

# Capitolo 12

## Il luogo delle radici

### 12.1 Introduzione

Abbiamo visto nei capitoli precedenti come si possa aggiustare la posizione dei poli della funzione di trasferimento di un sistema reazionato variando il guadagno d'anello. Poiché il tipo di risposta transitoria è legata alla posizione dei poli, è importante capire come essi si muovano nel piano complesso  $\mathbb{C}$  quando il guadagno  $k$  della catena di reazione o qualche altro parametro vengono variati.

Inoltre, poiché dobbiamo prevedere una tolleranza nei valori dei parametri, è desiderabile stabilire come si muovano i poli in corrispondenza a piccole variazioni dei parametri del sistema.

Il metodo del luogo delle radici ([Evans, 1948]) è un procedimento grafico che consente di studiare come si muovano i poli della funzione di trasferimento ad anello chiuso (ovvero gli zeri del polinomio a denominatore della funzione di trasferimento) quando vari un suo parametro  $k$  (tipicamente da 0 a  $+\infty$ , o da  $-\infty$  a 0, o da  $-\infty$  a  $+\infty$ ). Originariamente impiegato per il caso in cui il parametro  $k$  è un fattore del guadagno di anello, il metodo si generalizza al caso in cui i coefficienti del polinomio in esame sono arbitrarie funzioni affini del parametro  $k$ , ossia quando si consideri un polinomio

$$f(s) = (\alpha_0 + k\beta_0) + (\alpha_1 + k\beta_1)s + \dots + (\alpha_n + k\beta_n)s^n$$

che, ovviamente, può risciversi nella forma

$$(\alpha_0 + \alpha_1 s + \dots + \alpha_n s^n) + k(\beta_0 + \beta_1 s + \dots + \beta_n s^n) = p(s) + kq(s).$$

A scopo introduttivo, consideriamo i seguenti esempi

**Esempio 12.1.1** Si considerino il sistema con retroazione unitaria e lo schema equivalente riportati in figura 12.1.1

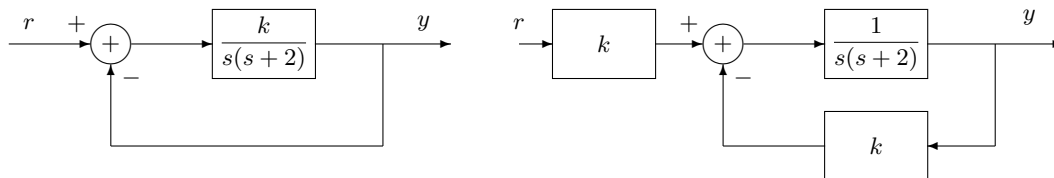


Figura 12.1.1

Al variare di  $k$ , la funzione di trasferimento ad anello chiuso è

$$T_k(s) = \frac{k}{s(s+2) + k}$$

e i poli sono gli zeri del polinomio  $s^2 + 2s + k$ , ovvero

$$s_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-k}$$

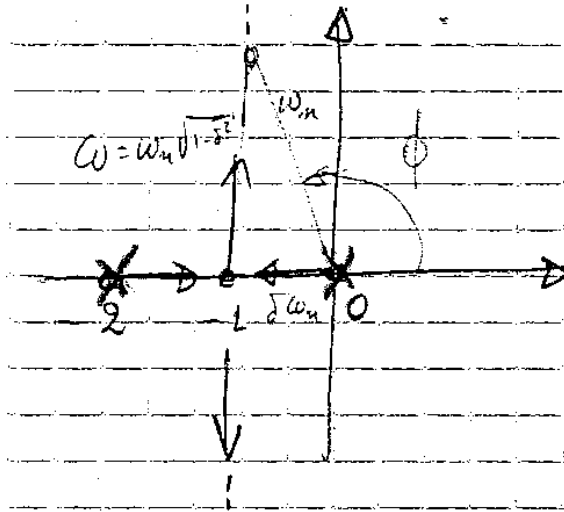


Figura 12.1.2

- Per  $k = 0$ , l'insieme degli zeri del polinomio è  $\{0, 2\}$  e coincide con i poli del sistema ad anello aperto  $\frac{1}{s(s+2)}$ ; tuttavia per  $k = 0$  il sistema di figura 12.1.1 ha funzione di trasferimento nulla;
- per  $k = 1$  si hanno due poli coincidenti in  $-1$ ;
- per  $k > 1$  l'insieme degli zeri del polinomio, e dei poli del sistema ad anello chiuso, è  $\{-1 \pm j\sqrt{k-1}\}$  e al divergere di  $k$  i poli tendono all'infinito lungo le due semirette uscenti da  $(-1, 0)$  e parallele all'asse immaginario.

Quindi il sistema risulta stabile per ogni  $k > 0$ . Per grandi valori di  $k$ , peraltro, il sistema è solo debolmente smorzato, risultando

$$\omega_n^2 = k, \quad 2\delta\omega_n = 2 \quad \Rightarrow \quad \delta = \frac{1}{\omega_n} = \frac{1}{\sqrt{k}}$$

**Esempio 12.1.2** Riconsideriamo il sistema dell'esempio precedente, fissando  $k$  al valore 25, e introduciamo una reazione “di velocità”, riportando in ingresso una grandezza proporzionale alla derivata dell'uscita. Lo schema risultante è riportato in figura 12.1.3

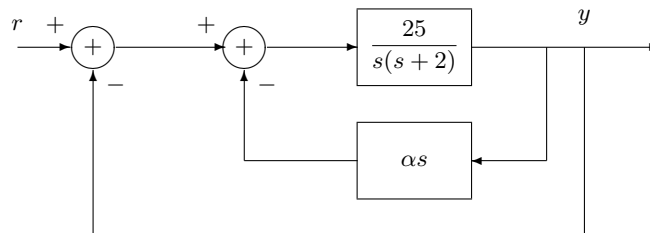


Figura 12.1.3

con  $\alpha$  variabile su  $\mathbb{R}$ , ed è equivalente allo schema

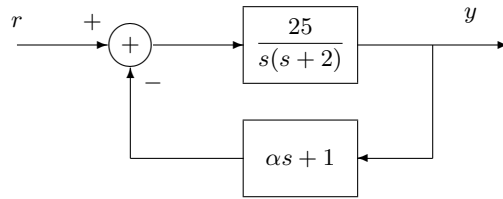


Figura 12.1.4

La funzione di trasferimento è data da

$$T_\alpha(s) = \frac{25}{s(s+2) + (\alpha s + 1)25} = \frac{25}{s^2 + s(2 + 25\alpha) + 25}$$

con denominatore

$$(s^2 + 2s + 25) + \alpha(25s) \tag{12.1}$$

[Lo studio della stabilità si riduce allora a quello del sistema riportato nella figura 12.1.5,

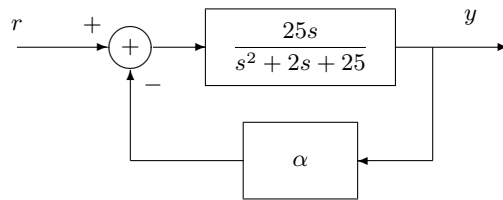


Figura 12.1.5

che peraltro non è equivalente, dal punto di vista ingresso-uscita, al sistema di figura 12.1.4]

Le radici di (12.1) sono

$$s_{1,2} = \frac{-(2 + 25\alpha) \pm \sqrt{4 + 625\alpha^2 + 100\alpha - 100}}{2}$$

In particolare, per  $\alpha = 0$ , si ottiene  $s_{1,2} = -1 \pm \sqrt{24}$ .

Si noti che, per i valori di  $\alpha$  in corrispondenza ai quali il polinomio  $s^2 + (2 + 25\alpha)s + 25$  i (12.1) ha due radici complesse coniugate, il loro prodotto vale 25 e quindi ciascuna di esse soddisfa la condizione

$$25 = (\Re s + j\Im s)(\Re s - j\Im s) = (\Re s)^2 + (\Im s)^2$$

e pertanto appartiene alla circonferenza di raggio 5 e centro l'origine del piano di Gauss.

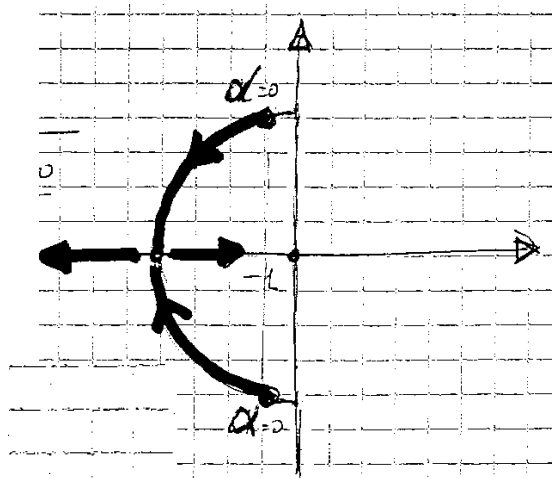


Figura 12.1.6

Le radici risultano coincidenti quando si annulla il discriminante del polinomio (12.1), ovvero per

$$(2 + 25\alpha)^2 - 100 = 0$$

Ciò si verifica per  $\alpha \sim 0.32$ .

Per valori di  $\alpha$  maggiori, si hanno due radici reali e distinte, una muove verso  $-\infty$ , l'altra verso l'origine (hanno segno concorde, perchè il loro prodotto vale 25; una almeno di esse è negativa perchè è negativa la loro somma  $-25\alpha - 2$ , quindi sono entrambe negative; una diverge in modulo al divergere di  $\alpha$  perchè diverge la loro somma, quindi l'altra deve tendere a zero, essendo costante il loro prodotto)

OSSERVAZIONE Se si considera l'esempio 12.1.1 per  $k = 25$ , si ottiene la situazione dell'esempio 12.1.2 per  $\alpha = 0$ . Tenendo fisso  $k$  al valore 25, si vede che la retroazione di velocità ha l'effetto di aumentare lo smorzamento, rispetto al caso precedente.

- ESERCIZIO 12.1.1 Tracciare il luogo delle radici per valori negativi di  $k$  nel primo esempio, e per valori negativi di *anelsecondo*.

## 12.2 Proprietà generali del luogo delle radici

Si consideri il sistema retroazionato di figura 12.2.1

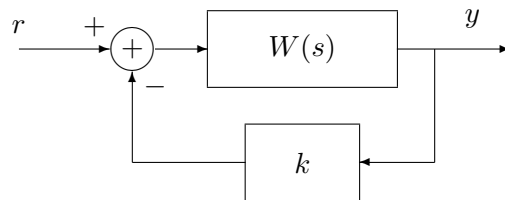


Figura 12.2.1

in cui, come è noto, la funzione di trasferimento del sistema reazionato è

$$T_k(s) = \frac{W(s)}{1 + kW(s)} \quad (12.2)$$

e si supponga che la funzione razionale  $W(s)$  sia propria, con rappresentazione irriducibile

$$W(s) = \frac{q(s)}{p(s)} \quad (12.3)$$

**Lemma 12.2.1** Se  $W(s)$  è strettamente propria e in (12.3) i gradi di  $q(s)$  e di  $p(s)$  sono rispettivamente  $m$  e  $n$ , allora

- i) per ogni valore di  $k$ , la rappresentazione

$$T_k(s) = \frac{q(s)}{p(s) + kq(s)} \quad (12.4)$$

è irriducibile e  $T_k(s)$  è strettamente propria, con numeratore e denominatore di grado  $m$  ed  $n$ , rispettivamente;

- ii) per ogni valore di  $k$ , gli zeri di  $T_k(s)$  coincidono (molteplicità inclusa) con quelli di  $W(s)$ ;

iii) per ogni  $k \neq 0$  i poli di  $T_k(s)$  sono tutti diversi dai poli e dagli zeri di  $W(s)$ , e sono gli zeri di  $1 + kW(s)$  (o, equivalentemente, del polinomio  $p(s) + kq(s)$ .)

PROVA (i) Dalla (12.2) si ricava immediatamente la rappresentazione (12.5), irriducibile perchè gli zeri di  $q(s)$  sono diversi da quelli di  $p(s)$ , e quindi non sono zeri di  $p(s) + kq(s)$ .  
ii) Ovvio.

iii) I poli di  $T_k(s)$  sono i punti  $\alpha \in \mathbb{C}$  in cui risulta  $p(\alpha) + kq(\alpha) = 0$ . Se  $k \neq 0$ , è chiaro che

$$\begin{aligned} p(\alpha) = 0 &\Rightarrow q(\alpha) \neq 0 \Rightarrow p(\alpha) + kq(\alpha) \neq 0 \\ q(\alpha) = 0 &\Rightarrow p(\alpha) \neq 0 \Rightarrow p(\alpha) + kq(\alpha) \neq 0 \end{aligned}$$

Inoltre

$$1 + kW(s) = \frac{p(s) + kq(s)}{p(s)}$$

ha, per  $k \neq 0$ , gli stessi zeri di  $p(s) + kq(s)$ , cioè i poli di  $T_k(s)$ . ■

**Lemma 12.2.2** *Se  $W(s)$  è propria, ma non strettamente propria, e se in (12.3) il grado di  $q(s)$  e di  $p(s)$  è  $n$ , allora*

i) per ogni valore di  $k$ , la rappresentazione

$$T_k(s) = \frac{q(s)}{p(s) + kq(s)} \quad (12.5)$$

è irriducibile ed esiste uno e un solo valore  $\bar{k}$  tale che  $T_{\bar{k}}(s)$  non è propria, mentre per ogni altro valore di  $k$  numeratore e denominatore di  $T_k(s)$  hanno grado  $n$ ;

(ii) e (iii) valgono come nel lemma 12.2.1.

PROVA (i) Se  $p(s)$  e  $q(s)$  hanno entrambi grado  $n$  e, come è lecito supporre,  $p(s)$  è monico,  $p(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0$ ,  $q(s) = b_n s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_1s + b_0$ ,  $b_n \neq 0$  scegliendo  $k = \bar{k} = -b_n^{-1}$  il polinomio  $p(s) + \bar{k}q(s)$  ha grado minore di  $n$  e da (12.5) si verifica che  $T_{\bar{k}}(s)$  non è strettamente propria<sup>1</sup>.

(ii) e (iii) sono immediate. ■

Da quanto abbiamo esposto, è chiaro che nello studio della stabilità del sistema di figura 12.2.1 al variare di  $k$  è essenziale determinare la posizione degli zeri di  $1 + kW(s)$ , ovvero del polinomio  $p(s) + kq(s)$ . Il sistema retroazionato risulterà BIBO stabile, ad eccezione del valore  $\bar{k}$  che rende non propria la funzione  $T_{\bar{k}}(s)$ , per tutti e soli i valori di  $k$  che allocano gli zeri di  $1 + kW(s)$ , ovvero di  $p(s) + kq(s)$ , nel semipiano aperto  $\Re s < 0$ .

**Definizione 12.2.3** *Il luogo delle radici è il sottoinsieme di  $C$  descritto dagli zeri del polinomio  $p(s) + kq(s)$  al variare di  $k$  sui numeri reali.*

*La porzione del luogo associata ai valori positivi di  $k$  si dirà “luogo positivo”, quella associata ai valori negativi si dirà “luogo negativo”.*

Si noti che

<sup>1</sup>Si osservi che anche per  $k = \bar{k}$  non si hanno zeri comuni fra  $q(s)$  e  $p(s) + \bar{k}q(s)$

- a ciascun valore del parametro  $k$  corrispondono  $n$  punti del luogo<sup>2</sup>, se contati con la rispettiva molteplicità, che rappresentano gli zeri di  $p(s) + kq(s)$ ;
- ogni punto del luogo è “taratp” dal valore di  $k$  che determina il punto stesso come zero di  $p(s) + kq(s)$ . Il luogo consta perciò di  $n$  rami parametrati in  $k$  e intersecantisi per i valori di  $k$  in corrispondenza ai quali il polinomio  $p(s) + kq(s)$  ha zeri multipli.
- Viceversa, ogni intersezione fra due rami del luogo corrisponde necessariamente a zeri multipli del polinomio  $p(s) + kq(s)$  per qualche  $k$ , ovvero non esistono due valori distinti  $k_1 \neq k_2$  tali che un punto del luogo corrispondente al valore  $k_1$  del parametro  $k$  sia anche un punto del luogo corrispondente al valore  $k_2$  [per assurdo, se  $p(\bar{s}) + k_1q(\bar{s}) = 0 = p(\bar{s}) + k_2q(\bar{s})$ , si avrebbe  $q(\bar{s}) = 0$ , quindi  $p(\bar{s}) = 0$ , e i polinomi  $p$  e  $q$  non sarebbero coprimi].

### 12.3 Tracciamento del luogo

Si suppone  $W(s)$  espressa nella forma fattorizzata

$$W(s) = K' \frac{(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)} \quad (12.6)$$

dove  $K'$  è legato al guadagno  $K$  della forma di Bode da<sup>3</sup>

$$K' = K(-1)^{m+n-\nu_0} \frac{\prod_{p_i \neq 0} p_i}{\prod_{z_i \neq 0} z_i}$$

- **ESERCIZIO 12.3.1** Se  $K > 0$  e  $W(s)$  è stabile e a fase minima, allora  $K'$  è a sua volta positivo.  
 ‡ *Suggerimento.* Dalle ipotesi,  $\nu_0 = 0$ , ogni coppia complessa coniugata dà contributo positivo alla produttoria in cui compare, ogni zero o polo reale e negativo contribuisce per un fattore negativo. Si tenga conto infine del fattore  $(-1)^{m+n-\nu_0}$

#### 12.3.1 Considerazioni generali

Come si è detto, il luogo delle radici è costituito dalle soluzioni (in generale, complesse) dell'equazione

$$p(s) + kq(s) = 0$$

al variare di  $k$  in  $\mathbb{R}$ , o equivalentemente dell'equazione

$$W(s) = \frac{1}{k}, \quad (12.7)$$

pur di considerare come soluzioni per  $k = 0$  i poli di  $W(s)$  (i.e. gli zeri di  $p(s)$ ). L'equazione (12.7) nelle incognite  $s$  e  $k$  (complessa la prima, reale la seconda), si può riscrivere come un sistema di due equazioni:

<sup>2</sup>fa eccezione il valore  $\bar{k}$  nel caso di una  $W(s)$  non strettamente propria

<sup>3</sup>le produttorie sono estese ai solo poli e zeri non nulli

- la prima coinvolge soltanto la fase di  $W(s)$  e individua i punti  $s \in \mathbb{C}$  che appartengono al luogo;

$$\angle W(s) = \begin{cases} (2h + 1)\pi & \text{se } k > 0 \\ 2h\pi & \text{se } k < 0 \end{cases} \quad (12.8)$$

- la seconda determina (a parte il segno) il valore di  $k$  cui corrisponde un particolare punto del luogo:

$$|W(s)| = 1/|k| \quad (12.9)$$

Per ogni  $s \in \mathbb{C}$ , se denotiamo con  $\zeta_i$  la fase di  $s - z_i$  e con  $\psi_i$  la fase di  $s - p_i$  in (12.6), la fase di  $W(s)$  è espressa da

$$\angle W(s) = \angle K' + \sum_{i=1}^m \zeta_i - \sum_{i=1}^n \psi_i$$

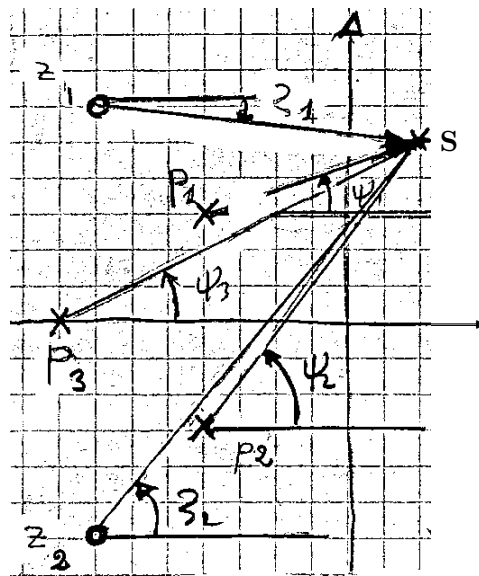


Figura 12.3.1

e la condizione (12.8) si scrive nella forma

$$\angle K' + \sum_{i=1}^m \zeta_i - \sum_{i=1}^n \psi_i = \begin{cases} (2h + 1)\pi & \text{se } k > 0 \\ 2h\pi & \text{se } k < 0 \end{cases} \quad (12.10)$$

con  $h$  intero arbitrario.

Analogamente, la (12.9) si riscrive come

$$|k| = \frac{1}{|K'|} \frac{\prod_i |P_i S|}{\prod_i |Z_i S|} \quad (12.11)$$

dove con  $|AB|$  si indica la lunghezza del segmento  $AB$ .

**Esempio 12.3.1** Nel caso di figura 12.3.1 e nell'ipotesi che il guadagno di Bode  $K$  sia positivo, è positivo anche  $K'$  perché  $W(s)$  è a fase minima. La (12.10) diventa allora, per valori positivi di  $k$ ,

$$\zeta_1 + \zeta_2 - \psi_1 - \psi_2 - \psi_3 = (2h + 1)\pi \quad (12.12)$$

e nel punto  $s$  in cui la (12.12) è soddisfatta, si ricava  $k$  da (12.11):

$$k = \frac{1}{K'} \frac{|P_1 S| |P_2 S| |P_3 S|}{|Z_1 S| |Z_2 S|} \quad (12.13)$$

**Osservazione** Lo studio degli zeri del polinomio  $p(s) + kq(s)$  al variare del parametro  $k$  è equivalente allo studio dei poli del sistema ad anello chiuso di figura 12.3.2

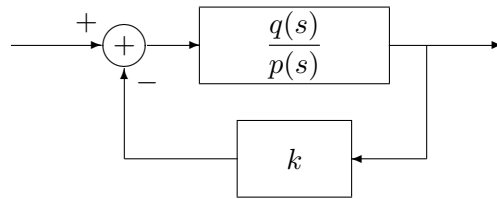


Figura 12.3.2

che ha funzione di trasferimento (irriducibile!)  $q(s)/p(s) + kq(s)$ . In generale, non è detto che la funzione di trasferimento del sistema di figura 12.3.2 coincida con la funzione di trasferimento che ha dato origine al problema di allocazione. Ad esempio, il sistema di figura 12.3.3

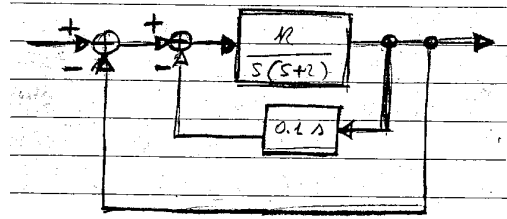


Figura 12.3.3

ha funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{k}{s(s+2) + k(0.1s+1)} = \frac{k}{s^2 + (2+0.1k)s + k}$$

il cui denominatore si può esprimere nella forma  $(s^2 + 2s) + k(0.1s + 1)$ . Per discutere i poli di  $G(s)$  al variare di  $k \neq 0$  possiamo studiare il sistema retroazionato da  $k$ , con funzione di trasferimento in catena diretta

$$W(s) = \frac{0.1s + 1}{s^2 + 2s}$$

e quindi con funzione di trasferimento ad anello chiuso

$$\frac{0.1s + 1}{(s^2 + 2s) + k(0.1s + 1)},$$

diversa da  $G(s)$ .



**12.3.2 Regole per il tracciamento**

Elenchiamo qui di seguito alcune regole per il tracciamento del luogo delle radici, accennando alla dimostrazione e fornendo vari esempi di applicazione.

Si supponrà costantemente  $W(s) = q(s)/p(s)$  con  $p$  e  $q$  coprimi,  $\deg p = n \geq \deg q = m$ ,  $p(s)$  monico.

**REGOLA 1** [NUMERO DEI RAMI E SIMMETRIA] Per ogni valore di  $k$ , eccetto il valore  $\bar{k}$  del lemma 12.2.2 (quando sia  $n = m$ ), il polinomio  $p(s) + kq(s)$  ha  $n$  radici complesse (contate con la rispettiva molteplicità). Al variare di  $k$ , il luogo delle radici comprende quindi nel piano di Gauss  $n$  rami e, poichè gli zeri complessi figurano in coppie coniugate, è simmetrico rispetto all'asse reale.

**REGOLA 2** [COMPORTAMENTO LIMITE E ASINTOTI]. Per  $k = 0$  il luogo è costituito dagli zeri di  $p(s)$ , quindi dai poli di  $W(s) = q(s)/p(s)$ .

Per  $k \rightarrow \pm\infty$ ,

- $m$  punti del luogo tendono agli zeri di  $q(s)$ , quindi agli zeri di  $W(s) = q(s)/p(s)$ .
- se  $n > m$ ,  $n - m$  punti tendono all'infinito lungo  $n - m$  semirette asintotiche, formanti due stelle regolari (una per  $k \rightarrow +\infty$ , l'altra per  $k \rightarrow -\infty$ ).

Entrambe le stelle hanno centro sull'asse reale, nel punto di ascissa

$$\sigma - a = \frac{1}{n - m} \left( \sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i \right) \tag{12.14}$$

Se  $K' > 0$  e  $k \rightarrow -\infty$  oppure se  $K' < 0$  e  $k \rightarrow +\infty$ , uno degli asintoti è l'asse reale positivo,

Se invece  $K' < 0$  e  $k \rightarrow -\infty$  oppure se  $K' > 0$  e  $k \rightarrow +\infty$ , uno degli asintoti forma un angolo pari a  $\frac{\pi}{n - m}$  l'asse reale positivo.

Gli altri  $n - m - 1$  asintoti formano con il primo angoli multipli interi di  $\frac{2\pi}{n - m}$

**Esempio 12.3.2** In figura 12.3.4 è riportata la stella di asintoti relativa al caso  $n - m = 4$  e  $K' > 0$ .

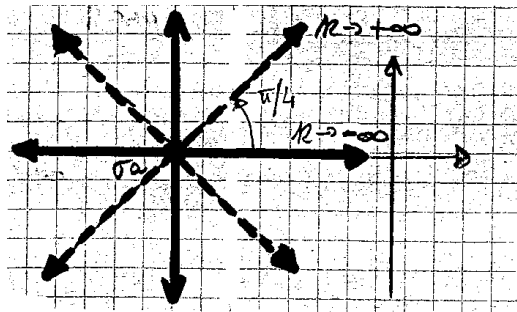


Figura 12.3.4

**CENNO DELLA PROVA** Determiniamo, al divergere di  $k$ , gli zeri di  $1 + kW(s)$ , soluzioni dell'equazione

$$0 = 1 + kK' \frac{s^m - s^{m-1}(\sum_{i=1}^m z_i) + \dots}{s^n - s^{n-1}(\sum_{i=1}^n p_i) + \dots} = 1 + kK' \frac{q'(s)}{p(s)} \tag{12.15}$$

A tale scopo, dall'algoritmo di divisione euclidea si ottengono quoziente e resto

$$p(s) = q'(s) \left[ s^{n-m} - \left( \sum_i p_i - \sum_i z_i \right) s^{n-m-1} + \dots \right] + r(s)$$

con  $\deg r(s) < m$ , e si esprime il quoziente con la potenza di un binomio, corretta da polinomio  $t(s)$  di grado minore di  $n - m - 1$ :

$$p(s) = q'(s) \left[ \left( s - \frac{1}{n-m} \left( \sum_i p_i - \sum_i z_i \right) \right)^{n-m} + t(s) \right] + r(s)$$

(12.15) si riscrive così nella forma

$$0 = \frac{1}{kK'} + \frac{1}{\frac{p(s)}{q'(s)}} = \frac{1}{kK'} + \frac{1}{\left( s - \frac{1}{n-m} \left( \sum_i p_i - \sum_i z_i \right) \right)^{n-m} + t(s) + \frac{r(s)}{q'(s)}}$$

Nell'intorno dell'infinito, lo sviluppo in potenze di  $s$  del denominatore dell'ultima frazione e del polinomio  $\left( s - \frac{1}{n-m} \left( \sum_i p_i - \sum_i z_i \right) \right)^{n-m}$  hanno i coefficienti dei termini di grado massimo  $n - m$  e di grado immediatamente inferiore  $n - m - 1$  coincidenti (si noti che  $r(s)/q'(s)$  tende a zero per  $s \rightarrow \infty$ ).

Quindi le equazioni

$$-\frac{1}{kK'} = \frac{1}{\left( s - \frac{1}{n-m} \left( \sum_i p_i - \sum_i z_i \right) \right)^{n-m}} = \frac{1}{(s - \sigma_a)^{n-m}} \quad (12.16)$$

e

$$-\frac{1}{kK'} = \frac{1}{p(s)/q'(s)} \quad (12.17)$$

hanno, per grandi valori di  $s$  le medesime soluzioni asintotiche.

Ma le soluzioni di

$$(s - \sigma_a)^{n-m} = -kK' \quad (12.18)$$

sono date da

$$s = \begin{cases} \sigma_a + |kK'|^{\frac{1}{n-m}} e^{jh \frac{2\pi}{n-m}} & \text{se } kK' < 0 \\ \sigma_a + |kK'|^{\frac{1}{n-m}} e^{j(h \frac{2\pi}{n-m} + \frac{\pi}{n-m})} & \text{se } kK' > 0 \end{cases} \quad (12.19)$$

per  $h = 0, 1, \dots, n - m - 1$ .

Ciò prova che l'equazione ha  $n - m$  soluzioni di "grande modulo" lungo gli asintoti, ottenute quando  $|k| \rightarrow \infty$ .

Altre  $m$  soluzioni al finito al divergere di  $|k|$  si ottengono da

$$0 = \frac{p(s)}{k} + q(s) \quad (12.20)$$

Il risultato è ovvio a livello intuitivo, dal momento che, al divergere di  $|k|$ , il termine  $p(s)/k$  è infinitesimo e (12.20) si può vedere come una versione perturbata dell'equazione  $0 = q(s)$ . Formalmente, esso può essere visto come conseguenza del seguente (corollario del)teorema di Hurwitz (Marden, pg.4) Se  $z$  è uno zero di molteplicità  $m$  del polinomio  $q(s)$  e se  $q_n(s)$  è una successione di polinomi che converge uniformemente al polinomio  $q(z)$  in una regione chiusa contenente  $z$  come punto interno, allora ogni intorno sufficientemente piccolo  $K$  di  $z$  contiene esattamente  $m$  zeri di tutti i polinomi  $q_n(s)$ , per  $n > N_k$ . ■

**Esempio 12.3.3** Data la funzione di trasferimento

$$W(s) = \frac{1}{s(s+4)(s+5)}, \tag{12.21}$$

si vogliono calcolare gli asintoti del luogo delle radici per  $k \rightarrow \pm\infty$ .

Notiamo che

$$n = 3, m = 0, \text{ quindi esistono } n - m = 3 \text{ semirette asintotiche;}$$

$$K' = 1$$

Il centro della stella di asintoti è sull'asse reale, alla ascissa

$$\sigma_a = \frac{1}{n - m} (\sum_i p_i - \sum_i z_i) = \frac{1}{3} (0 - 4 - 5) = -3$$

Quando è  $k > 0$ , gli asintoti formano con l'asse reale positivo angoli pari a

$$\frac{\pi}{n - m} = \frac{\pi}{3}, \quad \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = \pi, \quad \frac{\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} = -\frac{\pi}{3};$$

quando è  $k < 0$ , gli asintoti formano con l'asse reale positivo angoli pari a

$$0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$$

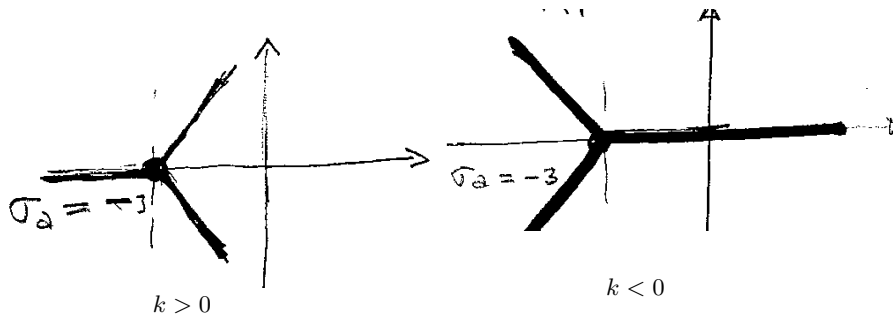


Figura 12.3.5

I luoghi corrispondenti a  $k > 0$  e a  $k < 0$  sono riportati in figura 12.3.6.

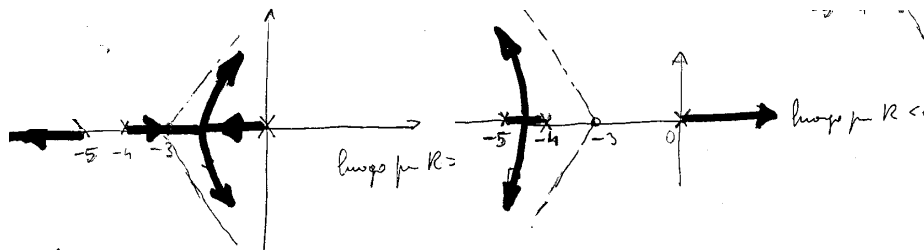


Figura 12.3.6

**REGOLA 2'** [COMPORAMENTO LIMITE QUANDO  $n = m$ ] In questo caso, quando  $k \rightarrow \pm\infty$  le radici tendono agli  $n$  zeri di  $q(s)$ .

Inoltre, quando  $\bar{k} = -(K')^{-1}$ , il numero delle radici di  $p(s) = \bar{k}q(s)$  è  $r$ , con  $0 < r < n$ , e le rimanenti  $n - r$  “vanno all'infinito”, per  $k \rightarrow \bar{k}$  sia da destra che da sinistra.

Il comportamento per  $k \rightarrow \bar{k}$  può essere ridotto a quello del caso  $n > m$  riferendosi alla funzione  $(s) = W(s) - K'$  (12.21)

dove  $G(s)$  è strettamente propria, con grado del numeratore  $m$  minore del grado  $n$  del denominatore.

- ESERCIZIO 12.3.2 Se  $W(s) = q(s)/p(s)$  è irriducibile, con  $\deg q = p = n$ , e se  $z(s)$  è il resto della divisione di  $q(s)$  per  $p(s)$ , allora in (12.3.2) si ha  $G(s) = z(s)/p(s)$ , con  $z(s)$  e  $p(s)$  coprimi.

Tenendo conto della (12.3.2), l'equazione (12.7) per determinare il luogo delle radici si può riscrivere come

$$\begin{aligned} 1 + kW(s) = 0 &\Leftrightarrow 1 + k(G(s) + K') = 0 \\ &\Leftrightarrow 1 + kK' + kG(s) = 0 \\ &\Leftrightarrow 1 + \frac{k}{1 + kK'}G(s) = 0 \end{aligned} \quad (12.22)$$

e ponendo

$$\tilde{k} := \frac{k}{1 + kK'}$$

si studia il luogo delle radici di  $G(s)$  al variare di  $\tilde{k}$ . Esso è anche il luogo delle radici di  $W(s)$ : i valori di  $k$  si ottengono da quelli di  $\tilde{k}$  ponendo

$$k = \frac{\tilde{k}}{1 - \tilde{k}K'}$$

**Esempio 12.3.4** Si consideri la funzione di trasferimento propria, ma non strettamente propria,

$$W(s) = \frac{2s^3 + 18s^2 + 40s + 1}{s(s+4)(s+5)} = 2 \frac{s^3 + 9s^2 + 20s + \frac{1}{2}}{s(s+4)(s+5)}$$

Essendo  $K' = 2$  i rami del luogo vanno all'infinito quando

$$k = (-K')^{-1} = -\frac{1}{2}$$

Se poniamo

$$G(s) := W(s) - K' + \frac{1}{s(s+4)(s+5)}$$

siamo nella situazione dell'esempio 12.3.3. La ricerca delle soluzioni di  $1 + kW(s) = 0$  equivale alla ricerca delle soluzioni di  $1 + \tilde{k}G(s) = 0$ , con

$$\tilde{k} = \frac{k}{1 + kK'}$$

Quindi il luogo di  $W(s)$  coincide con quello di  $G(s)$ , ma è parametrato diversamente.

Il valore  $\tilde{k} = \pm\infty$  si ha per  $k/(1 + 2k) = \pm\infty$ , quindi

$$\begin{cases} \tilde{k} = +\infty & \text{per } k = -(\frac{1}{2})_+ \\ \tilde{k} = -\infty & \text{per } k = -(\frac{1}{2})_- \end{cases}$$

Gli asintoti del luogo negativo della funzione strettamente propria  $G(s)$  corrispondono a quelli del luogo delle radici della funzione propria  $W(s)$  quando per quest'ultima  $k \rightarrow -1/2$  da sinistra, gli asintoti del luogo positivo di  $G(s)$  corrispondono a quelli del luogo di  $W(s)$  quando per quest'ultima  $k \rightarrow -1/2$  da destra.

**REGOLA 3 PUNTI DEL LUOGO SITUATI SULL'ASSE REALE** Se  $s = \sigma \in \mathbb{R}$ , nell'equazione (12.10)

- due zeri o due poli complessi coniugati di  $W(s)$  danno contributo globalmente nullo alla fase di  $W(\sigma)$
- i poli e gli zeri reali di  $W(s)$  danno ciascuno un contributo nullo alla fase se si trovano a sinistra di  $\sigma$  e un contributo pari a  $\pi$  se si trovano a destra di  $\sigma$ .

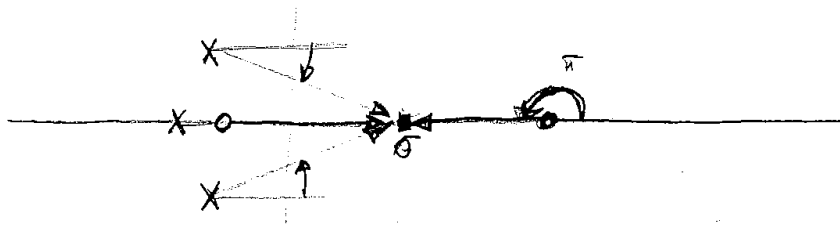


Figura 12.3.7

Se  $k > 0$  e  $K' > 0$ , la condizione perché  $\sigma \in \mathbb{R}$  appartenga al luogo è che

$$\angle W(\sigma) = (2h + 1)\pi$$

ed è soddisfatta se e solo se

$$\sum_{\substack{\text{zeri reali} \\ \text{a destra di } \sigma}} \zeta_i - \sum_{\substack{\text{poli reali} \\ \text{a destra di } \sigma}} \psi_i = (2h + 1)\pi$$

e quindi se il numero totale<sup>4</sup> degli zeri e dei poli reali (al finito) a destra di  $\sigma$  è dispari. Si verifica allora facilmente che la medesima condizione vale se  $k < 0$  e  $K' < 0$ , mentre se  $k$  e  $K'$  hanno segno discorde, il punto  $\sigma$  appartiene al luogo se e solo se il numero complessivo degli zeri e dei poli reali a destra di  $\sigma$  è pari.

**Esempio 12.3.5** Caso  $k > 0, K' > 0$  La figura 12.3.8 esemplifica, sulla base del numero dei poli e degli zeri di  $W(s)$ , i punti dell'asse reale che appartengono al luogo positivo.

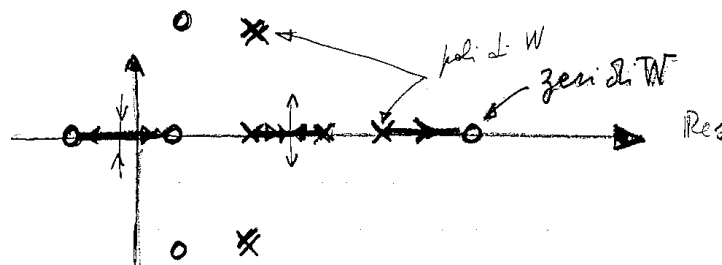


Figura 12.3.8

<sup>4</sup>contando anche le molteplicità

**Esempio 12.3.6** Consideriamo la funzione di trasferimento  $W(s) = \frac{1}{s(s+4)(s+5)}$ . In figura 12.3.9 è riportato in grassetto il sottoinsieme di  $\mathbb{R}$  facente parte del luogo positivo e a tratteggio quello facente parte del luogo negativo.

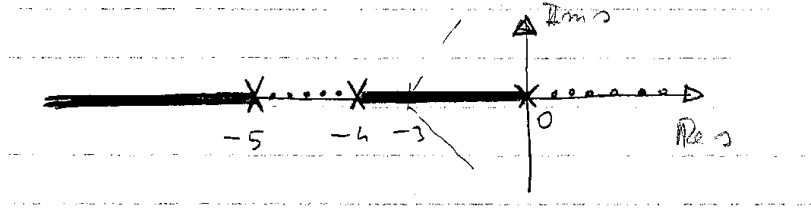


Figura 12.3.9

**Esempio 12.3.7** Consideriamo la funzione di trasferimento  $W(s) = \frac{s+2}{(s+1)(s+3)}$ . In figura 12.3.10 è riportato in grassetto il luogo positivo.

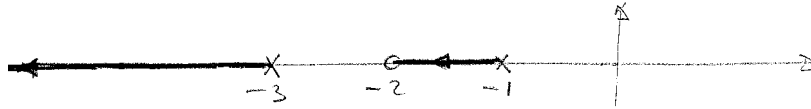


Figura 12.3.10

In questo esempio piuttosto semplice la verifica sulla struttura del luogo è diretta: gli zeri del polinomio

$$(s+1)(s+3) = k(s+2) = s^2 + s(4+k) + (3+2k)$$

sono

$$s_{1,2} = \frac{4+k \pm \sqrt{k^2+4}}{2},$$

reali per ogni  $k$  reale.

**REGOLA 4** Se due poli reali  $p_1$  e  $p_2$  (o due zeri reali) di  $W(s)$  non sono separati da un polo o da uno zero, il segmento che li congiunge appartiene interamente al luogo positivo o al luogo negativo.

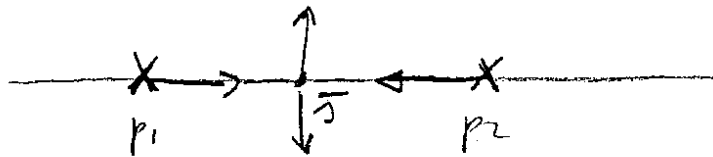


Figura 12.3.11

Con riferimento alla figura 12.3.11, se il segmento  $[p_1, p_2]$  appartiene (ad esempio) al luogo positivo, quando  $k$  cresce da 0 a  $+\infty$

- due rami si dipartono, uno da  $p_1$  verso destra e l'altro da  $p_2$  verso sinistra,
- per qualche valore di  $k$  si incontrano in un punto  $\bar{s}$ , che pertanto è uno zero doppio di  $p(s) + kq(s)$ ,
- quando  $k$  cresce ulteriormente, i due rami proseguono come rami corrispondenti a una coppia di zeri complessi coniugati di  $p(s) + kq(s)$

Il "punto di diramazione"  $\bar{s}$  può essere determinato imponendo che esso sia uno zero reale doppio del polinomio  $p(s) + kq(s)$ , per qualche valore del parametro  $k$ , quindi deve essere uno zero reale comune al polinomio  $p(s) + kq(s)$  e al suo derivato

$$\frac{dp}{ds} + k \frac{dq}{ds} = 0 \tag{12.23}$$

per qualche scelta del guadagno  $k$ .

Un metodo alternativo per trovare i punti di diramazione richiede di studiare il guadagno  $k(\sigma)$  che individua ciascun punto del segmento  $[p_1, p_2]$  al variare di  $\sigma$ . Nel punto di diramazione,  $k(\sigma)$  raggiunge il valore massimo (il valore minimo nel caso del luogo negativo) e perciò risulta

$$\frac{dk(\sigma)}{d\sigma} \Big|_{\sigma=\bar{s}} = 0 \tag{12.24}$$

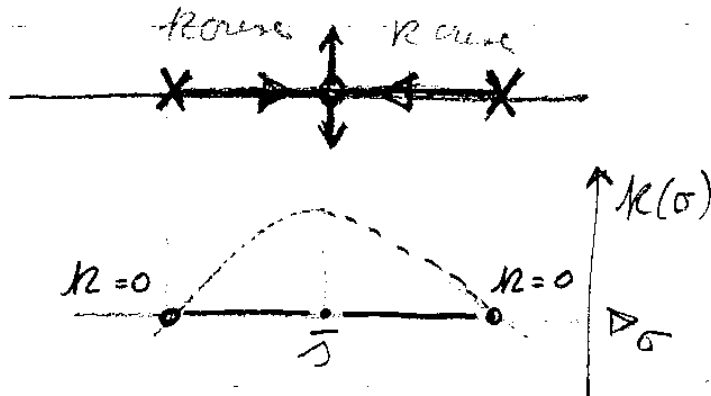


Figura 12.3.12

**Esempio 12.3.8** Data la funzione di trasferimento

$$W(s) = \frac{s+5}{(s+2)(s+3)} = \frac{q(s)}{p(s)},$$

per determinare il luogo positivo di  $p(s) + kq(s)$  si riportano anzitutto i poli e gli zeri di  $W(s)$  e, in base alle regole precedenti, si costruiscono i tratti reali del luogo.

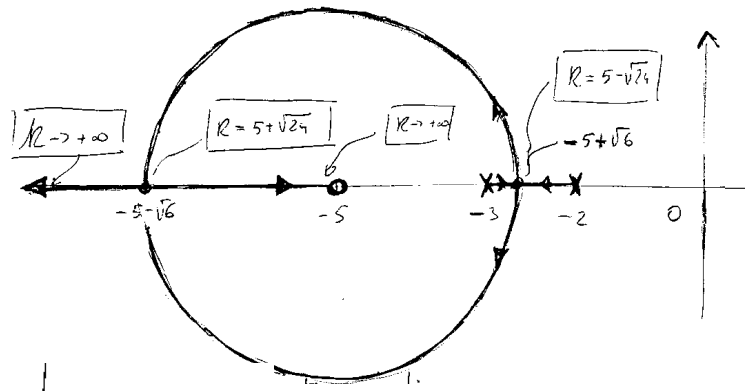


Figura 12.3.13

Per determinare i punti di diramazione, si cercano le soluzioni del sistema

$$p(s) + kq(s) = (s^2 + 5s + 6) + k(s + 5) = 0 \quad (12.25)$$

$$\frac{dp}{ds} + k \frac{dq}{ds} = 2s + 5 + k = 0 \quad (12.26)$$

nelle incognite  $s$  e  $k$ . Da (12.26) ricaviamo  $\bar{s} = (-5 - k)/2$  e, sostituendone l'espressione in (12.25),

$$\frac{25 + 10k + k^2}{4} - \frac{25 + 5k}{2} + 6 - k \frac{5 + k}{2} + 5k = 0$$

Quindi  $k$  soddisfa l'equazione  $k^2 - 10k + 1 = 0$ , che ha due soluzioni entrambe positive:

$$k_{1,2} = 5 \pm \sqrt{24}$$

In corrispondenza a  $k_1 = 5 - \sqrt{24}$  ricaviamo la coordinata del punto di diramazione interno al segmento  $[-3, -2]$

$$\bar{s}_1 = \frac{-5 - k_1}{2} = -5 + \sqrt{6}$$

Analogamente per  $k_2 = 5 + \sqrt{24}$  ricaviamo il secondo punto di diramazione, in  $(-\infty, -5]$

$$\bar{s}_2 = -5 - \sqrt{6}$$

Alternativamente, si può determinare la dipendenza di  $k$  da  $s$  sul luogo, ricavando da (12.25)

$$k = -\frac{s^2 + 5s + 6}{s + 5}$$

e derivare rispetto a  $s$  l'espressione così trovata

$$\frac{dk}{ds} = \frac{-s^2 - 10s - 19}{(s + 5)^2}$$

La derivata si annulla per  $s^2 + 10s + 19 = 0$  e quindi in  $\bar{s}_{1,2} = -5 \pm \sqrt{6}$ . Poi si prosegue come in precedenza.

- ESERCIZIO 12.3.3 Si determini la struttura del luogo delle radici quando  $W(s)$  ha  $K' > 0$ , uno zero reale in  $z_1$  e due poli coniugati in  $p_1$  e in  $p_2 = \bar{p}_1$ .

‡ Suggestimento (a) Dalla regola 3, il semiasse da  $z_1$  a  $-\infty$  fa parte del luogo positivo, mentre il semiasse complementare fa parte del luogo negativo;

b) Per  $k = 0$  il luogo è sui poli, e la circonferenza avente per centro il punto  $z_1$  e per raggio la congiungente di  $z_1$  con i poli fa parte del luogo (in parte positivo, in parte negativo).

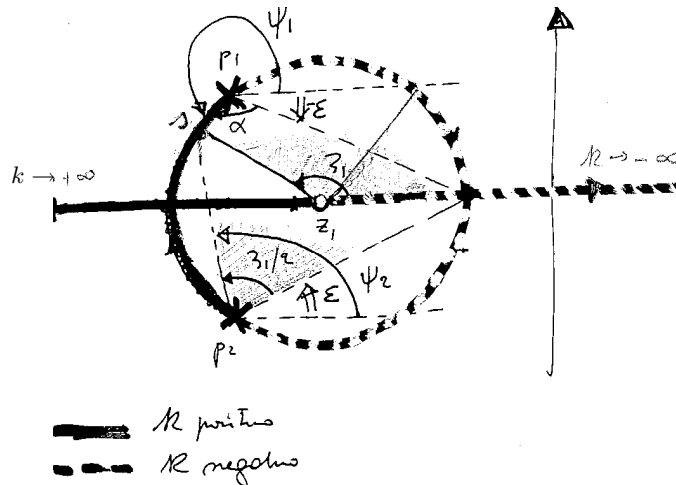


Figura 12.3.14



Infatti, preso un punto  $s$  della circonferenza e ricordando che l'angolo al centro è doppio dell'angolo alla circonferenza che insiste sul medesimo arco, si ha

$$2(\psi_2 - \epsilon) = \zeta_1 \quad (12.27)$$

$$2\alpha = 2\pi - \zeta_1 \quad (12.28)$$

Ma  $\alpha = 2\pi - \psi_1 - \epsilon$  e quindi la (12.28) diventa

$$2(2\pi - \psi_1 - \epsilon) = 2\pi - \zeta_1 \quad (12.29)$$

e sottraendo da (12.27) la (12.29)

$$2\psi_2 - 2\epsilon - 4\pi = 2\psi_1 + 2\epsilon = 2\zeta_1 - 2\pi$$

si ricava

$$-\pi = \zeta_1 - \psi_1 - \psi_2$$

ovvero il punto  $s$  soddisfa la prima delle condizioni di fase (12.10), quella relativa al luogo positivo. Analoghe condizioni valgono per i punti a tratteggio della circonferenza in figura 12.3.14, relativi al luogo negativo.

- ESERCIZIO 12.3.4 Si consideri il luogo delle radici di

$$s^2 - (\beta_1 + \alpha_1 k)s + (\beta_0 + \alpha_0 k) = 0 \quad (12.30)$$

con  $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1$  costanti reali assegnate. Sotto quali condizioni su tali costante il luogo comprende, al variare di  $k$  una circonferenza avente il proprio centro sull'asse reale?

‡ Soluzione Consideriamo dapprima l'equazione di una circonferenza con centro l'origine e raggio  $r$

$$s = re^{j\theta}, \quad \theta \in \mathbb{R}$$

I punti  $s$  della circonferenza soddisfano, per ogni  $\theta$  reale, le condizioni

$$s - re^{j\theta} = 0, \quad s - re^{-j\theta} = 0 \quad (12.31)$$

quindi l'equazione

$$s^2 - sr(e^{j\theta} + e^{-j\theta}) + r^2 = s^2 - 2rs \cos \theta + r^2 \quad (12.32)$$

Viceversa, per  $\theta$  reale, tutte le soluzioni di (12.32) appartengono alla circonferenza. Se il centro della circonferenza è  $c \neq 0$ ,  $c \in \mathbb{R}$ , i suoi punti  $s$  soddisfano l'equazione

$$(s - c)^2 - 2r(s - c) \cos \theta + r^2 = 0$$

ovvero  $s^2 - s(2r \cos \theta + 2c) + (r^2 + c^2 + 2rc \cos \theta) = 0$  ovvero ancora

$$s^2 - s(h + 2c) + (r^2 + c^2 + ch) = 0, \quad h \in [-2r, 2r]$$

o anche, ponendo  $h = h' + n$

$$s^2 - s(2c + n + h') + (r^2 + c^2 + cn + ch') = 0 \quad (12.33)$$

Se allora

- $p_1$  e  $p_2$  sono gli zeri del polinomio  $(s^2 - \beta_1 s + \beta_0)$
- $z_1$  è lo zero di  $-\alpha_1 s + \alpha_0$ ,

ponendo  $h' = \alpha_1 k$  l'equazione del luogo (12.30) si riscrive come

$$(s - p_1)(s - p_2) + k(-\alpha_1 s + \alpha_0) = s^2 - s(p_1 + p_2 + h') + (p_1 p_2 + h' z_1) = 0 \quad (12.34)$$

Identificando lo zero  $z_1$  con il centro  $c$ , si ottiene da (12.33) e (12.34)

$$\begin{cases} p_1 + p_2 = 2c + n = 2z_1 + n \\ p_1 p_2 = r^2 + c^2 + cn = r^2 + z_1^2 + z_1 n \end{cases}$$

ovvero, moltiplicando per  $z_1$  la prima equazione e sottraendone la seconda

$$z_1(p_1 + p_2) - p_1 p_2 = 2z_1^2 - r^2 - z_1^2$$

che fornisce la condizione

$$(z_1 - p_1)(z_1 - p_2) = r^2$$

che può essere verificata se  $p_1$  e  $p_2$  sono complessi coniugati, oppure se sono reali e lasciano lo zero  $z_1$  dalla stessa parte sull'asse reale.

## 12.4 Ulteriori regole per il tracciamento del luogo

In questo paragrafo riportiamo altre regole, di impiego meno frequente, che possono risultare utili per risolvere il tracciamento del luogo.

**REGOLA 5** [COMPORAMENTO DEL LUOGO NELL'INTORNO DI UN POLO  $p_h$  DI  $W(s)$ , QUANDO IL GUADAGNO È PROSSIMO A ZERO] Sia  $K' > 0$  e consideriamo il luogo positivo delle radici. Se  $p_h$  è un polo di  $W(s)$  e  $\beta_h$  è l'angolo che la tangente in  $p_h$  al luogo delle radici forma con l'asse reale positivo, allora

$$\beta_h = \sum_{i=1}^m \zeta_i - \sum_{i \neq h} \psi_i + \pi \pmod{2\pi} \quad (12.35)$$

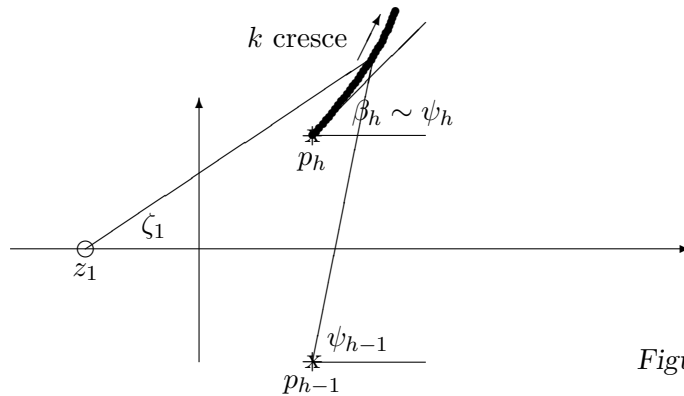


Figura 12.4.1

Infatti, dalla condizione di fase (12.10), quando  $s$  varia sul luogo positivo in prossimità di  $p_h$ , sofondendo la tangente al luogo in  $p_h$  con il luogo, abbiamo

$$\sum_{i=1}^m \zeta_i - \sum_{i \neq h} \psi_i - \beta_h = (2\nu + 1)\pi \quad (12.36)$$

dove  $\zeta_i$  e  $\psi_i$  si determinano dal diagramma dei poli e degli zeri come fasi dei vettori  $(p + h - z_i)$  e  $(p_h - p_i)$ . In altre parole,  $\beta_h$  si configura come il termine di “saldo” dell’equazione

$$\beta_h - \pi - \sum \zeta_i - \sum_{i \neq h} \psi_i = 0$$

Nel caso  $K' < 0$  si procede in modo analogo, aggiungendo a primo membro dell’equazione (12.36) il termine  $\angle K' = \pi$ .

**REGOLA 5'** [COMPORAMENTO DEL LUOGO NELL'INTORNO DI UNO ZERO  $z_h$  DI  $W(s)$ ] Quando  $k \rightarrow +\infty$  e  $K' > 0$ , il comportamento del luogo positivo nell'intorno di uno zero  $z_h$  al finito di  $p(s) + kq(s)$  (ossia di uno zero di  $q(s)$ ) è descritto dall'angolo  $\alpha_h$  che la tangente al luogo forma in  $\alpha_h$  con (la parallela al)l'asse delle ascisse

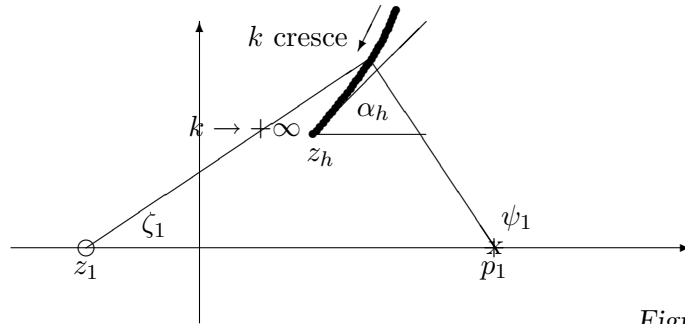


Figura 12.4.2

Da

$$\alpha_h + \sum_{i \neq h} \zeta_i - \sum_{i=1}^n \psi_i = (2h + 1)\pi$$

si ricava

$$\alpha_h = \pi + \sum_{i \neq h} \zeta_i - \sum_{i=1}^n \psi_i \quad (12.37)$$

**REGOLA 6** [RADICI MULTIPLE] Una radice  $\bar{s}$  del polinomio  $p(s) + kq(s)$ , multipla di ordine  $h$ , corrisponde a un punto comune ad  $h$  rami del luogo.

La condizione affinché ciò accada è che in  $\bar{s}$  e per il medesimo valore  $\bar{k}$  di  $k$  si annullino il polinomio  $p(s) + kq(s)$  e le sue prime  $h - 1$  derivate rispetto ad  $s$ . Quando ciò si verifica, nel punto  $\bar{s}$  si hanno  $h$  rami entranti ed  $h$  uscenti, alternati, le cui tangenti dividono il piano in  $2h$  settori di ampiezza  $\pi/h$  radianti ciascuno.

- ESERCIZIO 12.4.1  $f(s) \in \mathbb{R}[s]$  ha una radice multipla di ordine  $h$  in  $\bar{s}$  se e solo se

$$f(\bar{s}) = f^{(1)}(\bar{s}) + \dots = f^{(h-1)}(\bar{s}) = 0 \quad \text{e} \quad f^{(h)}(\bar{s}) \neq 0$$

PROVA La funzione polinomiale di due variabili

$$g(s, k) = p(s) + kq(s) \quad (12.38)$$

nel punto  $(\bar{s}, \bar{k})$  annulla tutte le derivate parziali nelle quali  $k$  sia derivata più di una volta e tutte le derivate parziali in cui  $s$  sia derivata meno di  $h$  volte. Nell'intorno di  $(\bar{s}, \bar{k})$  si ha allora

$$\begin{aligned} g(s, k) &= \frac{\partial g}{\partial k} \Big|_{(\bar{s}, \bar{k})} (k - \bar{k}) \\ &+ \frac{1}{h!} \frac{\partial^h g}{\partial s^h} \Big|_{(\bar{s}, \bar{k})} (s - \bar{s})^h \\ &+ \frac{1}{(h+1)!} \frac{\partial^{h+1} g}{\partial s^{h+1}} \Big|_{(\bar{s}, \bar{k})} (s - \bar{s})^{h+1} + \frac{1}{h!} \frac{\partial^{h+1} g}{\partial s^h \partial k} \Big|_{(\bar{s}, \bar{k})} (s - \bar{s})^h (k - \bar{k}) \\ &+ \text{derivate di ordine superiore} \end{aligned} \quad (12.39)$$

L'ipotesi sulla molteplicità implica che si abbia

$$M := \frac{1}{h!} \frac{\partial^h g}{\partial s^h} \Big|_{(\bar{s}, \bar{k})} \neq 0$$

e, ipotizzando che risulti anche

$$N := \left. \frac{\partial g}{\partial k} \right|_{(\bar{s}, \bar{k})} \neq 0$$

(12.39) si riscrive come

$$g(s, k) = N(k - \bar{k}) + M(s - \bar{s})^h + \dots$$

e le soluzioni dell'equazione  $g(s, k) = 0$  nell'intorno di  $(\bar{s}, \bar{k})$  sono esprimibili, approssimativamente, come soluzioni di

$$(s - \bar{s})^h = -\frac{N}{M}(k - \bar{k}) \quad (12.40)$$

Se  $k > \bar{k}$  e se  $(-N/M)^{1/h}$  è una particolare radice  $h$ -esima di  $-N/M$ , indicando con  $\epsilon_h^{(i)}$ ,  $i = 1, 2, \dots, h$  le radici  $h$ -esime dell'unità, la (12.40) ha per soluzioni, al variare di  $k > \bar{k}$ ,

$$s = \bar{s} + \left(-\frac{N}{M}\right)^{1/h} \epsilon_h^{(i)} |k - \bar{k}|^{1/h} \quad (12.41)$$

Se  $k < \bar{k}$ , le soluzioni di (12.40) sono date invece da

$$s = \bar{s} + \left(-\frac{N}{M}\right)^{1/h} \epsilon_h^{(i)} |k - \bar{k}|^{1/h} e^{j\pi/h} \quad (12.42)$$

■

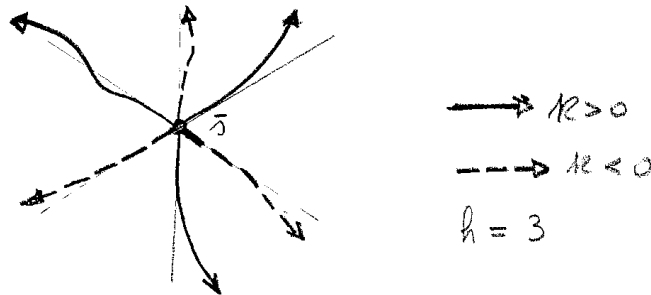


Figura 12.4.3

## 12.5 Applicazioni del luogo delle radici

Nell'esempio che discuteremo, vedremo come la scelta del guadagno in catena aperta possa determinare un assegnato smorzamento ai poli dominanti del sistema ad anello chiuso.

Si ricorda che, in un sistema stabile, i *poli dominanti*  $p_h$  sono quelli più prossimi all'asse immaginario, ossia quelli per cui è minimo il modulo della parte reale  $|\Re p_h|$ .

**Esempio 12.5.1** Si consideri un sistema del terz'ordine per il controllo di posizione, al quale si sia applicata una retroazione di velocità.

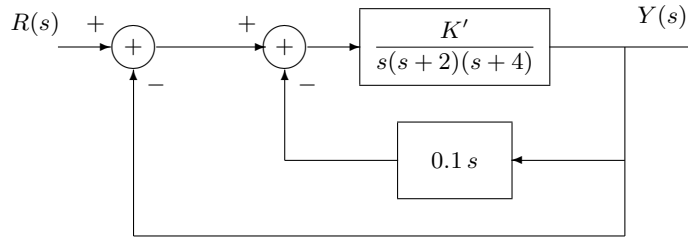


Figura 12.5.1

Il sistema ad anello chiuso ha funzione di trasferimento

$$Y(s) = \frac{K'}{s(s+2)(s+4) + [0.1K's + K']}$$

e i suoi poli sono gli zeri del polinomio

$$(s^3 + 6s^2 + 8s) + (0.1K')(s + 10) \tag{12.43}$$

ovvero le soluzioni di

$$1 + h \frac{s+10}{s(s+2)(s+4)} = 1 + hW(s) \tag{12.44}$$

dove si è posto

$$h = 0.1K' \quad e \quad W(s) = \frac{s+10}{s(s+2)(s+4)}$$

A) Cominciamo studiando la struttura del luogo degli zeri di  $1 + hW(s)$  al variare di  $h$  in  $\mathbb{R}_+$ .

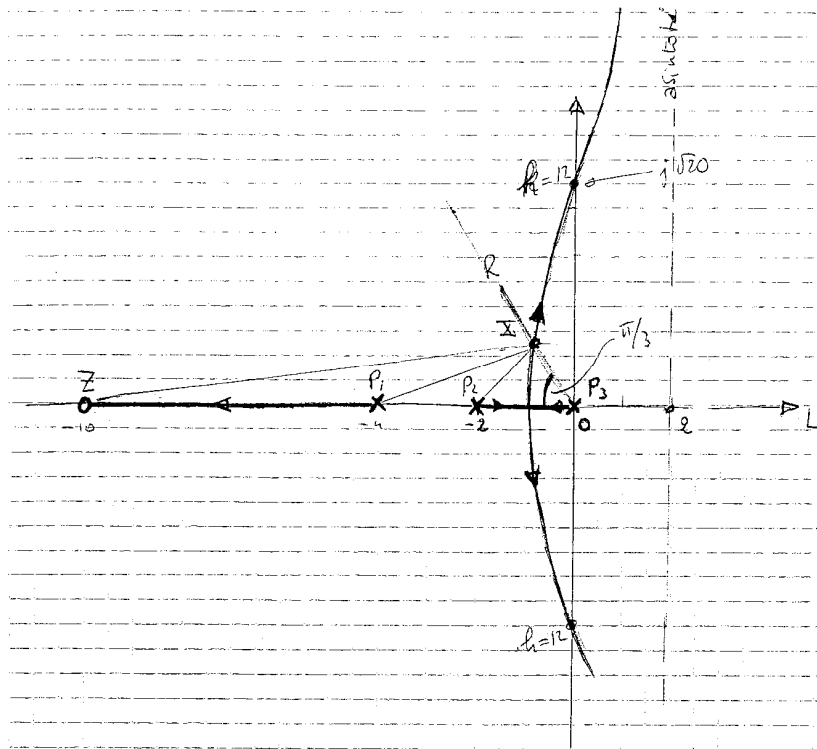


Figura 12.5.2

- A1. Si tracciano gli zeri e i poli ad anello aperto (i.e. di  $W(s)$ ).
- A2. Si determinano i segmenti dell'asse reale appartenenti al luogo positivo.

A3. Essendo  $n = 3$  e  $m = 1$ , due rami del luogo vanno all'infinito. Gli asintoti si intersecano in

$$\sigma = \frac{\sum p_i - \sum z_i}{n - m} = \frac{-6 + 10}{2} = 2 \quad (12.45)$$

e formano angoli con l'asse reale pari a

$$\frac{\pi}{n - m} = \frac{\pi}{2} \quad \text{e} \quad \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{n - m} = \frac{3}{2}\pi$$

A4. Per determinare il valore di  $h$  cui corrisponde uno zero doppio, si pone

$$h(\sigma) = \frac{\sigma(\sigma + 2)(\sigma + 4)}{\sigma + 10} \quad (12.46)$$

e si risolve l'equazione di terzo grado associata alla condizione

$$\frac{dh(\sigma)}{d\sigma} = 0 \quad (12.47)$$

Risolvendola al calcolatore, si ottiene che  $h$  ha un massimo per  $\sigma = -0.89$ . Questo valore corrisponde perciò alla diramazione.

A5. Applichiamo il criterio di Routh per trovare l'attraversamento dell'asse immaginario da parte della coppia di radici complesse coniugate

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 8 + h \\ s^2 & 6 & 10h \\ s & \frac{48 - 4h}{6} & \\ 1 & 10h & \end{array}$$

Il polinomio ha zeri stabili finché la prima colonna rimane positiva, quindi per  $h$  positivo e minore di 12. Quando  $h = 12$ , una riga della tabella si annulla e il polinomio  $6s^2 + 10 \cdot 12 = 6(s^2 + 20)$  è un divisore di (12.43). Per  $h = 12$  si ottengono due poli immaginari del sistema a anello chiuso

$$s = \pm j\tilde{\omega} = \pm j\sqrt{20} \quad (12.48)$$

B) Passiamo ora a determinare il valore di  $h$  cui corrisponde una coppia di poli dominanti con fattore di smorzamento  $\delta = 0.5$

B1. Ricordiamo che fattore di smorzamento pari a 0.5 significa che il polo deve trovarsi sul raggio uscente dell'origine e formante un angolo di  $60^\circ$  con l'asse reale negativo:

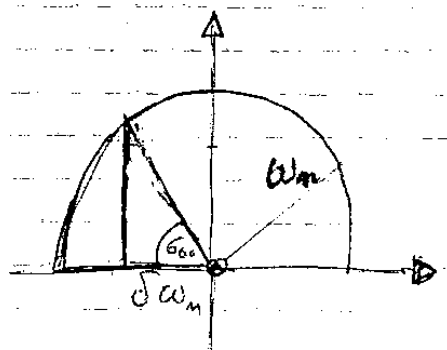


Figura 12.5.3

B2. dal luogo delle radici, possiamo valutare approssimativamente che il polo si troverà nel punto  $-0.8 + j1.3$ , mentre il valore corrispondente del parametro  $h$  si determina, con l'ausilio della figura 12.5.2, dalla formula

$$h = \frac{|XP_3| |XP_2| |XP_1|}{|XZ|} \sim \frac{1.8 \cdot 1.5 \cdot 3.5}{9.5} \sim 1$$

## 12.6 Riferimenti

1. Marden M., "Geometry of polynomials" , AMS., 1966
2. Marro G. "Controlli Automatici", Zanichelli 1992
3. Sinha N.K. "Control Systems" , Wiley, 1994