perviene se sono tutti negativi), le radici

$$s_{\pm} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0}}{2a_2}$$

hanno parte reale negativa se  $a_1^2 - 4a_2a_0 < 0$ , mentre sono entrambe reali e negative se  $a_1^2 - 4a_2a_0 \geq 0$ , perchè allora risulta  $\sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0} < |a_1|$ . ■

Se  $p(s)$  ha grado  $n > 2$ , la condizione che i suoi coefficienti abbiano tutti lo stesso segno non basta a garantirne la stretta hurwitzianità. Si consideri ad esempio il polinomio

$$(s^2 + \alpha)(s + 1) = s^3 + s^2 + \alpha s + \alpha, \quad \alpha > 0$$

I suoi coefficienti sono tutti positivi, ma non è strettamente hurwitziano, perché ha zeri immaginari.

Il polinomio

$$(s^2 - \epsilon s + \alpha)(s + 1) = s^3 + (1 - \epsilon)s^2 + (\alpha - \epsilon)s + \alpha$$

ha coefficienti positivi se  $\alpha > 0$  e se  $\epsilon > 0$  è scelto abbastanza piccolo. Tuttavia il polinomio  $s^2 - \epsilon s + \alpha$  ha zeri

$$\frac{\epsilon}{2} \pm j \sqrt{\alpha - \frac{\epsilon^2}{4}}$$

con parte reale positiva.

## 9.5 Funzioni senza perdite e polinomi strettamente hurwitziani

**Definizione 9.4.1** [FUNZIONI PR E LPR] Una funzione razionale e coefficienti reali  $W(s)$  si dice “positiva reale” (PR) se per  $\Re s > 0$

i)  $W(s)$  è analitica,

ii)  $\Re W(s) \geq 0$

e si dice “senza perdite” (LPR = lossless positive real) se è positiva reale e

iii)  $\Re W(j\omega) = 0$  in ogni punto dell’asse immaginario in cui  $W$  è analitica.

**Esempio 9.4.1** La funzione  $\frac{1}{s+1}$  è PR, ma non LPR, la funzione  $\frac{1}{s}$  è LPR, la funzione  $\frac{1}{s^2}$  non è PR, quindi non è LPR.

**Lemma 9.5.2** *Le funzioni positive reali costituiscono un sottoinsieme del corpo delle funzioni razionali  $\mathbb{R}(s)$  chiuso rispetto*

- a) alla somma (ma non alla sottrazione!);
- b) al prodotto per uno scalare non negativo;
- c) alla composizione di funzioni;
- d) al passaggio alla funzione reciproca (di una funzione non nulla).

PROVA I punti (a) e (b) sono ovvi: se due funzioni  $W(s)$  e  $G(s)$  hanno le proprietà (i) e (ii) della definizione 9.5.1. ovviamente anche  $W(s) + G(s)$  e  $\alpha W(s)$ ,  $\alpha > 0$  hanno le stesse proprietà.

Per il punto (c), osserviamo preliminarmente che, se  $W(s)$  non è identicamente nulla, la diseuguaglianza (ii) vale in senso stretto. Se infatti esistesse  $s_0 \in \mathbb{C}$  con

$$\Re s_0 > 0, \quad \Re W(s_0) = 0$$

allora in tutto il dominio  $D$  di figura 9.5.1  $W(s)$  sarebbe una costante  $k$ .

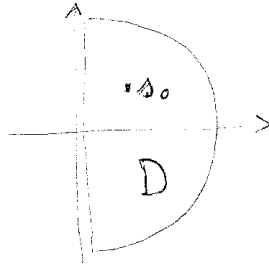


Figura 9.5.1

Infatti la condizione  $\Re W(s_0) = 0$  e la proprietà (ii) implicano che in  $D$  il punto  $s_0$  sia di minimo per  $\Re W(s)$ , mentre, se  $W(s)$  non è costante in  $D$ , il minimo di  $\Re W(s)$  viene raggiunto solo sulla frontiera<sup>4</sup>. Ovviamente  $k$  dovrebbe essere reale, dato che  $W(s)$  è reale per  $s$  reale, quindi sarebbe la costante nulla e  $W(s)$  sarebbe identicamente nulla.

Se  $W(s) \neq 0$  e  $G(s)$  sono PR,

$$W : s \mapsto W(s)$$

mappa il semipiano destro aperto di  $\mathbb{C}$  in se stesso e

$$G : s \mapsto G(s)$$

mappa il semipiano destro aperto di  $\mathbb{C}$  in se stesso oppure identicamente in zero. Quindi

$$s \mapsto W(s) \mapsto G(W(s)) \tag{9.31}$$

<sup>4</sup>Se  $W(s)$  è analitica in un aperto contenente il dominio limitato  $D$ , la parte reale di  $W(s)$  assume il valore minimo sulla frontiera di  $D$  e, qualora  $W(s)$  non sia costante in  $D$ , esclusivamente sulla frontiera di  $D$ .

soddisfa la condizione (ii), e anche la (i) dal momento che la composizione di funzioni analitiche è analitica.

Per il punto (d), tenuto conto del punto (c), basta notare che la funzione

$$G : s \mapsto \frac{1}{s}$$

è positiva reale: se  $W(s) \neq 0$  è PR, tale è  $G(W(s)) = 1/W(s)$ . ■

- ESERCIZIO 9.5.1 Le funzioni LPR sono un insieme chiuso rispetto alle operazioni del lemma 9.5.2.  
 ‡ Suggestione. La somma e la composizione di funzioni a valori immaginari per  $s = j\omega$  sono ancora a valori immaginari.

**Lemma 9.5.3** Se  $W(s)$  è PR, i suoi poli immaginari e all'infinito sono semplici, con residuo reale e positivo

PROVA Nell'intorno del polo  $j\omega_0$ , poniamo  $s = j\omega_0 + \epsilon e^{j\psi}$  e notiamo che, per  $\epsilon \rightarrow 0$ , la funzione  $W(s)$  si può rappresentare nella forma

$$W(s) \sim \frac{|K|e^{j\alpha}}{(s - j\omega_0)^m} = \frac{|K|}{\epsilon^m} e^{j(\alpha - m\psi)}, \tag{9.32}$$

trascurando infiniti di ordine inferiore rispetto a  $\epsilon^{-m}$ .

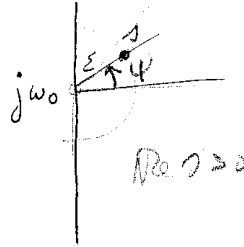


Figura 9.5.2

Ma per  $-\frac{\pi}{2} < \psi < \frac{\pi}{2}$  deve risultare  $\Re W(s) \geq 0$  e ciò è possibile solo se  $\alpha = 0$  ed  $m = 1$ . Quindi il polo in  $j\omega_0$  è semplice, con residuo  $|K| > 0$ . La prova per il polo all'infinito è analoga e si lascia come esercizio. ■

**Proposizione 9.5.4** Sia  $h(s) = p(s) + d(s) \in \mathbb{R}[s]$  un polinomio di grado  $n$  e siano  $p(s)$  e  $d(s)$  le sue parti pari e dispari. Il polinomio  $h(s)$  è strettamente hurwitziano se e solo se valgono simultaneamente le seguenti condizioni

- i)  $p(s)$  e  $d(s)$  non hanno fattori comuni;
- ii)  $p(s)/d(s)$  è LPR<sup>5</sup>.

PROVA Supponiamo dapprima che  $h(s)$  sia strettamente hurwitziano.

Si noti che, se  $\alpha$  è zero di un polinomio pari (o dispari), allora è zero del polinomio anche il numero  $-\alpha$ . Se  $d(s)$  e  $p(s)$  avessero un fattore comune  $s - \alpha$ ,  $\alpha$  non può essere immaginario, sennò  $p(s) + d(s)$  avrebbe uno zero immaginario. Ma  $\alpha$  non può nemmeno avere parte reale

<sup>5</sup>per l'esercizio 9.5.1, è indifferente considerare  $d/p$  oppure  $p/d$

diversa da zero, altrimenti  $(s + \alpha)$  e  $(s - \alpha)$  dividerebbero  $p(s)$  e  $d(s)$ , quindi dividerebbero  $p(s) + d(s)$ , e  $h(s)$  avrebbe uno zero a parte reale positiva. Concludiamo così che  $p(s)$  e  $d(s)$  sono coprimi, ovvero che vale il punto (i).

Per stabilire che  $W(s) := p(s)/d(s)$  è LPR, verificheremo, nell'ordine, che sono PR le funzioni  $(1 + W(s))^{-1}$ ,  $(1 + W(s))$  e  $W(s)$ , e che quest'ultima è LPR.

- Dal fatto che  $h(s) = P(s) + d(s)$  è SH consegue la analiticità per  $\Re s \geq 0$  di

$$(1 + W(s))^{-1} = \frac{d(s)}{p(s) + d(s)}.$$

Sull'asse immaginario, la parte reale di  $(1 + W(s))^{-1}$  è espressa da

$$\Re \frac{d(j\omega)[p(j\omega) + d(-j\omega)]}{[p(j\omega) + d(j\omega)][p(j\omega) + d(-j\omega)]} = \Re \frac{d(j\omega)d(-j\omega)}{[p(j\omega) + d(j\omega)]^2} \quad (9.33)$$

quindi è non negativa.

Con riferimento al semicerchio di figura 9.5.3, la funzione  $\Re \frac{d(s)}{p(s) + d(s)}$  assume il valor minimo sulla frontiera di  $D$  e, al divergere del raggio  $R$ , il valore assunto sulla semicirconferenza tende al limite (non negativo) assunto dalla (9.33) quando  $\omega$  diverge. Pertanto

$$\Re \frac{d(s)}{p(s) + d(s)} \geq 0 \quad \text{per } \Re s \geq 0$$

e  $\frac{d(s)}{p(s) + d(s)}$  è positiva reale.

- Per il lemma 9.5.2 è positiva reale anche  $1 + W(s) = \frac{p(s)}{d(s)} + 1$

- Verifichiamo infine che  $W(s)$  è PR e, anzi, LPR.

È chiaro, intanto, che  $p(s)/d(s)$  ha gli stessi poli di  $1 + W(s)$ , quindi è analitica per  $\Re s > 0$ . Per il lemma 9.5.3, nello sviluppo in serie di  $1 + W(s)$  e quindi di  $W(s)$  nell'intorno di un polo immaginario  $j\omega_0$  o all'infinito il termine principale è

$$\frac{|K|}{s - j\omega_0} \quad \text{oppure } \alpha_\infty s$$

con  $|K| > 0$  e/o  $\alpha_\infty > 0$ .

Se consideriamo il percorso di figura 9.5.3, che aggira a destra i poli immaginari delle funzione  $p(s)/d(s)$ , è chiaro che, quando  $\epsilon$  tende a zero e  $R$  tende a infinito, la parte reale della funzione  $p(s)/d(s)$  è non negativa su tutto il percorso e quindi anche nella regione  $D$  che esso racchiude. Tanto basta per concludere che  $\Re \frac{p(s)}{d(s)}$  è

non negativa e quindi  $p(s)/d(s)$  è PR.

Ma allora è anche LPR, perché sull'asse immaginario risulta

$$\Re \frac{p(j\omega)}{d(j\omega)} = \Re \frac{d(-j\omega)p(j\omega)}{|d(j\omega)|^2} = 0$$

dal momento che a numeratore figurano soltanto termini di grado dispari in  $j\omega$ .



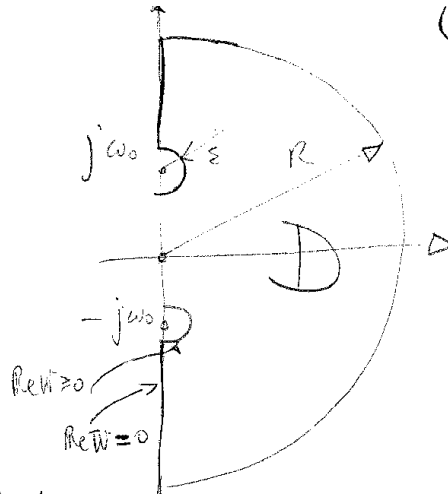


Figura 9.5.3

Supponiamo ora che valgano le condizioni (i) e (ii). Allora

- $p(s)/d(s)$  è analitica per  $\Re s > 0$  e quindi, attesa la coprimialità di  $p$  e  $d$ , il polinomio  $d(s)$  non si annulla per  $\Re s > 0$  (e, essendo dispari, nemmeno per  $\Re s < 0$ );
- $p(s)/d(s)$  ha parte reale non negativa per  $\Re s > 0$ . Quindi, nel semipiano  $\Re s \geq 0$ , se si escludono gli zeri di  $d(s)$ , risulta strettamente positiva la parte reale di

$$1 + \frac{p(s)}{d(s)} = \frac{p(s) + d(s)}{d(s)}$$

e quindi non nullo il polinomio  $h(s) = p(s) + d(s)$ . D'altra parte, negli zeri di  $d(s)$  il polinomio  $p(s) + d(s)$  non può annullarsi perché  $p(s)$  ed  $d(s)$  sono coprimi. Pertanto  $p(s) + d(s)$ , essendo privo di zeri per  $\Re s \geq 0$ , è strettamente hurwitziano ■

**Proposizione 9.5.5** *La funzione razionale  $W(s)$  è LPR se e solo se ammette uno sviluppo in frazioni parziali del tipo*

$$\begin{aligned} W(s) &= \alpha_\infty s + \frac{\alpha_0}{s} + \sum h = 1^\nu \left( \frac{\alpha_h}{s - j\omega_h} + \frac{\alpha_h}{s + j\omega_h} \right) \\ &= \alpha_\infty s + \frac{\alpha_0}{s} + \sum_{h=1}^\nu \frac{2\alpha_h s}{s^2 + \omega_h^2} \end{aligned} \tag{9.34}$$

dove  $\alpha_0, \alpha_\infty$  e  $\alpha_h$  sono numeri reali non negativi

PROVA Gli addendi di (9.34) sono LPR, quindi lo è la loro somma.

Viceversa, se  $W(s)$  è LPR, deve essere

$$W(s) + W(-s) = 0$$

perché sull'asse immaginario (ad esclusione dei poli) risulta

$$W(j\omega) + W(-j\omega) = W(j\omega) + \check{W}(j\omega) = 2\Re W(j\omega) = 0$$

e una funzione razionale nulla sull'asse immaginario è nulla ovunque.

Allora  $W(s)$  non ha poli a parte reale positiva, perché è LPR, nè a parte reale negativa, perché  $W(s) = -W(-s)$ , e quindi ha solo poli immaginari o all'infinito.

Per il lemma 9.5.3 tali poli sono semplici, con residuo reale e positivo, quindi lo sviluppo in frazioni parziali è dato da (9.34) e l'assenza del costante nello sviluppo è una ulteriore conseguenza della condizione  $W(s) + W(-s) = 0$ . ■

**Corollario 9.5.6** *Se la funzione razionale  $W(s)$  è LPR, nella rappresentazione irriducibile è rapporto di un polinomio pari e di uno dispari, o viceversa di uno dispari e di uno pari.*

PROVA Da (9.34) è chiaro che il denominatore di  $W(s)$  è dispari o pari, a seconda che  $W(s)$  abbia, oppure no, un polo nell'origine. Poiché  $1/W(s)$  è pure essa LPR, anche il numeratore di  $W(s)$  è dispari o pari.

Infine, è ovvio che numeratore e denominatore hanno differenza di gradi pari a 1, quindi l'uno è pari e l'altro è dispari. ■

**Corollario 9.5.7** *Se nello sviluppo (9.34) di una funzione LPR si sopprimono alcuni addendi, la funzione che residua è ancora LPR.*

Se  $W(s) = n(s)/d(s)$  è una funzione LPR con  $\deg n > \deg d$ , il resto  $r(s)$  della divisione euclidea di  $n$  e  $d$ , diviso per  $d(s)$ , è la funzione LPR che si ottiene sopprimendo in (9.34) il termine relativo al polo all'infinito.

PROVA La prima parte del corollario è ovvia.

Per la seconda, si ponga

$$n(s) = d(s)q(s) + r(s), \quad \deg r < \deg d$$

e quindi

$$W(s) = q(s) + \frac{r(s)}{d(s)} = \alpha_\infty s + \left[ \frac{\alpha_0}{s} + \sum_{h=1}^{\nu} \frac{2\alpha_h s}{s^2 + \omega_h^2} \right]$$

Poiché per una funzione razionale è unica la scomposizione nella somma di un polinomio e di una funzione razionale strettamente propria, è chiaro che  $\alpha_\infty s$  deve identificarsi con il quoziente  $q(s)$  e la parte residua dello sviluppo (9.34) con  $r(s)/d(s)$ . ■

**Corollario 9.5.8** *Se  $h(s) = p(s) + d(s)$  è strettamente hurwitziano e  $p$  e  $d$  ne sono la parte pari e la parte dispari, allora tali strettamente hurwitziani*

- i)  $\alpha p(s) + \beta d(s)$ ,  $\forall \alpha, \beta > 0$ ;
- ii)  $h(s) = sp(s)$  e  $h(s) + sd(s)$ ;
- iii)  $sh(s) + p(s)$  e  $h(s) + \frac{d(s)}{s}$

PROVA (i) È chiaro che, se  $p(s)/d(s)$  è LPR e  $p$  e  $d$  sono coprimi,  $\alpha p(s)/\beta d(s)$  rimane LPR e rimangono coprimi  $\alpha p$  e  $\beta d$ .

ii) Si considerino

$$s + \frac{p(s)}{d(s)} = \frac{sd(s) + p(s)}{d(s)}$$

$$s + \frac{d(s)}{p(s)} = \frac{sp(s) + d(s)}{p(s)}$$

In entrambi i casi abbiamo rappresentazioni irriducibili di funzioni LPR, quindi sono strettamente hurwitziani entrambi i polinomi

$$sd(s) + p(s) + d(s) = sd(s) + h(s) \quad \text{e} \quad sp(s) + d(s) + p(s) = sp(s) + h(s)$$

iii) La funzione razionale

$$\frac{1}{s} + \frac{p(s)}{d(s)} = \frac{d(s) + sp(s)}{sd(s)} = \frac{\frac{d(s)}{s} + p(s)}{d(s)}$$

è LPR e l'ultima rappresentazione è irriducibile, quindi  $h(s) + \frac{d(s)}{s}$  è strettamente hurwitziano. Analogamente

$$\frac{1}{s} + \frac{d(s)}{p(s)} = \frac{p(s) + sd(s)}{sp(s)}$$

è LPR e irriducibile, quindi  $sh(s) + p(s)$  è strettamente hurwitziano. ■

**Osservazione** Le funzioni PR e LPR hanno grande importanza nello studio dei sistemi passivi e, in particolare, dei sistemi conservativi. Si può infatti dimostrare che ogni sistema lineare passivo ha una funzione di trasferimento positiva reale e che ogni sistema conservativo lineare ha una matrice di trasferimento LPR.

A titolo di esempio, si noti che la (9.34) si può facilmente interpretare come funzione impedenza  $Z(s)$  di un bipolo costituito dalla serie di elementi L,C

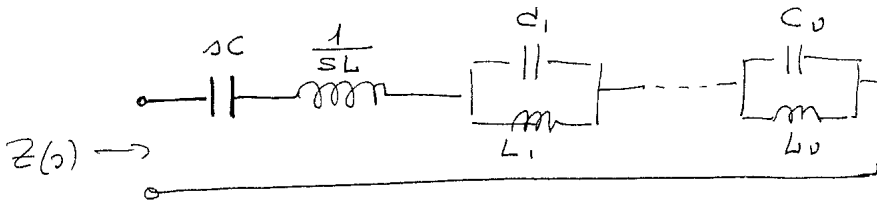


Figura 9.5.4

Per identificare  $Z(s)$  con la (9.34), basta porre

$$C = \alpha_\infty, \quad L = \frac{1}{\alpha_0}$$

$$Z_i = \frac{1}{\frac{1}{sL_i} + sC_i} = \frac{sL_i}{1 + s^2L_iC_i} = \frac{\frac{s}{C_i}}{s^2 + \frac{1}{L_iC_i}}$$

e quindi  $\omega_i^2 = \frac{1}{L_iC_i}$ ,  $\alpha_i = \frac{1}{2C_i}$ .

## 9.6 Il criterio di Routh

In questo paragrafo otterremo un metodo per stabilire se gli zeri di un polinomio  $h(s) \in \mathbb{R}[s]$  hanno tutti parte reale negativa. Il metodo si basa essenzialmente sulla divisione

euclidea fra polinomi pari e polinomi dispari e la dimostrazione della sua validità dipende dalle connessioni fra polinomi SH e funzioni LPR, che abbiamo studiato nel paragrafo precedente.

Per fissare le idee, supporremo che il polinomio strettamente hurwitziano  $h(s)$  abbia grado  $2n$  e coefficiente conduttore  $a_{2n}$  positivo<sup>6</sup>. Denotiamo con

$$\begin{aligned} p_0(s) &= \sum_{i=0}^n a_{2i} s^{2i} \\ p_1(s) &= \sum_{i=0}^{n-1} a_{2i+1} s^{2i+1} \end{aligned} \quad (9.35)$$

le parti pari e dispari di  $h(s)$  e con  $p_2(s)$  il resto della divisione di  $p_0$  per  $p_1$ . È chiaro che tutti i coefficienti delle sommatorie (9.35) sono positivi (per la regola di Cartesio tutti i coefficienti di  $h(s)$  devono avere il segno di  $a_{2n}$ ). Allora possiamo provare il seguente

**Lemma 9.6.1** *Se il polinomio  $h(s)$  è strettamente hurwitziano, di grado  $2n$  e con coefficiente conduttore positivo, il resto  $p_2(s)$  della divisione di  $p_0(s)$  per  $p_1(s)$  è un polinomio pari, di grado  $2n - 2$  e tutti i suoi coefficienti sono positivi.*

*Inoltre  $p_1(s) + p_2(s)$  è strettamente hurwitziano.*

PROVA Dal corollario 9.5.7 si ha che  $\frac{p_2(s)}{p_1(s)}$  è una funzione LPR, strettamente propria, e dalla coprimalità di  $p_0$  e  $p_1$  segue quella di  $p_1$  e  $p_2$ . Quindi per il corollario 9.5.6  $p_2(s)$  è pari e per la proposizione 9.5.4  $p_1(s) + p_2(s)$  è strettamente hurwitziano. Poiché i coefficienti di  $p_1(s)$  sono positivi, la hurwitzianità di  $p_1(s) + p_2(s)$  implica che siano positivi anche quelli di  $p_2(s)$ . ■

**Proposizione 9.6.2** *Siano  $p_0(s)$  e  $p_1(s)$  la parte pari e la parte dispari di un polinomio  $h(s) \in \mathbb{R}[s]$  di grado  $2n$  e con coefficiente conduttore  $a_{2n} > 0$ .*

*Applichiamo iteratamente l'algoritmo di Euclide ai resti successivi della divisione:*

$$\begin{aligned} p_0 &= p_1 q_1 + p_2 & \deg p_2 < \deg p_1 \\ p_1 &= p_2 q_2 + p_3 & \deg p_3 < \deg p_2 \\ \dots & \dots & \dots \end{aligned} \quad (9.36)$$

*Il polinomio  $h(s)$  è strettamente hurwitziano se e solo se i polinomi  $p_1, p_2, \dots, p_{2n_1}, p_{2n}$  hanno rispettivamente grado  $2n - 1, 2n - 2, \dots, 1, 0$  e coefficienti conduttori positivi.*

PROVA La necessità della condizione deriva dal precedente lemma 9.6.1. Se  $h(s)$  è SH, devono essere SH e con coefficiente conduttore positivo i polinomi  $p_0 + p_1 = h, p_1 + p_2, p_2 + p_3, \dots$ . Ciò implica che nelle divisioni (9.36) ciascun resto abbia grado inferiore di una unità al grado del divisore e abbia coefficiente conduttore positivo.

Viceversa, se i polinomi  $p_i(s)$ ,  $i = 0, 1, \dots, 2n$  soddisfano le ipotesi dell'enunciato, allora

- $p_0(s)/p_1(s)$  è irriducibile, dato che un eventuale fattore di grado positivo comune a  $p_0$  e  $p_1$  dividerebbe tutti i resti successivi  $p_2, p_3, \dots$  e quindi  $p_{2n}$ , che è una costante non nulla.

<sup>6</sup>supponendo dispari il grado e/o negativo il coefficiente conduttore si ottengono risultati analoghi.

- Per concludere che  $h(s)$  è strettamente hurwitziano, in base alla proposizione 9.5.4 dobbiamo verificare che  $p_0(s)/p_1(s)$  è LPR.

Nelle ipotesi che abbiamo fatto, si lascia come esercizio verificare che

- il grado dei resti  $p_i$  decresce ad ogni passo di una unità, quindi vale  $2n - i$  per il resto  $p_i$ ;

- i quozienti  $q_i(s)$  hanno grado unitario, coefficiente conduttore positivo e sono nulli per  $s = 0$ , quindi risulta  $q_i(s) = \gamma_i s$ ,  $i > 0$ ;

- i resti  $p_i$  sono alternativamente polinomi pari e polinomi dispari e, in particolare  $p_{2n} = \beta > 0$ ,  $p_{2n-1} = \alpha s$ ,  $\alpha > 0$

Ma allora

$$\frac{p_{2n-1}(s)}{p_{2n}(s)} = \frac{\alpha}{\beta} s$$

è LPR e, assumendo induttivamente che  $p_k(s)/p_{k+1}(s)$  sia LPR, si ha che

$$\frac{p_{k-1}(s)}{p_k(s)} = \gamma_k s + \frac{p_{k+1}(s)}{p_k(s)}$$

è LPR perché somma di funzioni LPR. Quindi  $p_0(s)/p_1(s)$  è LPR. ■

La tabella di Routh contiene i coefficienti dei polinomi ottenuti applicando l'algoritmo delle divisioni successive alle parti pari e dispari di  $h(s)$ . Se le parti pari e dispari sono

$$\begin{aligned} p_0(s) &= a_{2n}s^{2n} + a_{2n-2}s^{2n-2} + \dots + a_0 \\ p_1(s) &= a_{2n-1}s^{2n-1} + a_{2n-3}s^{2n-3} + \dots + a_1s \end{aligned}$$

il quoziente della divisione di  $p_0$  per  $p_1$  è dato da

$$q(s) = \frac{a_{2n}}{a_{2n-1}} s$$

e il resto da

$$\begin{aligned} p_2(s) &= p_0(s) - \frac{a_{2n}}{a_{2n-1}} s p_1(s) \\ &= s^{2n-2} \left( a_{2n-2} - \frac{a_{2n}}{a_{2n-1}} a_{2n-3} \right) + s^{2n-4} \left( a_{2n-4} - \frac{a_{2n}}{a_{2n-1}} a_{2n-5} \right) + \dots \\ &= \frac{1}{a_{2n-1}} \left\{ \det \begin{bmatrix} a_{2n-2} & a_{2n} \\ a_{2n-3} & a_{2n-1} \end{bmatrix} s^{2n-2} + \det \begin{bmatrix} a_{2n-4} & a_{2n} \\ a_{2n-5} & a_{2n-1} \end{bmatrix} s^{2n-4} + \dots \right\} \quad (9.37) \end{aligned}$$

Se si dispongono nella prima e nella seconda riga della tabella rispettivamente i coefficienti di  $p_0(s)$  e di  $p_1(s)$ , quelli di  $p_2(s)$  vanno a formare la terza riga e si ottengono dalle prime due righe eseguendo in forma tabellare le operazioni indicate in (9.37).

Poiché la moltiplicazione per una costante positiva della parte pari o della parte dispari di un polinomio SH non ne altera la proprietà SH, nella compilazione della tabella si può evitare di moltiplicare i termini della terza riga per  $1/a_{2n-1}$ , o si può moltiplicarli per una diversa costante positiva, che dia luogo a valori più "comodi" per i calcoli successivi.

Si prosegue sulla quarta riga utilizzando le due precedenti, etc...

$h(s)$  è strettamente hurwitziano se e solo se la prima colonna della tabella è strettamente positiva, fino alla posizione  $2n$ .

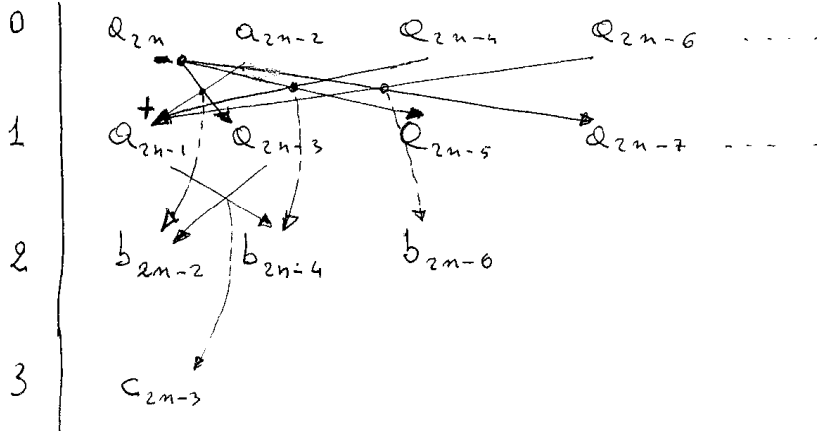


Figura 9.6.1

**Esempio 9.6.1** Si consideri il polinomio

$$h(s) = s^4 + 5s^3 + 20s^2 + 40s + 50$$

Per costruire la tabella di Routh, si considerano la parte pari

$$p_0(s) = s^4 + 20s^2 + 50$$

e la parte dispari

$$p_1(s) = 5s^3 + 40s$$

e si ottiene

$p_0(s)$	1	20	50
$p_1(s)$	5	40	
$p_2(s)$	12	50	
$p_3(s)$	<del>230</del> 12	1	
$p_4(s)$	50		

con  $p_2(s) = 12s^2 + 50$ ,  $p_3(s) = \frac{230}{12}s$ ,  $p_4(s) = 50$ . Quindi  $h(s)$  è SH.

- **ESERCIZIO 9.6.1** Se nella costruzione della tabella di Routh si ottiene una riga tutta nulla, il polinomio corrispondente è un divisore comune di  $p_0$  e  $p_1$ , con zeri a “simmetria quadrante”

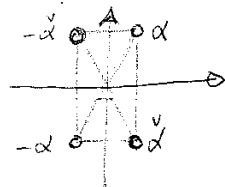


Figura 9.6.2

## 9.7 Complementi sulla tabella di Routh

Il criterio di Routh, opportunamente esteso, è in grado di fornire non soltanto informazioni sulla stretta hurwitzianità di un polinomio ma anche, quando essa non sia verificata, sul

numero delle radici a parte reale positiva e/o nulla del polinomio.

La prova completa si basa su metodi diversi da quello qui esposto. Si è inteso privilegiare il metodo delle funzioni positive reali, per vari aspetti “sovradimensionato” rispetto all’obiettivi di dimostrare il criterio di Routh, perché ci ha consentito di introdurre una classe di funzioni di grande interesse dal punto di vista applicativo, nell’ambito dei Controlli Automatici e in quello della teoria dei sistemi (e in particolare delle reti elettriche) passivi.

Nella costruzione della tabella di Routh, ovvero nella determinazione dei resti successivi nell’algoritmo di Euclide applicato alla coppia di polinomi  $p_0(s)$  e  $p_1(s)$ , supponiamo che le righe di indice  $0, 1, \dots, i$ , associate ai polinomi  $p_0, p_1, \dots, p_i$ , abbiano tutte diverso da zero il primo coefficiente, ovvero che i polinomi  $p_0$  e  $p_1$  abbiano differenza dei gradi pari ad uno e che tale sia anche la differenza fra i gradi del divisore  $p_j$  e del resto  $p_{j-1}$ , per  $j < i$ .

La riga di indice  $i + 1$  può avere, oppure no, il primo coefficiente diverso da zero (ossia il polinomio resto  $p_{i+1}$  può avere una differenza di grado pari a uno rispetto al polinomio  $p_i$ , oppure maggiore di uno. Nel primo caso, si procede ulteriormente al calcolo della riga  $(i + 2)$ -esima della tabella (ovvero al calcolo del polinomio  $p_{i+2}$ ). Nel secondo caso, si presentano due eventualità:

- la riga  $(i + 1)$ -esima non è tutta nulla. In questo caso si sostituisce il primo elemento (nullo!) della riga con un valore  $\epsilon$ , arbitrario e da considerarsi infinitesimo, e si procede con l’algoritmo come se l’elemento all’inizio della riga fosse  $\epsilon$  anziché zero.
- la riga  $(i + 1)$ -esima è identicamente nulla. In questo caso risulta  $p_{i+1} = p_i q_i$  e  $p_i$  è il MCD dei polinomi  $p_0$  e  $p_1$ , quindi di un polinomio pari e di uno dispari. Tale MCD è sempre un polinomio pari o un polinomio dispari, le cui radici possono essere studiate ponendo  $s^2 = z$ , per il caso pari, e raccogliendo dapprima  $s$  e ponendo  $s^2 = z$  nel fattore restante, per il caso dispari.

Il criterio è allora il seguente:

- Se nella tabella non sono presenti righe nulle, eventualmente ricorrendo al metodo “ $\epsilon$ ”, il numero delle radici con parte reale positiva corrisponde al numero delle variazioni di segno nella prima colonna della tabella e il numero delle radici a parte reale negativa al numero delle permanenze.

- Se nella tabella si hanno righe nulle, si contano le permanenze e le variazioni fino alla riga nulla e poi si considera il MCD di  $p_0$  e  $p_1$ .

**Esempio 9.7.1** Si consideri il polinomio  $h(s) = s^3 - 4s^2 + s + 6$  Nella prima colonna della tabella di Routh

0	1	1		
1	-4	6		
2	$(-10)/(-4)$			
3	6			

$\begin{matrix} > & \text{variaz} \\ > & \text{variaz} \\ > & \text{perman} \end{matrix}$

si hanno due variazioni e una permanenza di segno, quindi il polinomio ha due radici a parte reale positiva e una a parte reale negativa (le radici sono -1,2,3)

**Esempio 9.7.2** Si consideri il polinomio  $h(s) = s^3 + 3s - 2$  Nella prima colonna della tabella di Routh

0	1	3	
1	$\epsilon > 0$	-2	permanenza
2	$\frac{3\epsilon+2}{\epsilon} > 0$		permanenza
3	$-\frac{2(3\epsilon+2)}{\epsilon} < 0$		variazione
	$\frac{3\epsilon+2}{\epsilon}$		

sono presenti due permanenze di segno e una variazione: quindi  $h(s)$  ha una radice a parte reale positiva e due a parte reale negativa.

Al passo 2 si può sostituire  $(3\epsilon + 2)/\epsilon$  con la costante 1 (che ha lo stesso segno), ottenendo la tabella più semplice

0	1	3
1	$\epsilon$	-2
2	1	0
3	-2	

Si noti, infine, che allo stesso risultato si può pervenire ipotizzando che, nella prima tabella,  $\epsilon$  sia negativo.

### 9.8 Il criterio della matrice di Hurwitz

Sia  $h(s) = \sum_{i=0}^n a_i s^i$  un polinomio di grado  $n$ , con  $a_n > 0$ . A tale polinomio associamo una matrice quadrata  $n \times n$ , detta “matrice di Hurwitz”, che ha sulla digonale principale, nell’ordine, i coefficienti  $a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0$  ed ha la seguente struttura

$$\mathcal{H}(h) = \begin{bmatrix}
 a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\
 a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\
 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & & & \dots \\
 0 & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & & & \dots \\
 0 & 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & & \dots \\
 & & & & \ddots & & & \dots \\
 & & & & \dots & a_4 & a_2 & a_0 & 0 & 0 \\
 & & & & & \dots & a_3 & a_1 & 0 & 0 \\
 \dots & & & & & \dots & a_4 & a_2 & a_0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \dots & & \dots & a_5 & a_3 & a_1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \dots & & \dots & \dots & a_4 & a_2 & a_0
 \end{bmatrix} \tag{9.38}$$

**Proposizione 9.8.1** Il polinomio  $h(s)$  ha tutte radici a parte reale negativa se e solo se gli  $n$  minori principali annidati di  $\mathcal{H}(h)$

$$a_{n-1}, \det \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{bmatrix}, \det \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{bmatrix}, \dots, \det \mathcal{H}(h) \tag{9.39}$$



sono tutti positivi.

PROVA Se sommiamo alla seconda, alla quarta, alla sesta... riga di  $\mathcal{H}(h)$  la prima, la terza, la quinta, ... riga moltiplicata per  $-a_n/a_{n-1}$ , le righe in posizione pari della matrice risultante

$$\mathcal{H}_1(h) = \left[ \begin{array}{c|cccc} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & \\ \hline 0 & b_{n-2} & b_{n-4} & \cdots & \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots \\ 0 & 0 & b_{n-2} & b_{n-4} & \cdots \\ 0 & 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & \ddots \end{array} \right]$$

hanno per elementi i coefficienti del resto della divisione del polinomio  $p_0(s) = \sum_{k=0}^* a_{n-2k} s^{n-2k}$  per il polinomio  $p_1(s) = \sum_{k=0}^* a_{n-2k-1} s^{n-2k-1}$ , ovvero i coefficienti del polinomio  $p_2(s) := \sum_{k=0}^* b_k s^{n-2k-2}$ , primo resto nell'algoritmo di divisione considerato nella prova del criterio di Routh.

La sottomatrice costituita dalle ultime  $n - 1$  righe di  $\mathcal{H}_1(h)$  è allora la matrice di Hurwitz del polinomio  $p_1(s) + p_2(s)$ , orlata a sinistra con una colonna di zeri, e  $b_{n-2}$  è il coefficiente conduttore di  $p_2(s)$ , certamente positivo se  $h(s)$  è strettamente hurwitziano.

Sommando alla terza, alla quinta, alla settima ... riga di  $\mathcal{H}_1(h)$  la seconda, la quarta, la sesta, ... riga moltiplicate per  $-a_{n-1}/b_{n-2}$  si ottiene

$$\mathcal{H}_2(h) = \left[ \begin{array}{cc|cc} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} & \cdots \\ 0 & b_{n-2} & b_{n-4} & b_{n-6} & \cdots \\ \hline 0 & 0 & c_{n-3} & c_{n-5} & c_{n-7} & \cdots \\ 0 & 0 & b_{n-2} & b_{n-4} & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & c_{n-3} & c_{n-5} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & b_{n-2} & b_{n-4} & \cdots \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & \ddots \end{array} \right]$$

in cui le righe 3,5,..., hanno per elementi i coefficienti del resto  $p_3(s)$  della divisione di  $p_1(s)$  per  $p_2(s)$ . La sottomatrice costituita dalle ultime  $n-2$  righe di  $\mathcal{H}_2(h)$  è allora la matrice di Hurwitz di  $p_2(s) + p_3(s)$ , orlata con due colonne nulle, e  $c_{n-3}$  è il coefficiente conduttore di  $p_3(s)$ , positivo se  $h(s)$  è hurwitziano.

Per il criterio di Routh,  $h(s)$  è strettamente hurwitziano se e solo se  $a_{n-1}, b_{n-2}, c_{n-3}, \dots$ , ovvero i coefficienti conduttori di  $p_1(s), p_2(s), p_3(s), \dots$  sono tutti positivi, ovvero se con la procedura descritta è ottenibile una matrice  $\mathcal{H}_{n-1}(h)$  triangolare superiore, con diagonale positiva.

Poiché il determinante di una matrice rimane immutato se ad una riga si aggiungono multipli di un'altra riga, dalla costruzione che abbiamo descritto si vede che i minori

principali (9.39) di  $\mathcal{H}(h)$  coincidono con gli omologhi minori principali di  $\mathcal{H}_{n-1}(h)$

$$a_{n-1}, \det \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ 0 & b_{n-2} \end{bmatrix}, \det \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ 0 & b_{n-2} & b_{n-4} \\ 0 & 0 & c_{n-3} \end{bmatrix}, \dots, \det \mathcal{H}_{n-1}(h)$$

Quindi i minori (9.39) sono tutti positivi se e solo se  $a_{n-1}, b_{n-2}, c_{n-3}, \dots$  sono tutti positivi, ovvero se  $h(s)$  è strettamente hurwitziano. ■

**Esempio 9.8.1** Al polinomio  $h(s) = s^4 + 5s^3 + 20s^2 + 40s + 50$  rimane associata la matrice di Hurwitz

$$\mathcal{H}(h) = \begin{bmatrix} 5 & 40 & 0 & 0 \\ 1 & 20 & 50 & 0 \\ 0 & 5 & 40 & 0 \\ 0 & 1 & 20 & 50 \end{bmatrix}$$

i cui minori principali annidati

$$5, \det \begin{bmatrix} 5 & 40 \\ 1 & 20 \end{bmatrix} = 60, \det \begin{bmatrix} 5 & 40 & 0 \\ 1 & 20 & 50 \\ 0 & 5 & 40 \end{bmatrix} = 1150, \det \mathcal{H}(h) = 50 \cdot 1150$$

sono tutti positivi. Quindi  $h(s)$  è strettamente hurwitziano.

## 9.9 Riferimenti bibliografici

- [Dy ] Dym, “Fourier series and integrals”, Academic Press, 1972
- [Fo ] Folland, “Fourier analysis and applications”
- [Yo ] Youla D. “On the stability of linear systems” IEEE Trans. on AC, pp. 276-79, 1963
- [ZD ] Zadeh, Desoer, “Linear systems”
- [FLV ] Ferrante A, Lepschy A, Viaro U. “Introduzione ai controlli automatici”
- [Ma ] Marsden, “The geometry of polynomials” , AMS