

Capitolo 10

Proprietà dei sistemi retroazionati

10.1 Schemi a blocchi

Nell'analisi dei sistemi di controllo è spesso conveniente individuare, a livello strutturale o anche a livello puramente descrittivo/formale, opportuni sottosistemi (o “blocchi”), dotati di solito di un solo ingresso e di una sola uscita, e rappresentare il sistema complessivo come il risultato dell'interconnessione di tali sottosistemi elementari. La ipotesi che soggiace a questo tipo di scomposizione è quella di *non interazione* fra i blocchi, ovvero l'ipotesi che il legame che un blocco determina fra le grandezze che figurano ai suoi “terminali” non dipenda dalla connessione con altro blocchi o, come si suol dire, non risenta degli “effetti di carico”.

Esempio 10.1.1 Il partitore di tensione

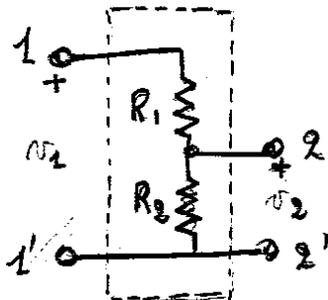


Figura 10.1.1

realizza un legame di proporzionalità fra l'ingresso v_1 e l'uscita v_2 dato da

$$v_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} v_1 \quad (10.1)$$

Tale legame sussiste soltanto se i morsetti 2 2' sono “a vuoto”, ossia se non viene erogata corrente attraverso la porta 2. Diversamente, è necessario considerare il sistema come se avesse per ingressi sia v_1 che i_2 , e allora si ricava

$$v_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} v_1 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} i_2$$

In realtà, il partitore è descritto completamente come un sistema a due ingressi (p.es. v_1 e i_2) e due uscite (p.es. v_2 e i_1)

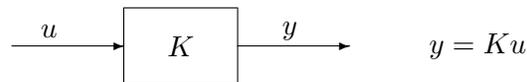
$$\begin{bmatrix} v_2 \\ i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{R_2}{R_1 + R_2} & \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \\ \frac{1}{R_1 + R_2} & -\frac{R_2}{R_1 + R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

e la (10.1) si ottiene ipotizzando che i_2 sia posta eguale a zero, ossia ipotizzando che l'ambiente esterno al sistema imponga un particolare regime di funzionamento ("a vuoto").

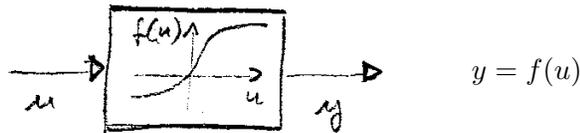
10.1.1 Blocchi elementari

Nel catalogo dei blocchi elementari, abbiamo anzitutto i blocchi di tipo puramente "algebrico", ossia "senza memoria":

- il blocco proporzionale



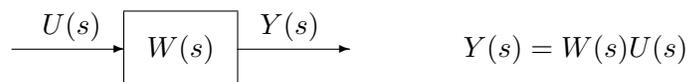
- il blocco non lineare



Altri blocchi hanno struttura "dinamica", ovvero trasformano la funzione di ingresso nella funzione di uscita in modo tale che il valore dell'uscita al tempo t non dipenda unicamente dal valore dell'ingresso nel medesimo istante, ma anche dal suo andamento in istanti diversi (di solito precedenti l'istante t) e quindi dalle derivate dell'ingresso.

Per quanto di interesse in questo corso, i più importanti sono

- i blocchi lineari e stazionari di "dimensione finita", che rappresentano il legame determinato da un'equazione differenziale del tipo $\sum_i a_i y^{(i)} = \sum_i b_i u^{(i)}$. In generale, riferendoci ad una descrizione nel dominio s , sono caratterizzati dalla funzione di trasferimento $W(s)$,



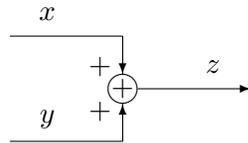
se ingressi e uscite dei blocchi sono le Laplace trasformate delle corrispondenti funzioni del tempo.

I diversi elementi di uno schema a blocchi sono collegati attraverso

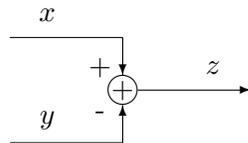
- punti di diramazione



- giunzioni sommanti



$$z(t) = x(t) + y(t), \forall t$$

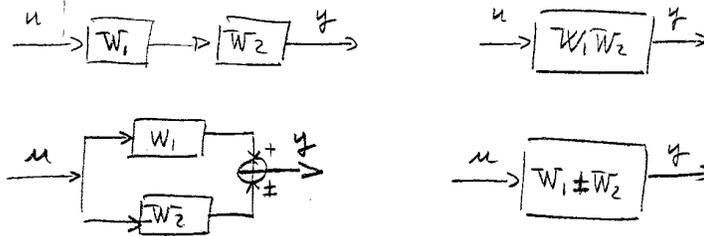


$$z(t) = x(t) - y(t), \forall t$$

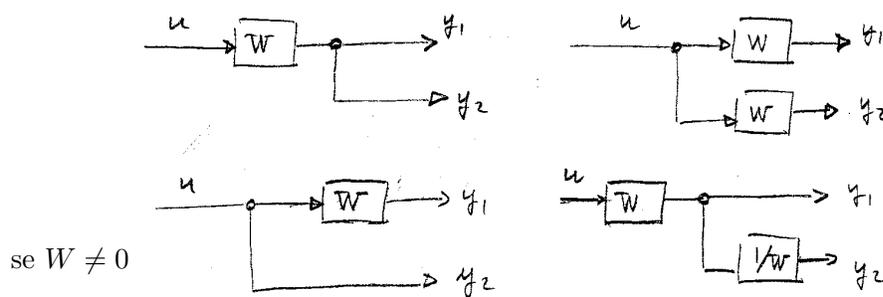
10.1.2 Algebra degli schemi a blocchi

Consideriamo ora alcune regole elementari che consentono di modificare uno schema a blocchi, ottenendo da uno schema assegnato un altro schema, di solito più semplice o comunque più adatto allo studio di alcune proprietà, che rappresenti lo stesso legame ingresso uscita fra due terminali assegnati.

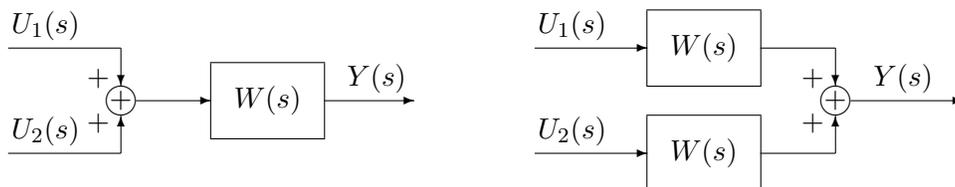
- 1) Riduzione di due blocchi in serie o in parallelo:

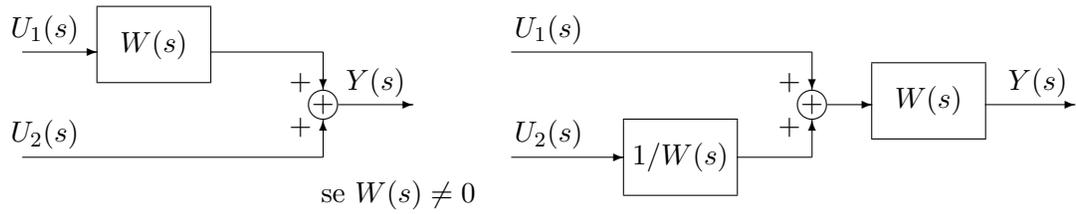


- 2) Spostamento di blocchi rispetto a un punto di diramazione:

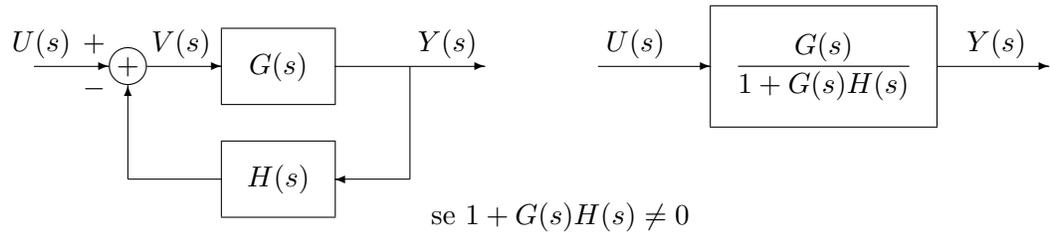


- 3) Spostamento di blocchi rispetto a un sommatore:





4) Eliminazione di un anello



Infatti

$$\begin{aligned}
 Y &= GV = G(U - HY) \Rightarrow (1 + GH)Y = GU \\
 Y &= \frac{G}{1 + GH}U
 \end{aligned}
 \tag{10.2}$$

Esempio 10.1.2 Si consideri il sistema descritto dal seguente schema a blocchi

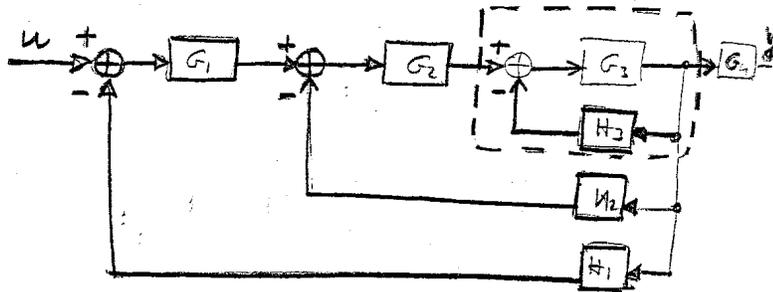
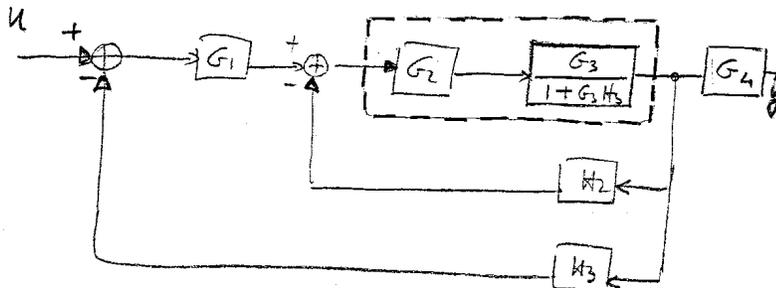
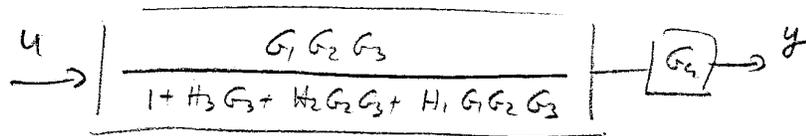
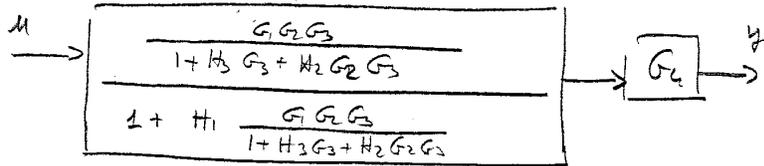
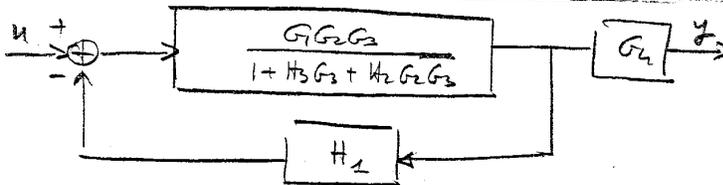
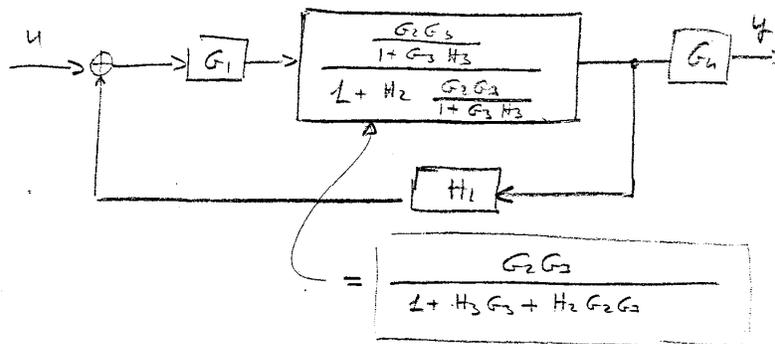
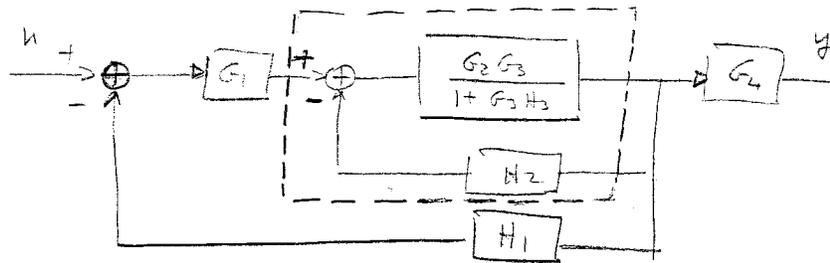


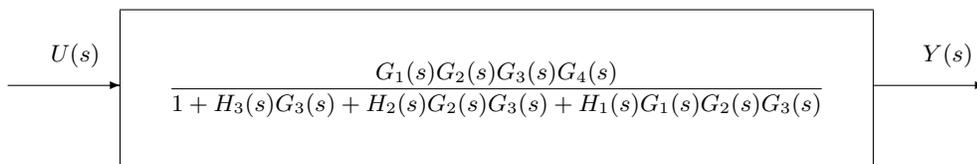
Figura 10.1.2

Applicando successive riduzioni allo schema, si perviene ai blocchi seguenti:





e infine ad un unico blocco lineare:



Esempio 10.1.3 [SISTEMA PER IL CONTROLLO DI POSIZIONE] Si consideri il sistema schematizzato in figura 10.1.3

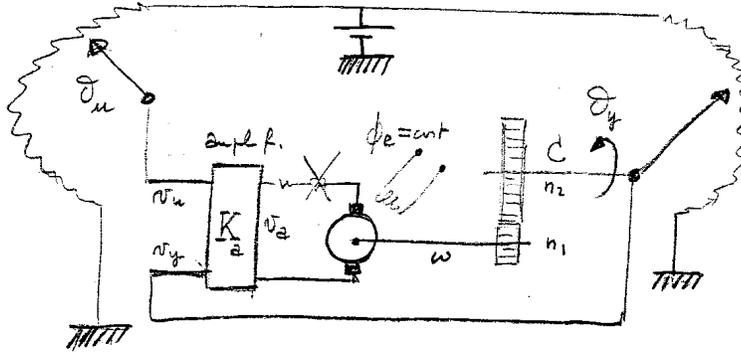


Figura 10.1.3

La grandezza di ingresso è l'angolo θ_u che costituisce il livello di riferimento al quale si intende portare l'angolo θ_y dell'asse di uscita. θ_u e θ_y risultano proporzionali alle tensioni v_u e v_y

$$v_u = K_1 \theta_u, \quad v_y = K_1 \theta_y$$

e la differenza fra le due tensioni costituisce l'ingresso di un amplificatore la cui uscita

$$v_a = K_a (v_u - v_y)$$

è la tensione che comanda un motore in corrente continua, controllato in armatura, con flusso di eccitazione costante (si veda il paragrafo 4.4.2). Lo schema a blocchi è riportato nella figura 10.1.4:

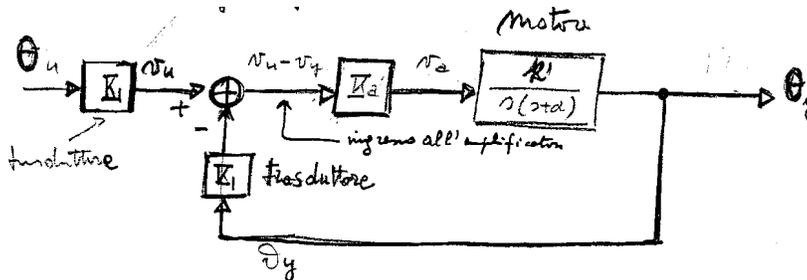


Figura 10.1.4

Se è trascurabile l'induttanza L_a del circuito di armatura, le equazioni del motore diventano (E denota la forza contro elettromotrice)

$$V_a(s) = R_a I_a(s) + E(s) \quad (10.3)$$

$$E(s) = K \Omega(s) = -\frac{n_2}{n_1} K s \Theta_y(s) \quad (10.4)$$

$$C(s) = -(B + sJ) s \Theta_y(s) = \frac{n_2}{n_1} K I_a(s) \quad (10.5)$$

da cui si ricava, per sostituzione,

$$\begin{aligned} V_a(s) &= -R_a \frac{n_1}{n_2} \frac{1}{K} (B + sJ) s \Theta_y(s) - \frac{n_2}{n_1} K s \Theta_y(s) \\ &= \left[-\left(\frac{n_2}{n_1} K + \frac{n_1}{n_2} \frac{R_a B}{K} \right) s - R_a \frac{J}{K} \frac{n_1}{n_2} s^2 \right] \Theta_y(s) \\ &= -\frac{n_1 R_a J}{n_2 K} \left[s^2 + s \left(\frac{B}{J} + \frac{n_2^2}{n_1^2} \frac{K^2}{J R_a} \right) \right] \Theta_y(s) \end{aligned}$$

La funzione di trasferimento che lega l'ingresso v_a all'uscita θ_y è data, alle Laplace trasformate, da

$$\frac{\Theta_y(s)}{V_a(s)} = \frac{-\frac{Kn_2}{R_a J n_1}}{s \left[s + \left(\frac{B}{J} + \frac{n_2^2}{n_1^2} \frac{K^2}{J R_a} \right) \right]}$$

e, ponendo

$$\alpha := \frac{B}{J} + \frac{n_2^2}{n_1^2} \frac{K^2}{J R_a}, \quad k' := -\frac{Kn_2}{R_a J n_1},$$

$$\frac{\Theta_y(s)}{V_a(s)} = \frac{k'}{s(s + \alpha)}$$

Lo schema costituito dai blocchi elementari che rappresentano le equazioni (10.3,10.4,10.5) è riportato nella figura 10.1.5

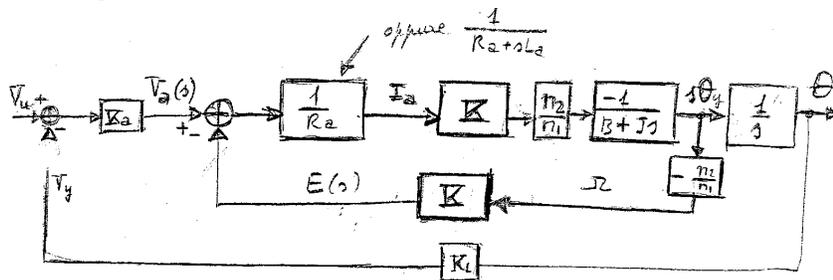


Figura 10.1.5

Da tale schema, si può facilmente ottenere quello di figura 10.1.4.

10.2 Struttura dei sistemi in retroazione

Consideriamo un sistema con una sola variabile controllata y , alla quale intendiamo far assumere un particolare andamento, agendo su una variabile manipolabile, che assumeremo come “ingresso di controllo”.

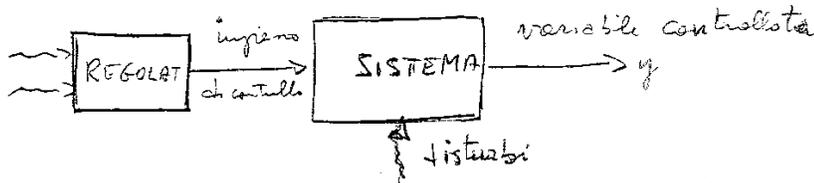


Figura 10.2.1

Il sistema può avere anche altri ingressi, sui quali non prevediamo di esercitare alcuna influenza e che vengono collettivamente catalogati come “disturbi”.

La variabile di controllo viene prodotta da un dispositivo che chiameremo genericamente *regolatore*, o *controllore*, al quale possono giungere informazioni

- sui valori delle altre variabili di ingresso del sistema da controllare,
- sull'andamento effettivo della variabile controllata $y(t)$
- sull'andamento desiderato $r(t)$ (*riferimento*) della variabile controllata,

- sulle variazioni che, nel corso del tempo, possono subire i parametri del sistema (per invecchiamento, per guasti, per cambiamento di assetto, etc.)

Per quanto riguarda il riferimento $r(t)$, nella situazione più comune l'obiettivo che ci si pone è quello dell'*inseguimento*, ossia della proporzionalità, istante per istante, fra $y(t)$ e $r(t)$:

$$y(t) = \alpha r(t), \quad (10.6)$$

in cui $\alpha \in \mathbb{R}$ è una costante caratteristica dell'apparato di controllo (*costante di regolazione*). In pratica, l'inseguimento non può essere realizzato in modo esatto, per la presenza di disturbi e per l'inerzia del sistema controllato, e si avrà un *errore di inseguimento*

$$e_r(t) = r(t) - \frac{y(t)}{\alpha} \quad (\text{riferito ad } r) \quad (10.7)$$

$$e_y(t) = \alpha r(t) - y(t) \quad (\text{riferito ad } y) \quad (10.8)$$

Se le informazioni utilizzate dal regolatore comprendono soltanto il riferimento ed, eventualmente, i disturbi del sistema, diremo che il controllo è *ad azione diretta* o *in catena aperta*. Se, invece, esse includono, oltre al riferimento, la variabile controllata (ed eventualmente altre uscite del sistema), il controllo si dice *in retroazione* o *in catena chiusa*.

Osservazione Nel controllo in catena aperta il valore della variabile manipolabile $u(\cdot)$ non dipende da quello dell'uscita controllata $y(\cdot)$, o delle altre uscite del sistema. Non vi sono pertanto percorsi di segnale chiusi (in cui cioè $u(\cdot)$ influenza $y(\cdot)$ e $y(\cdot)$ influenza $u(\cdot)$), o, come si suol dire, "anelli di retroazione".

Per il controllo in catena aperta l'azione $u(\cdot)$ che il regolatore esercita sul sistema viene determinata sulla base di un modello matematico del sistema stesso, e tale azione non subisce alterazioni in corrispondenza all'eventuale insorgere di sensibili scostamenti fra l'andamento desiderato $\alpha r(\cdot)$ e quello effettivo $y(\cdot)$. Quindi il regolatore ha una dinamica sua propria, indipendente da quella del processo controllato, che può essere conosciuta a priori, senza informazioni sull'evoluzione di quest'ultimo.

Diverso è il caso del controllo in retroazione, nel quale la mutua influenza fra regolatore e sistema controllato fa sì che la dinamica del regolatore non possa essere determinata a prescindere da quella del processo controllato.

Nei casi più semplici, si può distinguere fra retroazione negativa e retroazione positiva, avendosi la prima quando il segnale d'ingresso al regolatore è l'errore sull'uscita, ossia la differenza fra il riferimento (moltiplicato per la costante di regolazione) e l'uscita.

In generale, la retroazione positiva non ha interesse dal punto di vista del controllo, perché spesso induce un comportamento instabile, ma è comunque importante per aspetti modellistici (e può rendere conto di dinamiche instabili che si verificano in sistemi fisici, biologici, economici, etc.)

Considereremo qui di seguito la situazione più semplice, in cui un sistema lineare, con funzione di trasferimento $W(s)$ viene controllato da un regolatore lineare, in presenza di un riferimento $r(\text{cdot})$

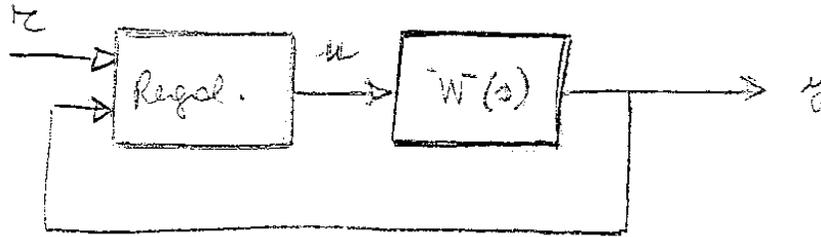


Figura 10.2.2

Lo schema a blocchi tipico, cui si può normalmente ricondurre un sistema in retroazione, e in particolare lo schema di figura 10.2.2, è il seguente

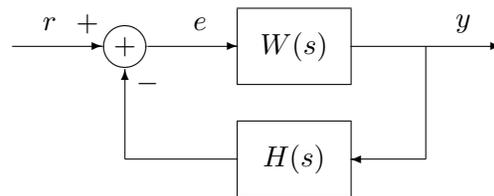


Figura 10.2.3

in cui

$r(\cdot)$ è il segnale di riferimento (il “set point“, quando costante),

$y(\cdot)$ è la variabile controllata,

$e(\cdot)$ è il segnale di errore,

$W(s)$ è la funzione di trasferimento della catena diretta (o del percorso di segnale diretto, o della catena di amplificazione diretta),

$H(s)$ è la funzione di trasferimento di retroazione (o, più genericamente, del percorso del segnale di retroazione, o del trasduttore del segnale di retroazione),

$W(s)H(s)$ è detto guadagno di anello, o funzione di trasferimento di anello.

Nello schema di figura 10.2.3

- $W(s)$ descrive il comportamento degli amplificatori di segnale e di potenza del dispositivo di controllo, della eventuale rete correttiva, dell’attuatore e del processo da controllare;
- $H(s)$ è di solito relativa al solo trasduttore di misura, spesso molto pronto rispetto agli altri apparati descritti da $W(s)$. Pertanto spesso $H(s)$ è costituito da una costante.

Come già si è visto nel paragrafo precedente, il legame fra $r(\cdot)$ e $y(\cdot)$, che in assenza di retroazione è espresso alle Laplace trasformate da

$$Y(s) = W(s)R(s)$$

è ora dato da

$$Y(s) = \frac{W(s)}{1 + H(s)W(s)} R(s) \quad (10.9)$$

Inoltre, l'errore $e(\cdot)$, definito come differenza fra il riferimento e l'uscita del blocco di retroazione, è dato da

$$\begin{aligned} E(s) &= R(s) - H(s)Y(s) = \left[1 - \frac{H(s)W(s)}{1 + H(s)W(s)} \right] R(s) \\ &= \frac{1}{1 + H(s)W(s)} R(s), \end{aligned} \quad (10.10)$$

come si può dedurre direttamente da $Y(s) = W(s)E(s)$ e da (10.9).

Nel caso in cui si abbiano altri ingressi (che possono rappresentare, p.es., i disturbi) in più punti dell'anello

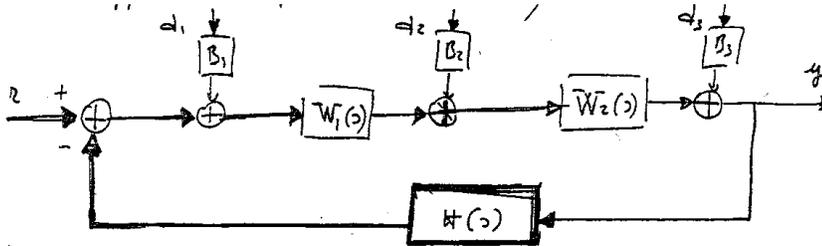


Figura 10.2.4

si può procedere mediante sovrapposizione degli effetti, dopo aver considerato separatamente l'effetto su $y(\cdot)$ di ciascun ingresso.

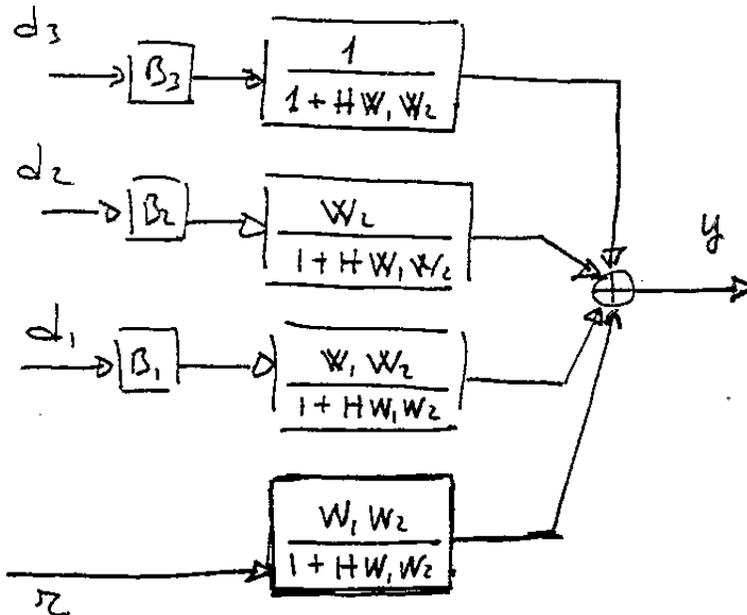


Figura 10.2.5

10.3 Effetti della retroazione

Vogliamo discutere brevemente alcuni effetti “qualitativi” sul comportamento del sistema, dovuti all’introduzione della catena di retroazione.

10.3.1 Comportamento in frequenza

Supponiamo che nell’intervallo di frequenze di interesse risulti

$$|H(j\omega)W(j\omega)| \gg 1$$

Allora la funzione di trasferimento del sistema reazionato è esprimibile nella forma

$$\frac{W(j\omega)}{1 + H(j\omega)W(j\omega)} \sim \frac{W(j\omega)}{H(j\omega)W(j\omega)} = \frac{1}{H(j\omega)} \quad (10.11)$$

e la funzione di trasferimento che lega il riferimento all’errore ha modulo

$$\left| \frac{1}{1 + H(j\omega)W(j\omega)} \right| \sim \left| \frac{1}{H(j\omega)W(j\omega)} \right| \ll 1 \quad (10.12)$$

Ciò significa che, nell’intervallo di frequenze in cui si può ritenere $|HW| \gg 1$

- a) la funzione di trasferimento dipende solo dall’andamento di $H(j\omega)$ e, per H costante, è anch’essa costante, ovvero y segue fedelmente r ;
- b) il segnale di errore è piccolo rispetto al segnale di riferimento, avendo la funzione di trasferimento riferimento/errore un modulo molto minore di 1.

Di norma i sistemi $W(s)$ e $H(s)$ sono passabasso, quindi la condizione $|H(j\omega)W(j\omega)| \gg 1$ si può ritenere soddisfatta soltanto alle basse frequenze; alle alte frequenze si ha tipicamente una funzione di trasferimento di modulo trascurabile anche nel sistema retroazionato.

10.3.2 Sensibilità alle variazioni parametriche

Un’importante proprietà della retroazione è la riduzione della sensibilità del sistema alle variazioni dei parametri *nella catena diretta*.

Storicamente, la necessità di ridurre la sensibilità degli amplificatori alle variazioni dei parametri fu uno dei motivi principali che indusse i ricercatori dei laboratori Bell a sviluppare amplificatori controreazionati. L’espansione della rete telefonica portò all’introduzione di ripetitori, realizzati mediante tubi a vuoto, di cui era difficile e costoso garantire prestazioni uniformi e costanti nel tempo. L’obiettivo primario, nella progettazione di amplificatori reazionati, fu allora quello di renderne l’amplificazione pressoché indipendente dalle disuniformità nella popolazione dei tubi edal loro invecchiamento.

Definizione 10.3.1 [SENSIBILITÀ SECONDO BODE] Sia α un parametro di $W(s)$. La sensibilità S_α^W di $W(s)$ rispetto al parametro α si definisce come

$$S_\alpha^W = \frac{d \ln W}{d \ln \alpha} = \frac{d \ln W}{dW} \frac{dW}{d\alpha} \frac{d\alpha}{d \ln \alpha} = \frac{\alpha}{W} \frac{dW}{d\alpha} \quad (10.13)$$

ovvero come

$$\lim_{\Delta\alpha \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta W}{W}}{\frac{\Delta\alpha}{\alpha}} \quad (10.14)$$

La sensibilità S_α^W rispetto al parametro α si può quindi interpretare come il rapporto fra la variazione percentuale (o relativa) di W e la variazione percentuale (o relativa) del parametro α che ha indotto la variazione di W , quando la variazione $\Delta\alpha$ è molto piccola. Essa sarà anche detta la *sensibilità ad anello aperto* rispetto alle variazioni di α .

Se consideriamo il sistema ed anello chiuso, con funzione di trasferimento

$$T(s) = \frac{W(s)}{1 + H(s)W(s)},$$

e supponiamo che $H(s)$ non dipenda da α , possiamo calcolare in modo analogo la *sensibilità S_α^T ad anello chiuso*:

$$\begin{aligned} S_\alpha^T &= \frac{d \ln T}{d \ln \alpha} = \frac{d \ln T}{d} \frac{d \ln W}{d \ln \alpha} + \frac{d \ln T}{d \ln H} \frac{d \ln H}{d \ln \alpha} \\ &= \frac{W}{T} \frac{dT}{dW} \frac{d \ln W}{d \ln \alpha} = \frac{W}{T} \frac{1}{(1 + HW)^2} \frac{d \ln W}{d \ln \alpha} \\ &= S_\alpha^W \frac{1}{1 + HW} \end{aligned} \quad (10.15)$$

Per interpretare la (10.15) conviene ancora far riferimento alla risposta armonica del sistema, e in particolare al suo modulo. Per tutte le pulsazioni per le quali risulta $|W(j\omega)H(j\omega)| \gg 1$ si ha

$$|S_\alpha^T(j\omega)| = |S_\alpha^W(j\omega)| |1 + H(j\omega)W(j\omega)|^{-1} \ll |S_\alpha^W(j\omega)|.$$

In altri termini, quando il guadagno di anello è elevato, la variazione relativa della funzione di trasferimento, in corrispondenza a una variazione relativa del parametro α in $W(s)$, è molto minore nel sistema retroazionato che in quello ad anello aperto.

Le conclusioni sono diverse nel caso in cui vari un parametro β nella sola catena di retroazione. In questa situazione si ottiene

$$\begin{aligned} S_\beta^H &= \frac{\beta}{H} \frac{dH}{d\beta} \\ S_\beta^T &= \frac{d \ln T}{d \ln \beta} = \frac{d \ln T}{d \ln W} \frac{d \ln W}{d \ln \beta} + \frac{d \ln T}{d \ln H} \frac{d \ln H}{d \ln \beta} \\ &= \frac{H}{T} \frac{dT}{dH} \frac{d \ln H}{d \ln \beta} = \frac{H}{T} \frac{-W^2}{(1 + HW)^2} \frac{d \ln H}{d \ln \beta} \\ &= -S_\beta^H \frac{HW}{1 + HW} \end{aligned} \quad (10.16)$$

e nell'intervallo di frequenze in cui risulta $|H(j\omega)W(j\omega)| \gg 1$ si ha $|S_\beta^T| \sim |S_\beta^H|$.

Esempio 10.3.1 Vogliamo studiare un sistema di controllo delle posizione di un motore in corrente continua, controllato da una tensione di armatura la cui trasformata di Laplace è indicata con $V_a(s)$. Riprendendo l'esempio 6.4.2, se si trascura l'induttanza L_a del circuito di armatura, si ricava

$$\frac{\Omega(s)}{V_a(s)} = \frac{k'}{s + \alpha},$$

dove $\Omega(s)$ è la trasformata della velocità angolare ω , mentre $\alpha > 0$ e k' parametri dipendenti dalle caratteristiche della macchina e del carico. Indicando con $\Theta(s)$ la trasformata della posizione angolare θ dell'albero motore, si ricava la funzione di trasferimento

$$W(s) = \frac{\Theta(s)}{V_a(s)} = \frac{k'}{s(s + \alpha)}$$

Se applichiamo una retroazione proporzionale alla posizione dell'albero, scegliendo $H(s) = \beta$, si ha lo schema di figura 10.3.1

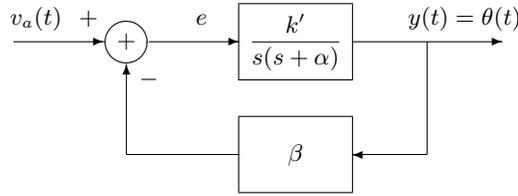


Figura 10.3.1

Per le sensibilità ad anello aperto, abbiamo

$$\begin{aligned} S_{k'}^W &= \frac{k'}{W(s)} \frac{dW(s)}{dk'} = \frac{s(s + \alpha)}{s(s + \alpha)} = 1 \\ S_{\alpha}^W &= \frac{\alpha}{W(s)} \frac{dW(s)}{d\alpha} = \frac{\alpha s(s + \alpha)}{k'} \frac{-k'}{s(s + \alpha)^2} = -\frac{\alpha}{s + \alpha} \\ S_{\beta}^H &= \frac{\beta}{H(s)} \frac{dH(s)}{d\beta} = 1 \end{aligned}$$

Calcoliamo ora le sensibilità del sistema ad anello chiuso, per cui si ha

$$T(s) = \frac{W(s)}{1 + H(s)W(s)}$$

Si ottiene allora

$$\begin{aligned} S_{k'}^T &= S_{k'}^W \frac{1}{1 + H(s)W(s)} + \frac{s(s + \alpha)}{s(s + \alpha) + k'\beta} \\ S_{\alpha}^T &= S_{\alpha}^W \frac{1}{1 + H(s)W(s)} = -\frac{\alpha s(s + \alpha)}{(s + \alpha)[s(s + \alpha) + k'\beta]} = -\frac{\alpha s}{s(s + \alpha) + k'\beta} \\ S_{\beta}^T &= -S_{\beta}^H \frac{W(s)H(s)}{1 + W(s)H(s)} = -\frac{\frac{k'\beta}{s(s + \alpha)}}{1 + \frac{k'\beta}{s(s + \alpha)}} = -\frac{k'\beta}{s(s + \alpha) + k'\beta} \end{aligned}$$

Se ci fissiamo su un caso particolare, scegliendo

$$k' = 10, \quad \alpha = 2, \quad \beta = 1$$

ricaviamo

$$\begin{aligned} S_{k'}^W &= 1 & S_{k'}^T &= \frac{s(s + 2)}{s(s + 2) + 10} = \frac{s^2 + 2s}{s^2 + 2s + 10} \\ S_{\alpha}^W &= -\frac{2}{s + 2} & S_{\alpha}^T &= -\frac{2s}{s^2 + 2s + 10} \\ S_{\beta}^H &= 1 & S_{\beta}^T &= -\frac{10}{s^2 + 2s + 10} \end{aligned}$$

Se $s = j\omega$ tende a zero, ricaviamo

$$\begin{aligned} S_{k'}^W(0) &= 1 & S_{k'}^T(0) &= 0 \\ S_{\alpha}^W(0) &= -1 & S_{\alpha}^T(0) &= 0, \\ S_{\beta}^H(0) &= 1 & S_{\beta}^T(0) &= -1 \end{aligned}$$

quindi alle basse frequenze le sensibilità di $T(s)$ rispetto a variazioni di α e di k' , ossia a parametri della catena diretta, sono piccole in confronto a quelle di $W(s)$. Invece le sensibilità di $T(s)$ e di $H(s)$ rispetto a variazioni di β sono dello stesso ordine di grandezza.

Assumiamo ora un ingresso di riferimento $v_a(t) = r(t) = 2 \sin(0,5 t)$ rappresentato simbolicamente dal numero reale 2, e valutiamo la funzione $T(s)$ in corrispondenza a $s = 0,5 j$

$$T(0,5 j) = \frac{10}{s^2 + 2s + 10} \Big|_{s=0,5 j} = 1,02 e^{-0,102 j}$$

Allora in regime permanente l'uscita sinusoidale ha rappresentazione simbolica $y = T(0,5 j) 2 = 2,04 e^{-0,102 j}$ ovvero, nel dominio del tempo

$$y(t) = 2,04 \sin(0,5 t - 0,102)$$

Supponiamo ora di introdurre un cambiamento del 5% nel parametro k' . Il cambiamento nella funzione di trasferimento ad anello chiuso è

$$\frac{\Delta T(s)}{T(s)} \sim S_{k'}^T \frac{\Delta k'}{k'} = \frac{s^2 + 2s}{s^2 + 2s + 10} 0,05$$

da cui ricaviamo

$$\Delta T(s) \sim T(s) \frac{s^2 + 2s}{s^2 + 2s + 10} 0,05 = \frac{0,5 s(s+2)}{(s^2 + 2s + 10)^2}$$

Valutando $\Delta T(s)$ per $s = 0,5 j$ otteniamo

$$\Delta T(0,5 j) = 0,005 e^{-4,67 j}$$

e la variazione nella rappresentazione simbolica dell'uscita sinusoidale permanente è

$$\Delta y \sim \Delta T(0,5 j) 2 = 0,01 e^{-4,67 j}.$$

Il rapporto

$$|\Delta y/y| = 0,01/2 = 0,005$$

corrisponde ad una variazione del 5 per mille nella rappresentazione simbolica delle uscite, a fronte di una variazione del 5 per cento nel parametro k' .

- **ESERCIZIO 10.3.1** Si consideri il sistema con retroazione unitaria

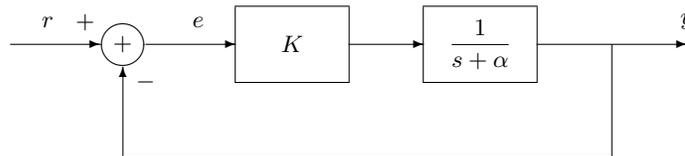


Figura 10.3.2

- Si determini la funzione di sensibilità rispetto a piccole variazioni di K intorno al valore nominale K_0 ;
- come sopra, rispetto a piccole variazioni di α intorno al valore nominale α_0 .
- Si suppongano α_0 e K_0 positivi. Si determini per quale valore di K_0 una variazione del 10 % di K in corrispondenza a un ingresso r costante induce sull'uscita (costante) di regime una variazione pari allo 0,1%.

(iv) Si supponga $\alpha_0 = 1$ e $K_0 = 99$, Si determini la risposta al gradino unitario del sistema in condizioni nominali e in corrispondenza ad una variazione di K pari al 10%.

‡ *Cenno di soluzione.*

$$S_K^T = S_K^W \frac{1}{1+HW} = S_K^W \frac{1}{W} = 1 \cdot \frac{1}{1+W} = \frac{1}{1+\frac{K}{s+\alpha}} = \frac{s+\alpha}{s+\alpha+K} \Big|_{\alpha=\alpha_0, K=K_0}$$

$$\begin{aligned} S_\alpha^T &= S_\alpha^W \frac{1}{1+W} = \frac{\alpha}{W} \frac{dW}{d\alpha} \frac{1}{1+W} = \frac{\alpha}{W} \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{K}{s+\alpha} \right) \frac{1}{1+W} = \frac{\alpha}{W} \frac{-K}{(s+\alpha)^2} \frac{1}{1+W} \\ &= \frac{\alpha}{K} \frac{-K}{s+\alpha} \frac{1}{1+W} = -\frac{\alpha}{s+\alpha} \frac{s+\alpha}{s+\alpha+K} = \frac{-\alpha}{s+\alpha+K} \Big|_{\alpha=\alpha_0, K=K_0} \end{aligned}$$

Per il punto (iii) deve essere $\frac{\Delta T}{T} = 0,001$ per $\omega = 0$ e per $\frac{\Delta K}{K} = 0,1$, ovvero

$$S_K^T(j\omega = 0) = \frac{\Delta T/T}{\Delta K/K} = 0,01.$$

Ricaviamo allora

$$\frac{\alpha_0}{\alpha_0 + K_0} = 0,01,$$

che implica $K_0 = 99\alpha_0$.

Infine, per il punto (iv), in condizioni nominali si ha

$$T(s) = \frac{99}{100+s}, \quad Y(s) = \frac{99}{100+s} \frac{1}{s} = \frac{99/100}{s} - \frac{99/100}{s+100}$$

e

$$y(t) = \frac{99}{100} \delta^{(-1)}(t) \left[1 - e^{-t/100} \right] \tag{10.17}$$

Se K varia del 10%, ad esempio in diminuzione, allora abbiamo

$$T(s) = \frac{89}{90+s}, \quad Y(s) = \frac{89}{90+s} \frac{1}{s} = \frac{89/90}{s} - \frac{89/100}{90+s}$$

e

$$y(t) = \frac{89}{90} \delta^{(-1)}(t) \left[1 - e^{-t/90} \right]$$

Quindi $y(\infty)$ passa dal valore 99/100 al valore 89/100, con una variazione pari a $1/900 \sim 0,001$.

Si noti che nel sistema non retroazionato

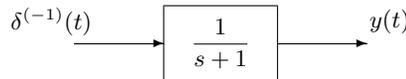


Figura 10.3.3

l'uscita tende a 1 con la legge $y(t) = \delta^{(-1)}(t)[1 - e^{-t}]$, quindi si porta esattamente al valore dell'ingresso, ma con lentezza. In presenza dell'anello di reazione la convergenza al livello di regime è più pronta, ma da (10.17) si vede che il valore di regime è inferiore a 1 (vale $\frac{K_0}{K_0+1}$).

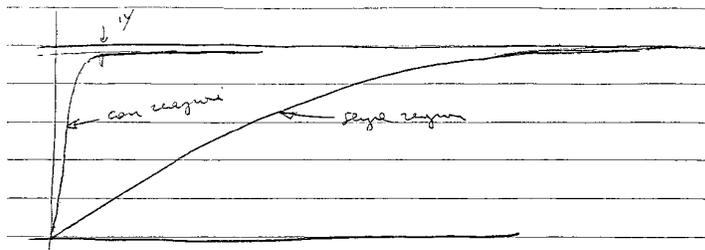


Figura 10.3.4

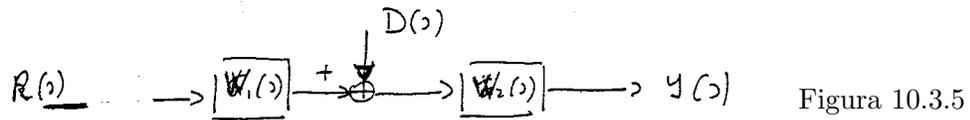
Infine, un errore del 10% nel guadagno si traduce in un errore del 10% nel valore asintotico (l'uscita tende al valore 0.9, anziché al valore 0.99, che si ha per $K_0 = 99$).

10.3.3 Sensibilità ai disturbi

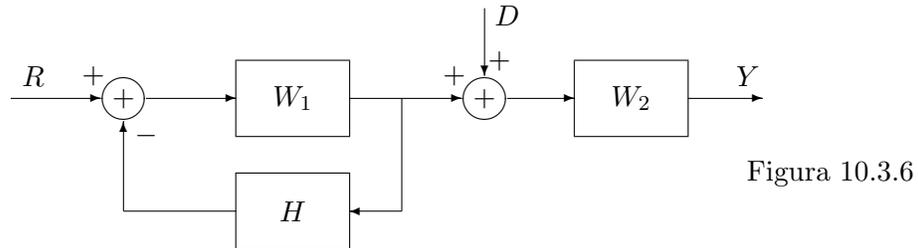
La maggior parte dei sistemi di controllo è soggetta a segnali indesiderati di disturbo. Come esempi tipici, possiamo considerare

- il rumore generato in un amplificatore elettronico,
- colpi di vento che investono un'antenna radar,
- fluttuazioni nel carico di un motore elettrico, etc.

Il diagramma a blocchi corrispondente è riportato nella figura 10.3.5

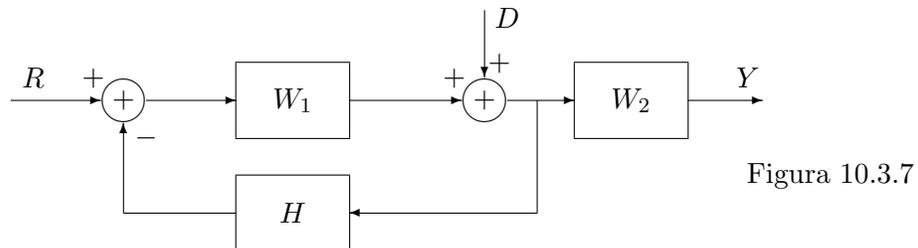


dove si suppone che il disturbo $d(\cdot)$ agisca in un punto arbitrario della catena diretta. Qualora si intenda modificare mediante la retroazione il legame fra r e y , è indifferente se il segnale per la catena di retroazione viene prelevato immediatamente a monte o immediatamente a valle del sommatore attraverso il quale si suppone entri il disturbo, ma le due scelte hanno conseguenze molto diverse per quanto riguarda il legame fra d e y . Infatti, se il prelievo avviene a monte del sommatore, abbiamo



$$Y(s) = \underbrace{[W_2(s)D(s)]}_{\text{disturbo in uscita}} + \underbrace{\left[\frac{W_1(s)W_2(s)}{1 + W_1(s)H(s)} R(s) \right]}_{\text{segnale utile in uscita}} \quad (10.18)$$

mentre, se il prelievo avviene a valle del sommatore, si ha



$$Y(s) = \underbrace{\left[\frac{W_2(s)}{1 + W_1(s)H(s)} D(s) \right]}_{\text{disturbo in uscita}} + \underbrace{\left[\frac{W_1(s)W_2(s)}{1 + W_1(s)H(s)} R(s) \right]}_{\text{segnale utile in uscita}}. \quad (10.19)$$

Nel caso del prelievo a monte del sommatore, il rapporto segnale utile/disturbo è espresso da

$$\frac{W_1}{1 + W_1 H} \frac{R}{D},$$

mentre per il prelievo a valle il rapporto è dato da

$$W_1 \frac{R}{D}.$$

Poiché nella banda di frequenza utile di solito risulta $|1 + W_1(j\omega)H(j\omega)| \gg 1$, è evidente la superiorità dello schema di figura 10.3.7, nel quale il disturbo viene “filtrato” dall’anello di retroazione.

- ESERCIZIO 10.3.2 Quando si ricorra ad un anello completo

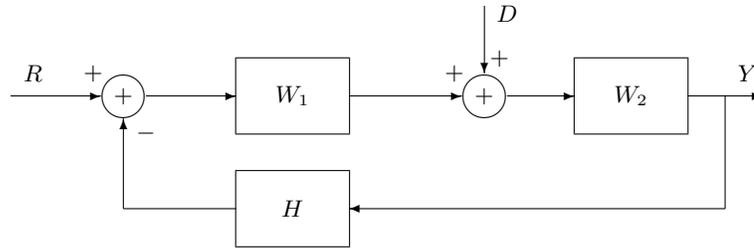


Figura 10.3.8

si può effettuare un confronto fra le componenti utile e di disturbo risultanti in questa situazione

$$Y(s) = \underbrace{\left[\frac{W_2(s)}{1 + W_2(s)W_1(s)H(s)} D(s) \right]}_{\text{disturbo in uscita}} + \underbrace{\left[\frac{W_1(s)W_2(s)}{1 + W_2(s)W_1(s)H(s)} R(s) \right]}_{\text{segnale utile in uscita}}. \quad (10.20)$$

e quelle dello schema

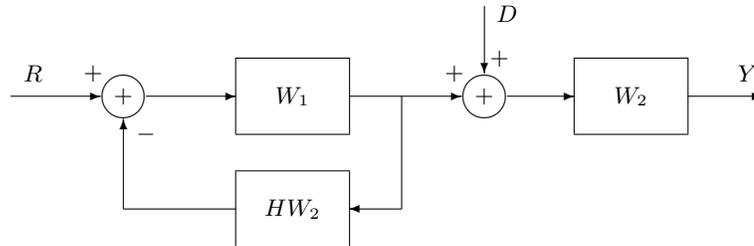


Figura 10.3.9

nel quale si intende ottenere il medesimo legame $R(s)/Y(s)$ ottenuto con lo schema di figura 10.3.8, senza peraltro retroazionare la componente di disturbo.

- (i) Si verifichi che nel caso di figura 10.3.9 si ha

$$Y(s) = \underbrace{[W_2(s)D(s)]}_{\text{disturbo in uscita}} + \underbrace{\left[\frac{W_1(s)W_2(s)}{1 + W_1(s)W_2H(s)} R(s) \right]}_{\text{segnale utile in uscita}} \quad (10.21)$$

(ii) Si verifichi che il rapporto segnale utile/disturbo con gli schemi di figura 10.3.8 e 10.3.9 è, rispettivamente,

$$W_1 \frac{R}{D} \quad \text{e} \quad \frac{W_1}{1 + HW_1W_2} \frac{R}{D}$$

Il secondo rapporto è di solito molto peggiore del primo.

Esempio 10.3.2 Si consideri un sistema di controllo della velocità angolare di un motore a combustione interna, linearizzato nell'intorno di un punto di funzionamento nominale¹

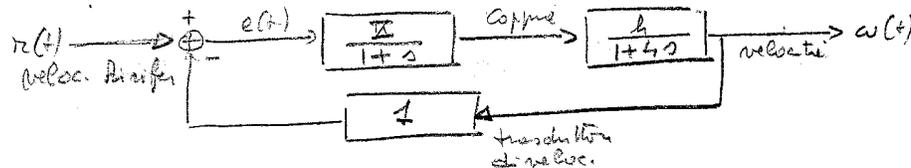


Figura 10.3.10

(i) [legame coppia/velocità] Il legame fra la coppia erogata $c(t)$ e la velocità di rotazione $\omega(t)$ è espresso da una equazione del tipo

$$\omega(t) + 4 \frac{d\omega}{dt} = hc(t)$$

(la coppia erogata viene “spesa” per vincere attriti e coppie resistenti costanti e per accelerare il sistema: ovviamente i coefficienti che figurano nell’equazione dipendono dalle caratteristiche fisiche del particolare modello). Alle Laplace trasformate si ha il legame

$$\Omega(s) = \frac{h}{1 + 4s} C(s)$$

(ii) [controllo dell’accelerazione] assumeremo, in prima approssimazione, che il legame fra la coppia erogata $c(t)$ e l’errore di velocità $e(t)$ sia del tipo

$$c(t) + \frac{dc}{dt} = Ke(t)$$

(l’errore di velocità determina l’apertura della valvola che regola l’afflusso di combustibile e la conseguente entità della coppia). Alle Laplace-trasformate si ha

$$C(s) = \frac{K}{1 + s} E(s)$$

Se l’errore subisce una modifica a gradino, la coppia a regime si modifica di un’entità pari a K

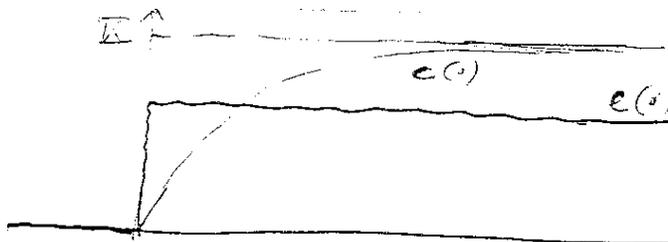


Figura 10.3.11

Si supponga ora che venga iniettata una coppia di disturbo, che si aggiunge (algebricamente) alla coppia erogata dal motore.

La situazione è rappresentata nella figura 10.3.12

¹Tutte le grandezze vanno intese perciò come variazioni rispetto al valore di riferimento: la coppia erogata è la sua variazione rispetto alla coppia nominale, l’errore di velocità è la variazione rispetto all’errore di regime, etc.

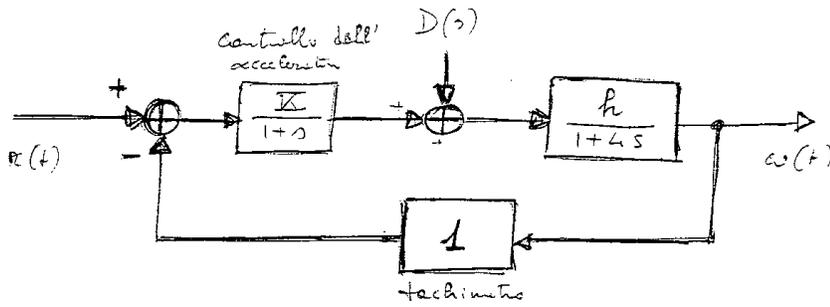


Figura 10.3.12

A frequenza 0 il disturbo $d(\cdot)$ subisce un'amplificazione pari a $h/(1 + Kh)$ mentre il segnale $r(\cdot)$ ha un'amplificazione pari a $Kh/(1 + Kh)$. Possiamo concludere che, quando è presente la retroazione, per grandi valori di K in bassa frequenza $r(t)$ e $w(t)$ sono circa eguali, mentre $d(t)$ è sensibilmente attenuato (nel rapporto di K a 1).

10.3.4 Larghezza di banda

Supponiamo che la funzione di trasferimento della catena di retroazione sia una costante reale h sull'intervallo di frequenza che ci interessa. Allora, sul medesimo intervallo, la funzione di trasferimento del sistema retroazionato è data da

$$T(j\omega) = \frac{W(j\omega)}{1 + hW(j\omega)} = \frac{1}{h + \frac{1}{W(j\omega)}} \tag{10.22}$$

e nella banda in cui risulta $h \gg \frac{1}{|W(j\omega)|}$ la risposta armonica rimane essenzialmente costante al variare di ω , anche qualora $W(j\omega)$ subisse notevoli variazioni.

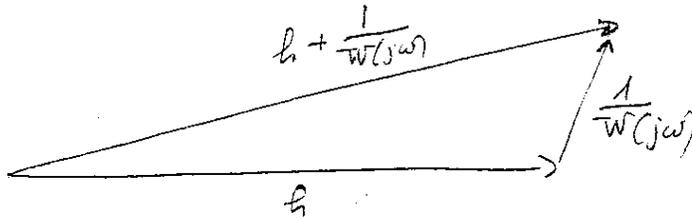


Figura 10.3.13

Ne consegue che, in generale, la banda di un sistema reazionato è più larga di quella del sistema ad anello aperto. [Per un sistema passabasso, la larghezza di banda ω_f è la pulsazione alla quale il modulo della risposta armonica è inferiore di 3 db rispetto al valore statico (i.e.

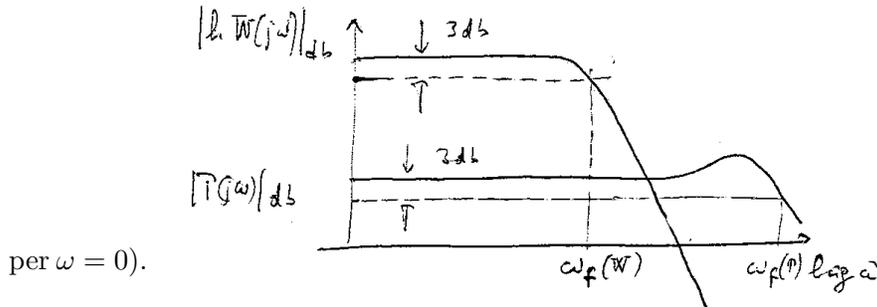


Figura 10.3.14

10.4 Errore a regime nei sistemi retroazionati

Una specifica di notevole importanza è l'errore a regime del sistema retroazionato nella risposta ai segnali canonici (gradino, rampa, etc.).

Ad esempio, in un asservimento di posizione soggetto a un gradino o ad una rampa, si vuole che l'albero (la cui posizione angolare funge da uscita) assuma a regime una posizione corrispondente alla variabile di riferimento, entro specificati limiti di errore.

Per il calcolo dell'errore a regime si introducono le seguenti ipotesi:

- i) la funzione di trasferimento riferimento/errore ha tutti i poli nel semipiano $\Re s < 0$, ad eccezione di eventuali poli nell'origine, così da poter applicare il teorema del valore finale;
- ii) la retroazione è unitaria, per cui la variabile a valle della giunzione sommande dello schema di retroazione è l'errore, inteso come scostamento della variabile controllata $y(t)$ rispetto al riferimento $r(t)$. In quest'ottica, il comportamento desiderato è la ripetizione esatta del riferimento².

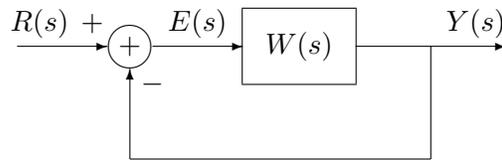


Figura 10.4.1

Supponiamo quindi di avere

$$E(s) = \frac{1}{1 + W(s)} R(s) \quad \text{con} \quad W(s) = K \frac{(1 + sT_1') \cdots}{s^{\nu_0} (1 + sT_1) \cdots}$$

dove ν_0 è il tipo del sistema, e consideriamo alcuni casi.

1. **Risposta al gradino** e conseguente “errore di posizione”: $r(\cdot)$ assume un valore (= una “posizione”) costante:

$$r(t) = \delta^{(-1)}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s}$$

$$E(s) = \frac{1}{s} \frac{1}{1 + W(s)}$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e(t) = \lim_{\sigma \rightarrow 0^+} E(\sigma)\sigma = \lim_{\sigma \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + W(\sigma)} = \frac{1}{1 + W(0)}$$

Perciò l'errore a regime

- ha valore finito (salvo per $K = -1$) e diverso da zero se il sistema $W(s)$ è di tipo 0:

$$e(\infty) = \frac{1}{1 + K}$$

²Negli esercizi si faranno ipotesi più generali

- ha valore nullo se $W(s)$ è di tipo 1 o superiore, dato che il questo caso il guadagno d'anello è infinito quando la pulsazione è nulla.

2. **Risposta alla rampa** e conseguente “errore di velocità”: $r(\cdot)$ ha una derivata (= una “velocità”) costante:

$$r(t) = \delta^{(-2)}(t) = t\delta^{(-1)}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s^2}$$

$$E(s) = \frac{1}{s^2} \frac{1}{1+W(s)}$$

Per l'errore a regime, applicando il teorema del valore finale

- se il sistema $W(s)$ ha tipo 0, esiste finito (salvo per $K = 0$) e non nullo il

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e(t)}{t} = \lim_{\sigma \rightarrow 0^+} \frac{\sigma^2}{\sigma^2(1+W(\sigma))} = \frac{1}{1+W(0)} = \frac{1}{1+K}$$

e perciò vale asintoticamente la

$$e(t) \sim \frac{1}{1+K} t$$

dove $K = K_s$ è il “guadagno statico” del sistema.

- se $W(s)$ è di tipo 1

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e(t) = \lim_{\sigma \rightarrow 0^+} \frac{\sigma}{\sigma^2(1+W(\sigma))} = \lim_{\sigma \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sigma W(\sigma)} = \frac{1}{K}$$

dove $K = K_v$ è la “costante di velocità” (guadagno di Bode nei sistemi di tipo 1) di $W(s)$.

- se $W(s)$ è di tipo 2, si ha

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e(t) = \lim_{\sigma \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sigma W(\sigma)} = \lim_{\sigma \rightarrow 0^+} = 0.$$

Inoltre risulta nullo l'errore a regime nella risposta al gradino, quindi nel sistema retroazionato sono nulli gli errori a regime corrispondenti a ogni combinazione lineare di rampa e gradino.

3. **Risposta alla parabola** e conseguente “errore di accelerazione”:

$$r(t) = \delta^{(-3)}(t) = \frac{t^2}{2}\delta^{(-1)}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s^3}$$

$$E(s) = \frac{1}{s^3} \frac{1}{1+W(s)}$$

- se il sistema $W(s)$ ha tipo 0 o tipo 1, sono finiti e non nulli i limiti di $e(t)/t^2$ e di $e(t)/t$, ovvero

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e(t)}{t^2} &= \lim_{\sigma \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + W(\sigma)} = \frac{1}{1 + K} && \text{tipo 0} \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e(t)}{t} &= \lim_{\sigma \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sigma(1 + W(\sigma))} = \frac{1}{K} && \text{tipo 1}\end{aligned}$$

- Se $W(s)$ è di tipo 2

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e(t) = \lim_{\sigma \rightarrow 0^+} \frac{\sigma}{\sigma^3(1 + W(\sigma))} = \lim_{\sigma \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sigma^2 W(\sigma)} = \frac{1}{K}$$

dove $K = K_a$ è la “costante di accelerazione” (= guadagno di Bode dei sistemi di tipo 2) di $W(s)$.

- se $W(s)$ è di tipo 3 o superiore, l'errore a regime è nullo.

tipo	guadagno di Bode			ingresso		
	di posiz.	di veloc.	di accel.	$\delta^{(-1)}$ err. di posiz.	$\delta^{(-2)}$ err. di veloc.	$\delta^{(-3)}$ err. di accel.
0	K_s			$\frac{1}{1 + K_s}$	∞	∞
1		K_v		0	$1/K_v$	∞
2			K_a	0	0	$1/K_a$

Il comportamento a regime è tanto migliore quanto più alto è il tipo del sistema. Per converso, tuttavia, si hanno problemi di stabilizzazione tanto più pesanti quanto più alto è il tipo: i sistemi di tipo 2 sono piuttosto rari e il loro impiego (che richiede l'uso di dispositivi accessori complessi per garantire la stabilità del sistema ad anello chiuso) è giustificato soltanto per sistemi di alta precisione (e costo conseguente...)

Osservazione L'errore a regime si può ottenere anche dalla funzione di trasferimento ad anello chiuso $T(s)$. Abbiamo allora

$$E(s) = R(s) - Y(s) = R(s) - T(s)R(s) = [1 - T(s)]R(s)$$

e, quando il limite esiste,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e(t) = \lim_{\sigma \rightarrow 0^+} [1 - T(\sigma)]R(\sigma)\sigma$$

Poniamo

$$T(s) = \frac{K'(s - z_1) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1) \cdots (s - p_n)}$$

1) È chiaro che la risposta al gradino dà errore a regime nullo se

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0^+} [1 - T(\sigma)] \frac{\sigma}{\sigma} = 0$$

ovvero se

$$T(0) = \frac{K' \prod_i (-z_i)}{\prod_i (-p_i)} = 1.$$

In altri termini, è necessario che il sistema reazionato sia di tipo 0 e che il guadagno di Bode di $T(s)$ sia unitario.

2) Nella risposta alla rampa, affinché l'errore non diverga deve essere

$$e(\infty) = \lim_{\sigma \rightarrow 0^+} \frac{1 - T(\sigma)}{\sigma} \neq \infty, \quad (10.23)$$

quindi ancora

$$1 - T(0) = 0.$$

Per ottenere il valore di $e(\infty)$ si può applicare la regola di De l'Hospital:

$$e(\infty) = \lim_{\sigma \rightarrow 0^+} \left(- \frac{dT(\sigma)}{d\sigma} \right) = \lim_{\sigma \rightarrow 0^+} \left(- \frac{1}{T(\sigma)} \frac{dT(\sigma)}{d\sigma} \right) = \lim_{\sigma \rightarrow 0^+} \left(- \frac{d \ln[T(\sigma)]}{d\sigma} \right) \quad (10.24)$$

Poiché

$$\ln T(\sigma) = \ln K' + \sum_i \ln(\sigma - z_i) - \sum_i \ln(\sigma - p_i)$$

da (10.24) si ricava

$$- \frac{d \ln[T(\sigma)]}{d\sigma} = - \sum_i \frac{1}{\sigma - z_i} + \sum_i \frac{1}{\sigma - p_i}$$

e per $\sigma \rightarrow 0$ si ottiene

$$e(\infty) = \sum_i \frac{1}{z_i} - \sum_i \frac{1}{p_i}.$$

dove z_i e p_i sono zeri e i poli di $T(s)$. Tale valore, nel caso di un sistema di tipo 1, rappresenta l'inverso della costante di velocità di $W(s)$: in altre parole

$$\frac{1}{K_v^{(W)}} = \sum_i \frac{1}{z_i} - \sum_i \frac{1}{p_i}$$

3) Nella risposta alla rampa parabolica la quantità

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0^+} \frac{1 - T(\sigma)}{\sigma^2} \quad (10.25)$$

è finita se $1 - T(0) = 0$ e inoltre $\lim_{\sigma \rightarrow 0^+} \frac{dT}{d\sigma} = 0$, ovvero se

$$\sum_i \frac{1}{z_i} = \sum_i \frac{1}{p_i}.$$

Quando le due condizioni sono soddisfatte, si ottiene, applicando due volte a (10.25) la regola di De l'Hospital,

$$\begin{aligned} \lim_{\sigma \rightarrow 0^+} -\frac{dT/d\sigma}{2\sigma} &= \lim_{\sigma \rightarrow 0^+} \frac{\left(-\frac{1}{T(\sigma)} \frac{dT(\sigma)}{d\sigma}\right)}{2\sigma} = \lim_{\sigma \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{d \ln T}{d\sigma}}{2\sigma} \\ &= \lim_{\sigma \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\sigma} \left(-\sum_i \frac{1}{\sigma - z_i} + \sum_i \frac{1}{\sigma - p_i}\right) \\ &= \lim_{\sigma \rightarrow 0^+} \frac{1}{2} \left(\sum_i \frac{1}{(\sigma - z_i)^2} - \sum_i \frac{1}{(\sigma - p_i)^2}\right) = \frac{1}{2} \left(\sum_i \frac{1}{z_i^2} - \sum_i \frac{1}{p_i^2}\right). \end{aligned}$$

Tale valore rappresenta allora l'inverso della costante di accelerazione di $W(s)$ (che è un sistema di tipo almeno 2)

$$\frac{1}{K_a^{(W)}} = \frac{1}{2} \left(\sum_i \frac{1}{z_i^2} - \sum_i \frac{1}{p_i^2}\right),$$

dove al solito z_i e p_i sono zeri e i poli di $T(s)$.

Si noti che $T(s)$ non ha poli nell'origine, mentre li ha $W(s)$.

- ESERCIZIO 10.4.1 [ERRORE A REGIME CON RETROAZIONE NON UNITARIA] Si consideri lo schema di figura

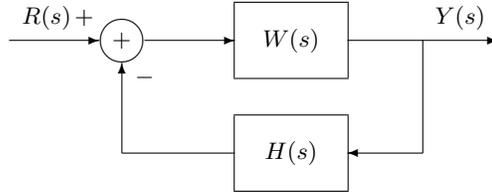


Figura 10.4.2

e si supponga che l'obiettivo (i.e. il comportamento ideale) sia rappresentato da una relazione di proporzionalità istantanea fra uscita e riferimento

$$y(t) = K_y r(t)$$

L'errore "riferito all'ingresso" è allora

$$e_r(t) = r(t) - \frac{y(t)}{K_y}$$

e, alle Laplace trasformate, è esprimibile come

$$E_r(s) = R(s) - \frac{W(s)/K_y}{1 + H(s)W(s)} R(s) = \frac{1 + H(s)W(s) - W(s)/K_y}{1 + H(s)W(s)} R(s) \quad (10.26)$$

Tale espressione può identificarsi con quella dell'errore in un sistema retroazionato con retroazione unitaria qualora si riesca ad imporre che la funzione di trasferimento da $R(s)$ a $E_r(s)$ abbia la forma $\frac{1}{1 + W_{\text{eq}}(s)}$ per una opportuna scelta di $W_{\text{eq}}(s)$. Scegliendo un sistema con funzione di trasferimento

$$W_{\text{eq}}(s) = \frac{W(s)}{K_y + W(s)[K_y H(s) - 1]} \quad (10.27)$$

si ottiene che $E_r(s)$ di (10.26) si esprime nella forma

$$E_r(s) = \frac{1}{1 + W_{eq}(s)} R(s)$$

e quindi coincide con l'errore nel sistema retroazionato di figura 10.4.3.

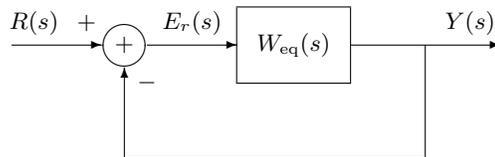


Figura 10.4.3

- ESERCIZIO 10.4.2 Si ricavi la formula (10.26) con tecniche di manipolazione dei diagrammi a blocchi.

‡ Soluzione. Modifichiamo lo schema di figura 10.4.2, in modo che il legame fra r e y rimanga immutato, ma risulti accessibile anche la grandezza $r - \frac{y}{K_y}$

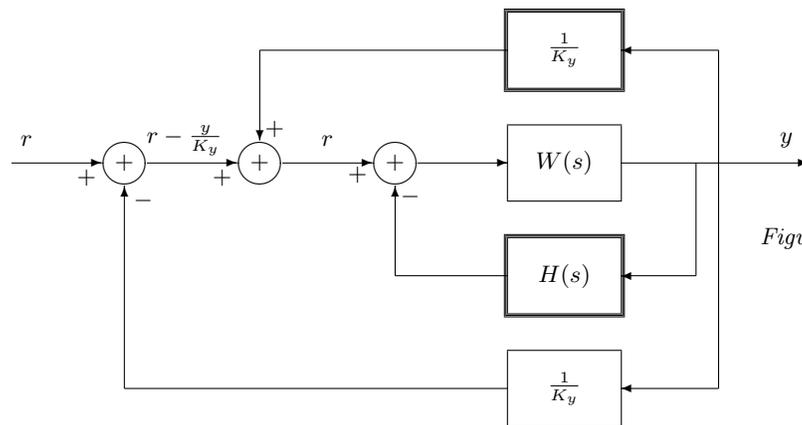


Figura 10.4.4

Assorbiamo in un unico blocco $H(s)$ e $1/K_y$

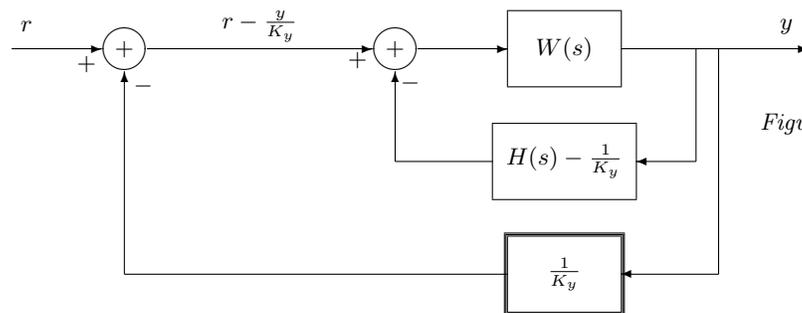


Figura 10.4.5

Riportiamo il blocco $1/K_y$ a monte della derivazione, ottenendo

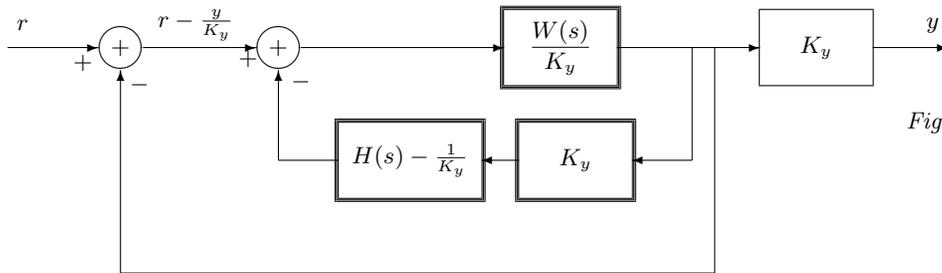


Figura 10.4.6

ed eliminiamo infine l'anello interno

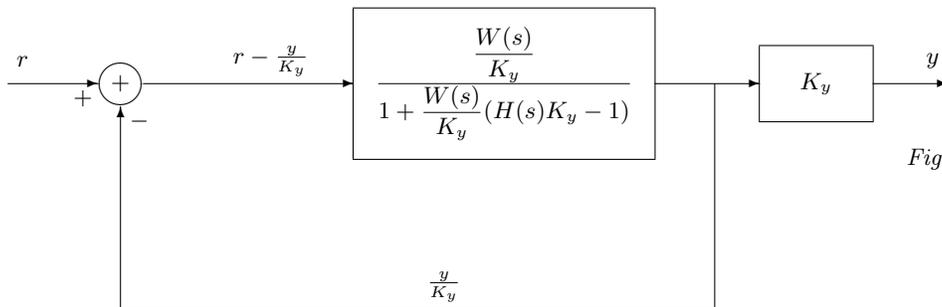


Figura 10.4.7

- **ESERCIZIO 10.4.3 [ERRORE A REGIME CON RETROAZIONE COSTANTE]** Se nell'esercizio precedente consideriamo il caso particolare in cui sia $H(s) = h = \text{cost}$, se possiamo ritenere $hW \gg 1$, la funzione di trasferimento del sistema ad anello chiuso è data da

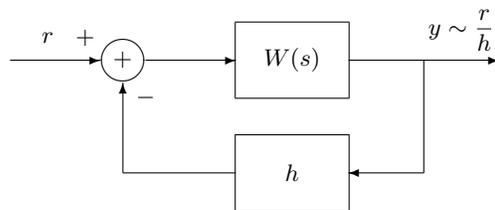


Figura 10.4.8

$$\frac{W}{1 + hW} \sim \frac{1}{h}$$

e pertanto risulta naturale assumere $K_y = 1/h$.

In queste condizioni (10.27) diventa

$$W_{\text{eq}} = \frac{Wh}{1 + Wh(\frac{h}{h} - 1)} = Wh$$

e per studiare l'errore ci si riconduce ad analizzare lo schema con retroazione unitaria, con funzione di trasferimento in catena diretta Wh e con $K_y = 1/h$:

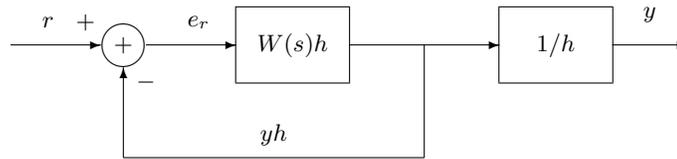


Figura 10.4.9

$$e_r = r - \frac{y}{K_y} = r - yh = r - \left(\frac{Wh}{1+Wh} \frac{1}{h} r \right) h = \left[1 - \frac{Wh}{1+Wh} \right] r = \frac{1}{1+Wh} r$$

10.5 Alcuni svantaggi della retroazione

1. In generale la retroazione diminuisce il guadagno complessivo: occorre allora accrescere il guadagno d'anello del sistema, e ciò può comportare la massa in opera di ulteriore componentistica e, di conseguenza, maggiore complessità.

2. I componenti della catena di retroazione debbono essere più accurati di quelli della catena diretta, dato che la sensibilità alle variazioni parametriche dei componenti posti sulla catena di retroazione non viene attenuata dalla retroazione. Ciò può comportare costi aggiuntivi, anche se piuttosto contenuti trattandosi in q di componenti passivi.

3. I sensori nella catena di retroazione possono introdurre rumore (in generale abbastanza contenuto).

4. La retroazione può indurre instabilità nel sistema ad anello chiuso, anche quando il sistema originale, a catena aperta, è stabile. Intuitivamente ciò si spiega tenendo presenti i ritardi entro il sistema: una retroazione negativa per certe frequenze può essere positiva per frequenze più alte (si veda, più avanti, il criterio di Nyquist).

10.6 Poli ad anello aperto e ad anello chiuso

Consideriamo l'anello "aperto" di un sistema in retroazione

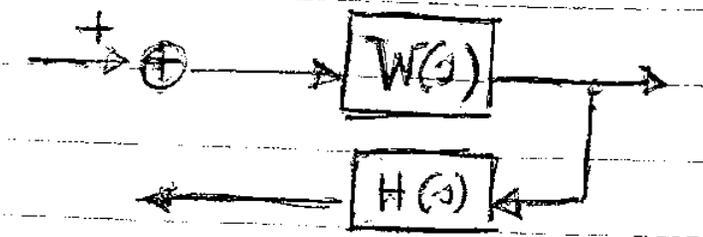


Figura 10.6.1

e siano

$$W(s) = \frac{q(s)}{p(s)} \quad \text{e} \quad H(s) = \frac{n(s)}{d(s)}$$

le funzioni di trasferimento, entrambe espresse in forma irriducibile, del sistema in catena diretta e di quello in catena di retroazione. Pertanto

- i poli di $W(s)$ sono gli zeri di $p(s)$,
- i poli di $H(s)$ sono gli zeri di $D(s)$, mentre

- i poli di $H(s)W(s)$, ovvero i poli di $\frac{q(s)n(s)}{p(s)d(s)}$ sono gli zeri di $p(s)d(s)$ al netto delle cancellazioni fra $q(s)$ e $d(s)$ e delle cancellazioni fra $n(s)$ e $p(s)$.

In generale, quindi, i poli del sistema ad “anello aperto” sono un sottoinsieme dell’unione dei poli di $W(s)$ e di $H(s)$. In particolare, se uno dei blocchi è una costante non nulla, i poli della funzione di trasferimento ad anello aperto coincidono con quelli dell’altro blocco.

Consideriamo ora il sistema ad “anello chiuso”

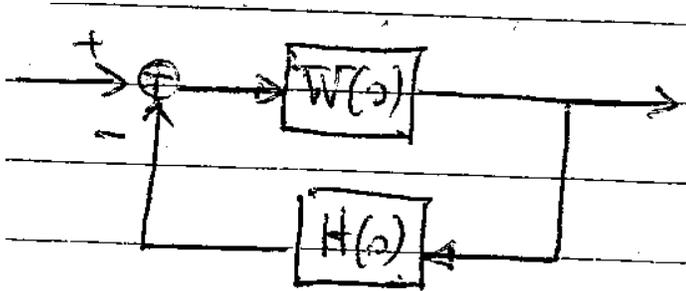


Figura 10.6.2

con funzione di trasferimento

$$T(s) = \frac{W(s)}{1 + H(s)W(s)} = \frac{q(s)d(s)}{p(s)d(s) + q(s)n(s)} \quad (10.28)$$

I poli di $T(s)$ sono gli zeri del polinomio $p(s)d(s) + q(s)n(s)$ quando ne siano stati soppressi i fattori comuni con il polinomio a numeratore $q(s)d(s)$ e quindi gli zeri del polinomio

$$\frac{p(s)d(s) + q(s)n(s)}{\text{MCD}(p(s)d(s) + q(s)n(s), q(s)d(s))} \quad (10.29)$$

Se consideriamo invece gli **zeri di $1 + H(s)W(s)$** ovvero gli zeri della funzione razionale $\frac{p(s)d(s) + q(s)n(s)}{p(s)d(s)}$, essi sono gli zeri del polinomio $p(s)d(s) + q(s)n(s)$ quando ne siano stati soppressi i fattori comuni con il polinomio $p(s)d(s)$, quindi gli zeri del polinomio

$$\frac{p(s)d(s) + q(s)n(s)}{\text{MCD}(p(s)d(s) + q(s)n(s), p(s)d(s))} \quad (10.30)$$

La situazione è rappresentata nel seguente diagramma

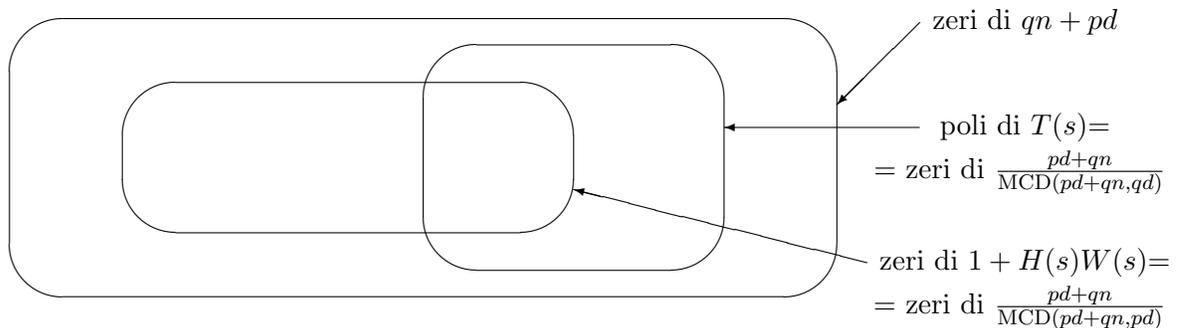


Figura 10.6.3

Esempio 10.6.1 Si considerino le funzioni razionali espresse in forma irriducibile

$$W(s) = \frac{q(s)}{p(s)} = \frac{s(s-2)}{(s-1)(s+1)(1+3s)}$$

$$H(s) = \frac{n(s)}{d(s)} = \frac{(s+\frac{1}{2})(s+1)}{s(s-1)(1-3s)}$$

Si ottiene

$$q(s)n(s) + p(s)d(s) = s^2(s+1)(-9s^3 + 18s^2 - 7s + \frac{1}{2}) = s^2(s+1)m(s)$$

$$T(s) = \frac{q(s)d(s)}{q(s)n(s) + p(s)d(s)} = \frac{(s-2)(s-1)(1-3s)}{(s+1)m(s)}$$

$$1 + H(s)W(s) = \frac{q(s)n(s) + p(s)d(s)}{p(s)d(s)} = \frac{sm(s)}{(s-1)^2(1+3s)(1-3s)}$$

(le frazioni sulla destra sono irriducibili). Nell'esempio considerato le inclusioni di figura 10.6.3 risultano tutte proprie.

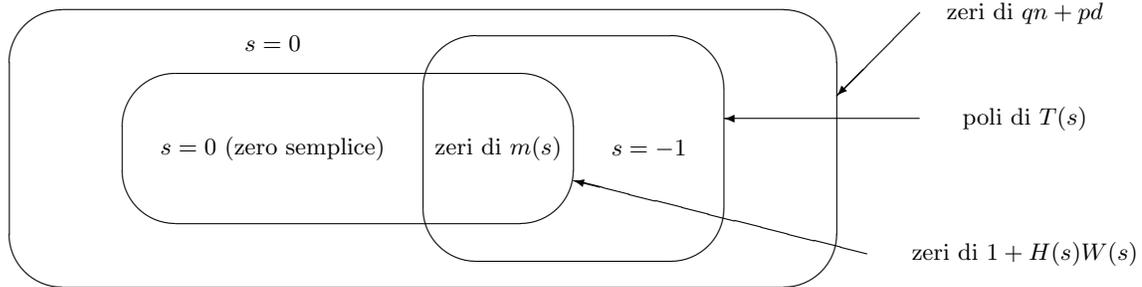


Figura 10.6.4

- **ESERCIZIO 10.6.1** Nelle ipotesi di irriducibilità fatte all'inizio del paragrafo,
 - se α è uno zero comune di $q(s)n(s) + p(s)d(s)$ e di $p(s)$, allora è uno zero di $n(s)$;
 - se α è uno zero comune di $q(s)n(s) + p(s)d(s)$ e di $q(s)$, allora è uno zero di $d(s)$;
 - se α è uno zero comune di $q(s)n(s) + p(s)d(s)$ e di $d(s)$, allora è uno zero di $q(s)$.

Per chiarire ulteriormente quali siano le relazioni fra i poli e gli zeri delle varie funzioni razionali in gioco, fattorizziamo i numeratori p, n e i denominatori q, d come segue

$$p(s) = \bar{p}(s)\text{MCD}(p, n)$$

$$n(s) = \bar{n}(s)\text{MCD}(p, n)$$

$$q(s) = \bar{q}(s)\text{MCD}(q, d)$$

$$d(s) = \bar{d}(s)\text{MCD}(q, d)$$

Si ha allora

$$1 + H(s)W(s) = \frac{q(s)n(s) + p(s)d(s)}{p(s)d(s)} = \frac{\bar{q}(s)\bar{n}(s) + \bar{p}(s)\bar{d}(s)}{\bar{p}(s)\bar{d}(s)}$$

e la seconda frazione è irriducibile. Infatti uno zero di \bar{p} non è zero di \bar{q} , perchè \bar{p} e \bar{q} sono coprimi, e non è zero di \bar{n} , perchè \bar{p} e \bar{n} sono coprimi. Analogamente \bar{d} non ha zeri comuni con $\bar{q}\bar{n}$.

Abbiamo così verificato la seguente

Proposizione 10.6.1 *Gli zeri di $1 + H(s)W(s)$ sono esattamente quelli del polinomio $\bar{q}(s)\bar{n}(s) + \bar{p}(s)\bar{d}(s)$* ■

Per quanto riguarda i poli di $T(s)$, osserviamo che

$$\begin{aligned} \frac{q(s)d(s)}{q(s)n(s) + p(s)d(s)} &= \frac{\bar{q}(s)\bar{d}(s)[\text{MCD}(q, d)]^2}{[\bar{q}(s)\bar{n}(s) + \bar{p}(s)\bar{d}(s)][\text{MCD}(q, d)][\text{MCD}(p, n)]} \\ &= \frac{\bar{q}(s)\bar{d}(s)[\text{MCD}(q, d)]}{[\bar{q}(s)\bar{n}(s) + \bar{p}(s)\bar{d}(s)][\text{MCD}(p, n)]} \end{aligned}$$

Il polinomio $\bar{q}\bar{d}$ non ha fattori comuni con il denominatore $[\bar{q}\bar{n} + \bar{p}\bar{d}][\text{MCD}(p, n)]$.

Infatti, se α è tale che $\bar{q}(\alpha) = 0$, allora

- $p(\alpha) \neq 0$, per la coprimalità di p e q ,
- α non è zero di $\text{MCD}(p, n)$.
- $[\bar{q}(\alpha)\bar{n}(\alpha) + \bar{p}(\alpha)\bar{d}(\alpha)] \neq 0$, altrimenti si avrebbe $0 = \bar{p}(\alpha)\bar{d}(\alpha) = \bar{d}(\alpha)$ e \bar{q}, \bar{d} non sarebbero coprimi.

In modo analogo si ragiona se α è tale che $\bar{d}(\alpha) = 0$.

Infine, possono esserci cancellazioni fra $\text{MCD}(q, d)$ e $[\bar{q}\bar{n} + \bar{p}\bar{d}]$, ma non fra $\text{MCD}(q, d)$ e $\text{MCD}(p, n)$. Infatti un eventuale β che sia zero comune ai polinomi $\text{MCD}(q, d)$ e $\text{MCD}(p, n)$ sarebbe zero comune di q e di p , che sono coprimi. Possiamo allora concludere con la seguente

Proposizione 10.6.2 *I poli di $T(s)$ sono gli zeri dei due polinomi*

$$\text{MCD}(p, n) \quad \text{e} \quad \frac{\bar{q}(s)\bar{n}(s) + \bar{p}(s)\bar{d}(s)}{\text{MCD}(\text{MCD}(q, d), \bar{q}\bar{n} + \bar{p}\bar{d})}$$
 ■

Esempio 10.6.1 - continuazione È immediato verificare che

$$\begin{aligned} \text{MCD}(p, n) = s + 1 &\Rightarrow \bar{p}(s) = (s - 1)(1 + 3s); \quad \bar{n}(s) = s + \frac{1}{2} \\ \text{MCD}(q, d) = s &\Rightarrow \bar{q}(s) = (s - 2); \quad \bar{d}(s) = (s - 1)(1 - 3s) \\ \bar{p}(s)\bar{d}(s) + \bar{q}(s)\bar{n}(s) &= s(-9s^3 + 18s^2 - 7s + \frac{1}{2}) \\ \bar{q}(s)\bar{d}(s) &= (s - 1)(s - 2)(1 - 3s) \end{aligned}$$

Gli zeri di $1 + H(s)W(s)$ sono quelli di $s(-9s^3 + 18s^2 - 7s + \frac{1}{2})$. Si noti che in

$$\frac{[\bar{q}(s)\bar{d}(s)][\text{MCD}(q, d)]}{[\bar{p}(s)\bar{d}(s) + \bar{q}(s)\bar{n}(s)][\text{MCD}(p, n)]} = \frac{[(s + 2)(s - 1)(1 - 3s)]s}{[s(-9s^3 + 18s^2 - 7s + \frac{1}{2})][s + 1]}$$

il numeratore è primo con $\bar{q}(s)\bar{d}(s)$ mentre c'è il fattore s in comune fra $\text{MCD}(q, d)$ e $\bar{p}(s)\bar{d}(s) + \bar{q}(s)\bar{n}(s)$. Tale fattore non divide nè $\bar{q}(s)$, né $\bar{d}(s)$.

Proposizione 10.6.3 Se $H(s) = k = cost \neq 0$, allora gli zeri di $1 + H(s)W(s)$ coincidono con i poli di $T(s)$ e con gli zeri del polinomio

$$q(s)n(s) + p(s)d(s) = p(s) + kq(s).$$

PROVA Lo si può vedere direttamente dalle formule delle due proposizioni precedenti o, più semplicemente, notando che in

$$1 + H(s)W(s) = \frac{p(s) + kq(s)}{p(s)}, \quad T(s) = \frac{q(s)}{p(s) + kq(s)}$$

il polinomio $p(s) + kq(s)$ non ha zeri comuni con $p(s)$ o con $q(s)$, per l'ipotesi di coprimalità di $p(s)$ e $q(s)$. ■

10.7 Riferimenti bibliografici

- Marro G. "Controlli Automatici", Zanichelli 1992
- Sinha N.K. "Control Systems" , Wiley, 1994