

Capitolo 14

Il problema della stabilità robusta

14.1 Introduzione

In termini abbastanza generici, diciamo che una proprietà di un sistema (stabilità, assenza di oscillazioni, insensibilità a certi disturbi...) è *robusta* se essa permane anche quando il sistema viene perturbato o, più concretamente, quando uno o più parametri del sistema variano in un certo campo di valori ammissibili, ma incerti.

Considereremo qui soltanto la stabilità e analizzeremo dapprima il caso in cui vi sia un solo parametro incerto; passeremo successivamente ad un caso più generale. Ciò ha motivazioni sia pedagogiche (la comprensione del caso più semplice facilita quella del caso generale), sia tecniche (essendo disponibili risultati più forti quando la robustezza è legata alla variazione di un solo parametro). Inoltre esistono situazioni di interesse in cui problemi di stabilità robusta a molti parametri possono essere ricondotti al caso di un solo parametro.

Definizione 14.1 Sia A un sottoinsieme di \mathbb{R} e sia

$$\mathcal{P} = \{p(s, \alpha), \alpha \in A\}$$

una famiglia di polinomi nella indeterminata s i cui coefficienti siano funzione del parametro α . La famiglia \mathcal{P} è detta *robustamente stabile* se, per ogni $\alpha \in A$, il polinomio $p(s, \alpha)$ è strettamente hurwitziano.

L'insieme dei polinomi $p(s, \alpha)$, al variare di α , sarà chiamato, con un ovvio abuso di linguaggio, "polinomio incerto" dipendente dal parametro α

Esempio 14.1.1 Sia $\mathcal{W} = \left\{ \frac{1}{s - \alpha}, |\alpha| \leq 2 \right\}$ una famiglia di "impianti" del primo ordine e sia

$\mathcal{T} = \left\{ \frac{1}{1 + s - \alpha}, |\alpha| \leq 2 \right\}$ la corrispondente famiglia di funzioni di trasferimento a anello chiuso risultante da una retroazione unitaria. La famiglia di polinomi a denominatore

$$\mathcal{P} = \{s + 1 - \alpha, |\alpha| \leq 2\}$$

non è robustamente stabile, dato che la radice di $s + 1 - \alpha$ è $\alpha - 1$, non negativa se $\alpha \geq 1$. Quindi la famiglia \mathcal{W} non può essere "stabilizzata simultaneamente" da una retroazione unitaria.

La stabilità robusta si consegue se il confine di incertezza sul polo, $|\alpha| < r$ soddisfa $r < 1$.

Esempio 14.1.2 Si supponga

$$\mathcal{P} = \{s^2 + (2 - \alpha)s + (3 - \alpha), \alpha \in A\}.$$

Applicando la regola di Cartesio, $p(s, \alpha)$ è strettamente hurwitziano se risulta simultaneamente

$$2 - \alpha > 0, \quad 3 - \alpha > 0$$

ovvero se $\alpha < 2$. Quindi \mathcal{P} è robustamente stabile se e solo se $A \subseteq (-\infty, 2)$.

- ESERCIZIO 14.1.1 MARGINE DI ROBUSTEZZA Si consideri il polinomio incerto

$$p(s, \alpha) = s^3 + (2 - \alpha)s^2 + (3 - \alpha)s + 4$$

e sia $A_r = [-r, r]$. Determinare

$$r_{\max} := \sup\{r : p(s, \alpha) \text{ è strettamente hurwitziano, } \forall \alpha \in A_r\}$$

‡ Dalla regola dei segni di Cartesio, perché $p(s, \alpha)$ sia strettamente hurwitziano deve essere $3 - \alpha > 0$ e $2 - \alpha > 0$, quindi

$$\alpha < 2. \quad (14.1)$$

Inoltre, dalla tabella di Routh dei coefficienti

$$\begin{array}{c|cc} & 1 & 3 - \alpha \\ & 2 - \alpha & 4 \\ & (2 - 5\alpha + \alpha^2)/(2 - \alpha) & \\ & 2 - 5\alpha + \alpha^2 & \\ & \text{---} & \end{array}$$

deve essere $\alpha^2 - 5\alpha + 2 = \left(\alpha - \frac{5}{2} + \sqrt{\frac{17}{4}}\right) \left(\alpha - \frac{5}{2} - \sqrt{\frac{17}{4}}\right) > 0$, ovvero

$$\alpha > \frac{5}{2} + \sqrt{\frac{17}{4}} \sim 4.57 \quad \text{oppure} \quad \alpha < \frac{5}{2} - \sqrt{\frac{17}{4}} \sim 0,43 \quad (14.2)$$

Da (14.1) e (14.2) si determina $r \sim 0,43$.

14.2 Analisi della robustezza basata sul luogo delle radici

Se $p(s, \alpha)$ è un polinomio incerto i cui coefficienti sono funzioni affini di α , il problema della stabilità robusta può essere affrontato con il metodo del luogo delle radici, introducendo un “impianto fittizio” (cfr. anche il paragrafo 12.3).

Supponiamo che $p(s, \alpha)$ sia monico per ogni α , e abbia quindi la struttura

$$\begin{aligned} p(s, \alpha) &= s^\nu + (f_{\nu-1} + g_{\nu-1}\alpha)s^{\nu-1} + \dots + (f_0 + g_0\alpha) \\ &= \left(s^\nu + f_{\nu-1}s^{\nu-1} + \dots + f_0\right) + \alpha\left(g_{\nu-1}s^{\nu-1} + \dots + g_0\right) = f(s) + \alpha g(s) \end{aligned}$$

Associamo a tale polinomio l'impianto $W(s) = \frac{g(s)}{f(s)}$, retroazionato da una retroazione α .

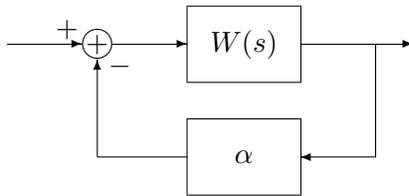


Figura 14.2.1

Il polinomio a denominatore di $T_\alpha(s)$ è $f(s) + \alpha g(s) = p(s, \alpha)$, e la stretta hurwitzianità di $p(s, \alpha)$ equivale alla stabilità BIBO di $T_\alpha(s)$, se f e g sono coprimi. Se non sono coprimi, si può porre

$$p(s, \alpha) = c(s)[\bar{f}(s) + \alpha\bar{g}(s)]$$

con $c(s) = \text{MCD}(f, g)$ e ragionare sulla coppia (\bar{f}, \bar{g}) , una volta appurata la stretta hurwitzianità di $c(s)$.

Esempio 14.2.1 Il polinomio incerto

$$p(s, \alpha) = s^3 + (3 - \alpha)s^2 + (5 - 2\alpha)s + (3 - \alpha)$$

può essere riscritto come

$$p(s, \alpha) = (s^3 + 3s^2 + 5s + 3) + \alpha(-s^2 - 2s - 1) = f(s) + \alpha g(s)$$

e il polinomio $s + 1$ è il MCD di $f(s)$ e $g(s)$. Quindi

$$p(s, \alpha) = (s + 1) \left\{ \underbrace{(s^2 + 2s + 3)}_{\bar{f}(s)} + \alpha \underbrace{(-s - 1)}_{\bar{g}(s)} \right\} = (s + 1) \left\{ \bar{f}(s) + \alpha \bar{g}(s) \right\}$$

Il polinomio $s + 1$ è strettamente hurwitziano. Per l'hurwitzianità del polinomio incerto $\bar{f}(s) + \alpha\bar{g}(s)$ consideriamo il sistema retroazionato

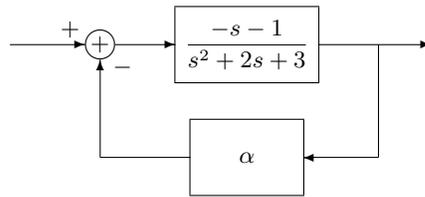


Figura 14.2.2

Se l'insieme di incertezza A per il parametro α è un intervallo $[\alpha_-, \alpha_+]$, basterà restringere l'attenzione alla porzione del luogo delle radici corrispondente ai valori di α compresi fra α_- e α_+ . Per il tracciamento, notiamo che

- il numeratore $\bar{g}(s)$ ha una sola radice in $s = -1$;
- il denominatore $\bar{f}(s)$ ha due radici, in $-1 \pm j\sqrt{2}$;
- il luogo include una circonferenza di centro -1 e raggio $\sqrt{2}$;

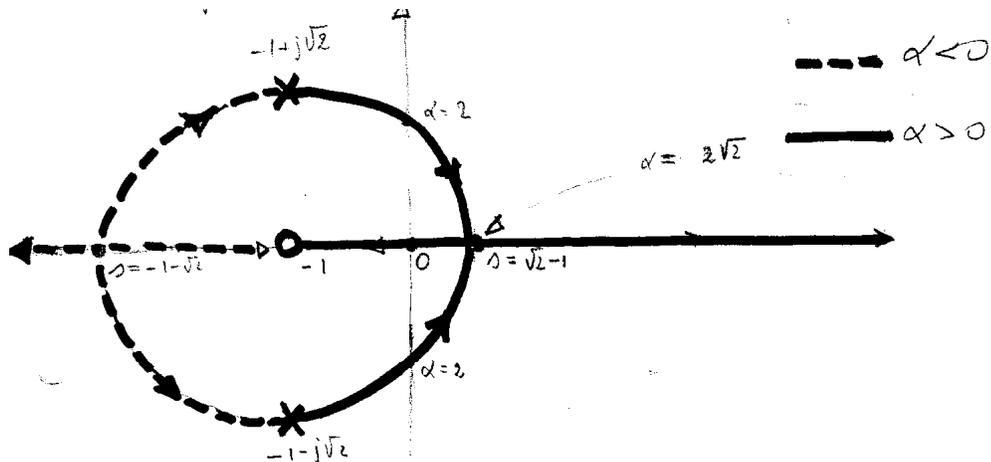


Figura 14.2.3

- le radici doppie si ottengono cercando le soluzioni in s e α del sistema

$$\begin{cases} \frac{d}{ds}[s^2 + 2s + 3] - \alpha(s + 1) = 0 \\ s^2 + 2s + 3 - \alpha(s + 1) = 0 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} 2s + 2 - \alpha = 0 \\ s^2 + 2s + 3 - \alpha(s + 1) = 0 \end{cases}$$

e quindi

$$\begin{cases} \alpha = 2s + 2 \\ s^2 + 2s + 3 - (2s + 2)(s + 1) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = 2s + 2 \\ s = -1 \pm \sqrt{2} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = \pm 2\sqrt{2} \\ s = -1 \pm \sqrt{2} = 0 \end{cases}$$

- l'attraversamento dell'asse immaginario per le radici di

$$s^2 + (2 - \alpha)s + (3 - \alpha)$$

si ha per $\alpha = 2$, ovvero quando $s^2 + 1 = 0$ ha radici $s_{1,2} = \pm j$.

Il diagramma del luogo garantisce allora che il polinomio incerto $p(s, \alpha)$ è robustamente stabile se $\alpha \in (-\infty, 2)$.

Si noti che il polinomio incerto $p(s, \alpha)$ considerato all'inizio del paragrafo soddisfa la condizione di "invarianza del grado" al variare di α , ovvero per ogni $\alpha \in A$ il grado del polinomio non cambia. Questa condizione di invarianza rimarrà in vigore anche nelle situazioni considerate nei paragrafi successivi e sarà ora brevemente discussa.

14.3 Invarianza del grado

Definizione 14.3.1 Una famiglia di polinomi $\mathcal{P} = \{p(s, \alpha), \alpha \in A\}$ ha grado invariante se, comunque scelti α' e α'' in A , risulta

$$\deg p(s, \alpha') = \deg p(s, \alpha'')$$

Se per ogni $\alpha \in A$ risulta $\deg p(s, \alpha) = n$, diremo che \mathcal{P} è una famiglia di polinomi di grado n . Se poniamo

$$p(s, \alpha) = \sum_{i=0}^n p_i(\alpha) s^i, \quad \alpha \in A,$$

la famiglia \mathcal{P} ha grado invariante n se e solo se $p_n(\alpha) \neq 0, \forall \alpha \in A$.

- ESERCIZIO 14.3.1 Si consideri una famiglia di funzioni razionali proprie

$$\mathcal{W} = \left\{ W(s, \alpha) = \frac{q(s, \alpha)}{p(s, \alpha)}, p(s, \alpha) \text{ monico di grado } \nu, \forall \alpha \in A \right\}$$

Sia inoltre $H(s) = n(s)/d(s)$ la funzione di trasferimento propria della catena di retroazione nella figura 14.3.1. Supponiamo infine che la funzione di trasferimento in catena aperta $W(s, \alpha)H(s)$ sia strettamente propria.

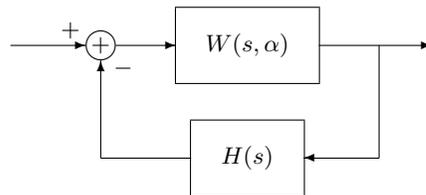


figura 14.3.1

Allora il denominatore della funzione di trasferimento ad anello chiuso

$$T_\alpha(s) = \frac{W(s, \alpha)}{1 + H(s)W(s, \alpha)}$$

è dato (a meno di eventuali cancellazioni) da

$$p(s, \alpha)d(s) + q(s, \alpha)n(s) \tag{14.3}$$

ed ha grado invariante al variare di α .

Supponiamo invece che per ogni α la funzione $W(s, \alpha)H(s)$ sia soltanto propria e che $p(s, \alpha)$ non sia necessariamente monico. Denotiamo con $p_\nu(\alpha)$ e $q_\nu(\alpha)$ i coefficienti dei termini di grado massimo del denominatore e del numeratore di $W(s, \alpha)$, con d_μ e n_μ i coefficienti dei termini di grado massimo di $d(s)$ e $n(s)$. Nell'ipotesi che $p_\nu(\alpha)$ e $q_\nu(\alpha)$ dipendano con continuità da α e A sia un intervallo chiuso e limitato, \mathcal{P} ha grado invariante se e solo se

$$\min_{\alpha \in A} |p_\nu(\alpha)d_\mu + q_\nu(\alpha)n_\mu| > 0$$

Sia $p(s, \alpha)$ un polinomio incerto, $\alpha \in A = [\alpha_-, \alpha_+]$ un intervallo chiuso. Se $p(s, \alpha_-)$ è strettamente hurwitziano e la dipendenza dei coefficienti da α è continua, l'ipotesi di invarianza del grado per il polinomio incerto garantisce che il numero dei rami al finito del luogo delle radici rimanga costante al variare di α in A . Il solo modo per avere allora una transizione all'instabilità al variare di α è che, per qualche $\bar{\alpha} \in A$ il polinomio $p(s, \bar{\alpha})$ abbia zeri immaginari, ossia che il luogo delle radici attraversi l'asse immaginario.

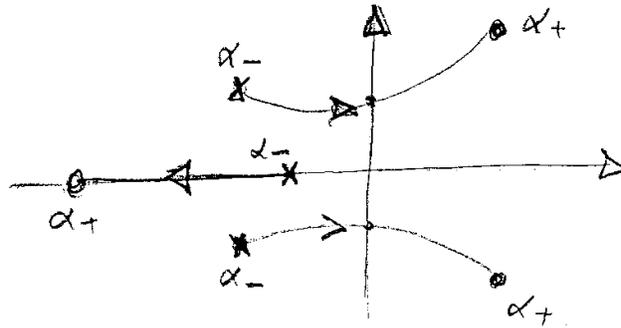


Figura 14.3.2

Diversa è la situazione che può verificarsi qualora il grado di $P(s, \alpha)$ si riduca, per qualche valore di α : allora, infatti, alcuni rami del luogo delle radici possono passare dal semipiano sinistro al semipiano destro senza attraversare l'asse immaginario, passando "attraverso il punto all'infinito del piano complesso".

Esempio 14.3.1 Il polinomio incerto $p(s, \alpha)$, $a \in [-1, 1]$ è strettamente hurwitziano per $\alpha < 0$ (tutti i suoi coefficienti hanno lo stesso segno). Quando $\alpha = 0$ si riduce il grado del polinomio, risultando $p(s, 0) = -s - 1$. Infine $p(s, \alpha)$ non è strettamente hurwitziano per $\alpha > 0$, essendo presente una variazione di segno.

La famiglia di polinomi non ha tuttavia radici sull'asse immaginario per nessun valore di α , essendo

$$p(j\omega, \alpha) = (-1 - \alpha\omega^2) - j\omega \neq 0, \forall \alpha \in A.$$

Il tutto ha un'interpretazione sul luogo delle radici: per $\alpha \neq 0$ le radici del polinomio $\alpha s^2 - s - 1$ sono le stesse del polinomio $s^2 - k(s + 1)$ quando $k = \alpha^{-1}$ descrive l'insieme $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$. Dobbiamo quindi considerare il luogo associato all'impianto con funzione di trasferimento $-\frac{s+1}{s^2}$.

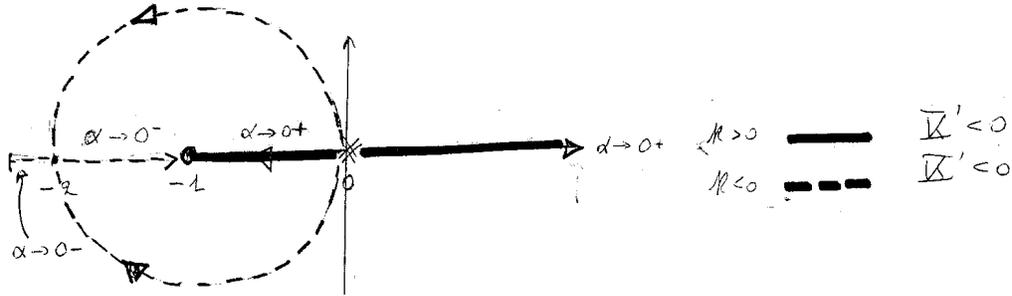


Figura 14.3.3

Nella figura 14.3.3 si ricava il punto di diramazione del luogo risolvendo il sistema

$$\begin{cases} \frac{d}{ds}[s^2 - ks - k] = 0 \\ s^2 - ks - k = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2s - k = 0 \\ s^2 - ks - k = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 2s \\ -s^2 - 2s = 0 \end{cases}$$

Le soluzioni sono $s = -2$ per $k = -4$ e $s = 0$ per $k = 0$.

L'esempio chiarisce il ruolo tecnico dell'invarianza del grado: se non è soddisfatta, il passaggio all'instabilità non implica un attraversamento dell'asse immaginario del luogo delle radici del polinomio.

14.4 Robustezza e diagramma di Nyquist

In alternativa all'analisi del luogo delle radici al variare del parametro incerto, si può ricorrere allo studio del diagramma di Nyquist.

Proposizione 14.4.1 Sia

$$\mathcal{P} = \{p(s, \alpha) = f(s) + \alpha g(s), \alpha \in [-\bar{\alpha}, +\bar{\alpha}]\}$$

una famiglia di polinomi e supponiamo che

1. $p(s, \alpha)$ abbia grado invariante n per $\alpha \in [-\bar{\alpha}, +\bar{\alpha}]$, $\bar{\alpha} > 0$;
2. $f(s)$ sia strettamente hurwitziano¹.

Se denotiamo con $W(s)$ la funzione $\frac{g(s)}{f(s)}$, la famiglia \mathcal{P} è robustamente stabile se e solo se il diagramma di $W(j\omega)$ non interseca l'insieme $\mathcal{S} = (-\infty, -\bar{\alpha}^{-1}] \cup [\bar{\alpha}^{-1}, +\infty)$.

PROVA Se $W(j\omega)$ interseca \mathcal{S} nel punto $-\tilde{\alpha}^{-1}$, esiste una pulsazione $\tilde{\omega}$ in corrispondenza alla quale si ha

$$-\frac{1}{\tilde{\alpha}} = W(j\tilde{\omega})$$

¹si tratta, ovviamente, di una condizione necessaria se si pretende che sia strettamente hurwitziano ogni elemento di \mathcal{P} .

ovvero

$$f(j\tilde{\omega}) + \tilde{\alpha}g(j\tilde{\omega}) = 0.$$

Ma allora $p(s, \tilde{\alpha})$ non è strettamente hurwitziano per $\tilde{\alpha} \in [-\bar{\alpha}, \bar{\alpha}]$.

Supponiamo, viceversa, che il diagramma di $W(j\omega)$ non intersechi \mathcal{S} . Se $c(s)$ è il MCD di $f(s)$ e $g(s)$, per l'ipotesi (2) è strettamente hurwitziano. Posto allora

$$f(s) = c(s)\bar{f}(s), \quad g(s) = c(s)\bar{g}(s),$$

la verifica della stabilità robusta di \mathcal{P} si riduce a quella della famiglia

$$\bar{\mathcal{P}} = \{\bar{f}(s) + \alpha\bar{g}(s), \alpha \in [-\bar{\alpha}, \bar{\alpha}]\} \quad (14.4)$$

Essendo \bar{f} e \bar{g} coprimi, l'hurwitzianità di $\bar{f} + \alpha\bar{g}$ equivale al fatto che

$$\frac{\bar{g}(s)}{\bar{f}(s)} + \frac{1}{\alpha} = W(s) + \frac{1}{\alpha} \quad (14.5)$$

non abbia zeri a parte reale positiva e il diagramma di $W(j\omega)$ non passi per $-\frac{1}{\alpha}$.

Se $\alpha \in [-\bar{\alpha}, \bar{\alpha}]$, la seconda condizione è verificata per ipotesi. Quanto alla condizione che $W(s) + \frac{1}{\alpha}$ non abbia zeri a parte reale positiva, essa è verificata per $|\alpha|$ abbastanza piccolo, ovvero per $|\alpha^{-1}|$ abbastanza grande, perché $\bar{f}(s)$ è strettamente hurwitziano, e quindi lo è $\bar{f}(s) + \alpha\bar{g}(s)$, che ha lo stesso grado di $\bar{f}(s)$ e coefficienti molto prossimi a quelli di $\bar{f}(s)$. Ma allora, per $|\alpha|$ piccolo è soddisfatta anche la seconda condizione del criterio di Nyquist:

$$N(-\frac{1}{\alpha}) = P_u \quad (14.6)$$

Il numero $N(-\frac{1}{\alpha})$ rimane invariato al crescere di $|\alpha|$ finché il punto $-1/\alpha$ non attraversa una prima volta la curva chiusa $W(\gamma_{R,\epsilon})$ o, equivalentemente², il diagramma di Nyquist di $W(j\omega)$. Non avendosi attraversamenti per $\alpha \in [-\bar{\alpha}, \bar{\alpha}]$, si conclude che la famiglia $\bar{\mathcal{P}}$ è robustamente stabile. ■

14.5 Polinomi intervallari e rettangolo di Kharitonov

Passiamo ora a considerare situazioni in cui l'incertezza dipende da più parametri. Il risultato principale di questo capitolo, il teorema di Kharitonov, fa riferimento a un problema interessante, anche se particolare, ovvero alla stabilità robusta di un polinomio i cui coefficienti possono variare *indipendentemente* in prefissati intervalli dell'asse reale. La soluzione, semplice ed elegante, ha costituito il punto di partenza per numerose ricerche, tuttora in corso.

Definizione 14.5.1 [POLINOMI INTERVALLARI] *Una famiglia di polinomi*

$$\mathcal{P} = \{p(s, \alpha), \alpha \in A\}$$

è una famiglia polinomiale intervallare o, brevemente, un polinomio intervallare, se

²Si noti che il diagramma e la curva differiscono solo nell'intorno del punto all'infinito del piano W , dove peraltro la (14.6) è valida, e in un intorno arbitrariamente piccolo dell'origine

1. A è un iper-intervallo

$$A = [\alpha_{0-}, \alpha_{0+}] \times [\alpha_{1-}, \alpha_{1+}] \times \cdots \times [\alpha_{\nu-}, \alpha_{\nu+}]; \quad (14.7)$$

2. gli elementi di \mathcal{P} sono tutti e soli i polinomi esprimibili nella forma

$$p(s, \alpha) = \sum_{i=0}^{\nu} \alpha_i s^i, \quad \alpha_i \in [\alpha_{i-}, \alpha_{i+}] \quad (14.8)$$

Un polinomio intervallare si scriverà nella forma

$$\sum_{i=0}^{\nu} [\alpha_{i-}, \alpha_{i+}] s^i \quad (14.9)$$

Esempio 14.5.1 (i) $p_1(s, \alpha) = 2s^3 + [-2, 3]s^2 + [0, 4]s + 5$ è un polinomio intervallare. Si noti che alcuni coefficienti del polinomio possono essere fissi.

La famiglia di polinomi

$$p_2(s, \beta) = (5 + 4\beta_3)s^3 + (3 + 2\beta_2^2)s^2 + (4 - \beta_1^3)s + (2 - \beta_0)$$

con $\beta_3 \in [0, 1]$, $\beta_2 \in [1, 2]$, $\beta - 1 \in [2, 3]$, $\beta_0 \in [3, 4]$ può ridursi alla forma

$$p_2(s, \beta) = [5, 9]s^3 + [5, 11]s^2 + [-23, -4]s + [-2, -1]$$

Esempio 14.5.2 In certi casi, la rappresentazione di un polinomio incerto, la cui incertezza dipenda da più parametri, coinvolge una certa ridondanza nella descrizione. Ad esempio, da

$$p(s, \beta) = s^3 + (2 + \beta_2 + 2\beta_3)s^2 + (5\beta_1 - \beta_4)s + 5$$

con intervalli $|\beta_i| \leq 1$ per $i = 1, 2, 3, 4$, è possibile passare ad una nuova rappresentazione ponendo

$$\alpha_2 = 2 + \beta_2 + 2\beta_3, \quad |\beta_2| \leq 1, \quad |\beta_3| \leq 1 \text{ e quindi } \alpha_2 \in [-1, 5]$$

e similmente

$$\alpha_1 = 5 + \beta_1 - \beta_4, \quad |\beta_1| \leq 1, \quad |\beta_4| \leq 1 \text{ e quindi } \alpha_1 \in [3, 7]$$

Si perviene così al polinomio intervallare

$$p(s, \alpha) = s^3 + [-1, 5]s^2 + [3, 7]s + 5$$

Definizione 14.5.2 [POLINOMI DI KHARITONOV] *Dato un polinomio intervallare*

$$p(s, \alpha) = \sum_{i=0}^n [\alpha_{i-}, \alpha_{i+}] s^i$$

i polinomi di Kharitonov associati a $p(s, \alpha)$ sono i quattro polinomi (non incerti!)

$$\begin{aligned} K_{--}(s) &= \alpha_{0-} + \alpha_{1-}s + \alpha_{2+}s^2 + \alpha_{3+}s^3 + \alpha_{4-}s^4 + \dots \\ K_{++}(s) &= \alpha_{0+} + \alpha_{1+}s + \alpha_{2-}s^2 + \alpha_{3-}s^3 + \alpha_{4+}s^4 + \dots \\ K_{+-}(s) &= \alpha_{0+} + \alpha_{1-}s + \alpha_{2-}s^2 + \alpha_{3+}s^3 + \alpha_{4+}s^4 + \dots \\ K_{-+}(s) &= \alpha_{0-} + \alpha_{1+}s + \alpha_{2+}s^2 + \alpha_{3-}s^3 + \alpha_{4-}s^4 + \dots \end{aligned} \quad (14.10)$$

Esempio 14.5.3 Al polinomio intervallare

$$p(s, \alpha) = [1, 2] + [3, 4]s + [5, 6]s^2 + [7, 8]s^3 + [9, 10]s^4 + [11, 12]s^5$$

corrispondono i polinomi di Kharitonov

$$\begin{aligned} K_{--}(s) &= 1 + 3s + 5s^2 + 7s^3 + 9s^4 + 11s^5 \\ K_{++}(s) &= 2 + 4s + 5s^2 + 7s^3 + 10s^4 + 12s^5 \\ K_{+-}(s) &= 2 + 3s + 5s^2 + 8s^3 + 10s^4 + 11s^5 \\ K_{-+}(s) &= 1 + 4s + 6s^2 + 7s^3 + 9s^4 + 12s^5 \end{aligned}$$

Lo studio della stabilità robusta di una famiglia polinomiale intervallare, ovvero la determinazione di condizioni che garantiscano la stretta hurwitzianità di tutti i polinomi (14.8) al variare dei parametri α_i si riconduce allo studio dei soli quattro polinomi di Kharitonov. Vale infatti il seguente

Teorema 14.5.3 [KHARITONOV] *Sia \mathcal{P} una famiglia polinomiale intervallare con grado invariante n .*

Tutti i polinomi di \mathcal{P} sono strettamente hurwitziani se e solo se sono strettamente hurwitziani i quattro polinomi di Kharitonov associati a \mathcal{P} .

La dimostrazione del teorema, che sarà affrontata nel paragrafo successivo, richiede alcune considerazioni sul cosiddetto “rettangolo di Kharitonov”, che svolgeremo in questo paragrafo.

Consideriamo il seguente

Problema 14.5.4 *Dato un polinomio intervallare*

$$p(s, \alpha) = \sum_{i=0}^n [\alpha_{i-}, \alpha_{i+}] s^i, \quad A = [\alpha_{0-}, \alpha_{0+}] \times [\alpha_{1-}, \alpha_{1+}] \times \dots \times [\alpha_{n-}, \alpha_{n+}]$$

e fissata una pulsazione ω_0 , descrivere l'insieme dei numeri complessi

$$p(j\omega_0, A) := \{p(j\omega_0, \alpha), \alpha \in A\} \quad (14.11)$$

ottenuto al variare in A dei parametri $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$.

Proposizione 14.5.5 *$p(j\omega_0, A)$ è un rettangolo nel piano di Gauss, i cui vertici si ottengono valutando in $j\omega_0$ i quattro polinomi di Kharitonov :*

$$K_{--}(j\omega_0), \quad K_{++}(j\omega_0), \quad K_{+-}(j\omega_0), \quad K_{-+}(j\omega_0).$$

PROVA (i) [Disaccoppiamento fra parte reale e immaginaria] Dalle eguaglianze

$$\Re p(j\omega_0, \alpha) = \Re \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i (j\omega_0)^i \right) = \alpha_0 - \alpha_2 \omega_0^2 + \alpha_4 \omega_0^4 - \alpha_6 \omega_0^6 + \dots \quad (14.12)$$

$$\Im p(j\omega_0, \alpha) = \Im \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i (j\omega_0)^i \right) = \alpha_1 \omega_0 - \alpha_3 \omega_0^3 + \alpha_5 \omega_0^5 - \alpha_7 \omega_0^7 + \dots \quad (14.13)$$

si vede che nessun parametro α_i figura simultaneamente nella parte reale e in quella immaginaria.

Come conseguenza di questo “disaccoppiamento” fra i coefficienti delle parti reale e immaginaria, l'insieme $p(j\omega_0, A)$ consiste di turri i numeri complessi z soddisfacenti le condizioni

$$\Re z = \alpha_0 - \alpha_2\omega_0^2 + \alpha_4\omega_0^4 - \alpha_6\omega_0^6 + \dots \quad (14.14)$$

per qualche $\alpha_i \in [\alpha_{i-}, \alpha_{i+}]$, $i = 0, 2, 4, \dots$ e

$$\Im z = \alpha_1\omega_0 - \alpha_3\omega_0^3 + \alpha_5\omega_0^5 - \alpha_7\omega_0^7 + \dots \quad (14.15)$$

per qualche $\alpha_i \in [\alpha_{i-}, \alpha_{i+}]$, $i = 1, 3, 5, \dots$

(ii) [Massimi e minimi delle parti reale e immaginaria] Per la parte reale, tenuto conto del significato di α_{i-} e di α_{i+} , valgono ovviamente le

$$\begin{aligned} \min_{\alpha \in A} \Re p(j\omega_0, \alpha) &= \alpha_{0-} - \alpha_{2+}\omega_0^2 + \alpha_{4-}\omega_0^4 - \alpha_{6+}\omega_0^6 + \dots \\ &= \Re K_{--}(j\omega_0) = \Re K_{-+}(j\omega_0) \end{aligned} \quad (14.16)$$

$$\begin{aligned} \max_{\alpha \in A} \Re p(j\omega_0, \alpha) &= \alpha_{0+} - \alpha_{2-}\omega_0^2 + \alpha_{4+}\omega_0^4 - \alpha_{6-}\omega_0^6 + \dots \\ &= \Re K_{++}(j\omega_0) = \Re K_{+-}(j\omega_0) \end{aligned} \quad (14.17)$$

Per la parte immaginaria, occorre fare attenzione al segno di ω_0 quando si procede alla minimizzazione e alla massimizzazione: se $\omega_0 \geq 0$, si ha

$$\begin{aligned} \min_{\alpha \in A} \Im p(j\omega_0, \alpha) &= \alpha_{1-}\omega_0 - \alpha_{3+}\omega_0^3 + \alpha_{5-}\omega_0^5 - \alpha_{7+}\omega_0^7 + \dots \\ &= \Im K_{--}(j\omega_0) = \Im K_{+-}(j\omega_0) \end{aligned} \quad (14.18)$$

$$\begin{aligned} \max_{\alpha \in A} \Im p(j\omega_0, \alpha) &= \alpha_{1+}\omega_0 - \alpha_{3-}\omega_0^3 + \alpha_{5+}\omega_0^5 - \alpha_{7-}\omega_0^7 + \dots \\ &= \Im K_{++}(j\omega_0) = \Im K_{-+}(j\omega_0), \end{aligned} \quad (14.19)$$

mentre, se $\omega_0 \leq 0$, si ottiene

$$\min_{\alpha \in A} \Im p(j\omega_0, \alpha) = \Im K_{++}(j\omega_0) = \Im K_{-+}(j\omega_0) \quad (14.20)$$

$$\max_{\alpha \in A} \Im p(j\omega_0, \alpha) = \Im K_{--}(j\omega_0) = \Im K_{+-}(j\omega_0), \quad (14.21)$$

(iii) [Rettangolo di Kharitonov] Se, per fissare le idee, scegliamo $\omega_0 \geq 0$, al variare di α gli elementi di $p(j\omega_0, A)$ sono contenuti nel rettangolo chiuso di figura 14.5.1, con i lati paralleli agli assi coordinati.

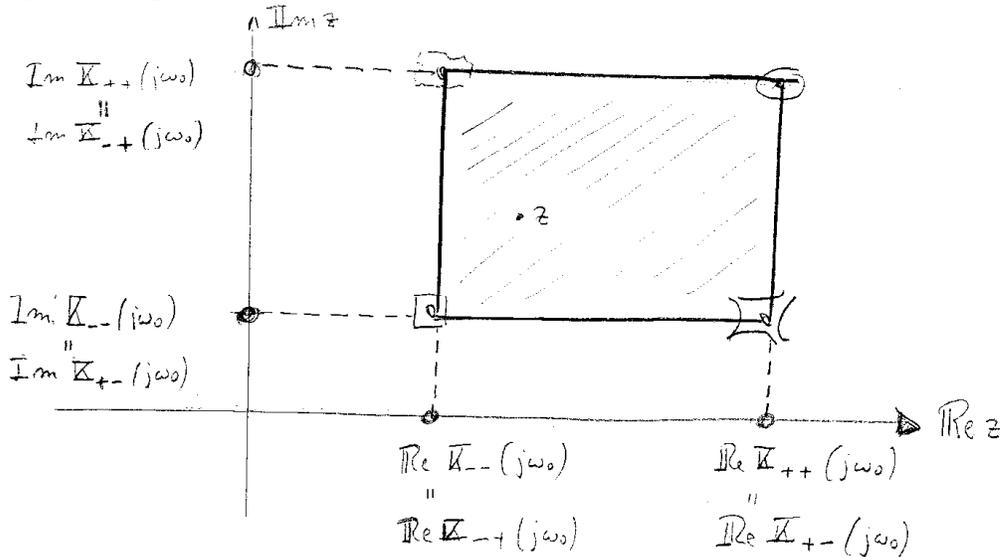


Figura 14.5.1

Al variare di $\alpha \in A$, si ha

$$\begin{aligned} \Re K_{--}(j\omega_0) = \Re K_{-+}(j\omega_0) &\leq \Re p(j\omega_0, \alpha) \leq \Re K_{++}(j\omega_0) = \Re K_{+-}(j\omega_0) \\ \Im K_{--}(j\omega_0) = \Im K_{+-}(j\omega_0) &\leq \Im p(j\omega_0, \alpha) \leq \Im K_{++}(j\omega_0) = \Im K_{-+}(j\omega_0) \end{aligned}$$

È peraltro facile verificare che ogni numero complesso z rappresentato da un punto del rettangolo è effettivamente un elemento dell'insieme $p(j\omega_0, A)$. Infatti $\Re p(j\omega_0, \alpha)$ è funzione continua di $\alpha_0, \alpha_2, \dots$ e al variare dei parametri nell'iper-intervallo $[\alpha_{0,-}, \alpha_{0+}] \times [\alpha_{2-} \times \alpha_{2+}] \times \dots$ esso descrive ogni valore reale compreso fra i suoi valori minimi e massimo. Lo stesso vale per $\Im p(j\omega_0, \alpha)$ al variare di $\alpha_1, \alpha_3, \dots$

È chiaro che i vertici del rettangolo di Kharitonov sono associati, per $\omega_0 \geq 0$, ai seguenti numeri complessi:

$$\begin{aligned} \text{vertice sud/ovest} &: \Re K_{--}(j\omega_0) + j\Im K_{--}(j\omega_0) = K_{--}(j\omega_0) \\ \text{vertice nord/ovest} &: \Re K_{-+}(j\omega_0) + j\Im K_{-+}(j\omega_0) = K_{-+}(j\omega_0) \\ \text{vertice nord/est} &: \Re K_{++}(j\omega_0) + j\Im K_{++}(j\omega_0) = K_{++}(j\omega_0) \\ \text{vertice sud/est} &: \Re K_{+-}(j\omega_0) + j\Im K_{+-}(j\omega_0) = K_{+-}(j\omega_0) \end{aligned}$$

- Questo porta, per $\omega_0 > 0$, alla rappresentazione del rettangolo di Kharitonov riportata nella seguente figura 14.5.2;

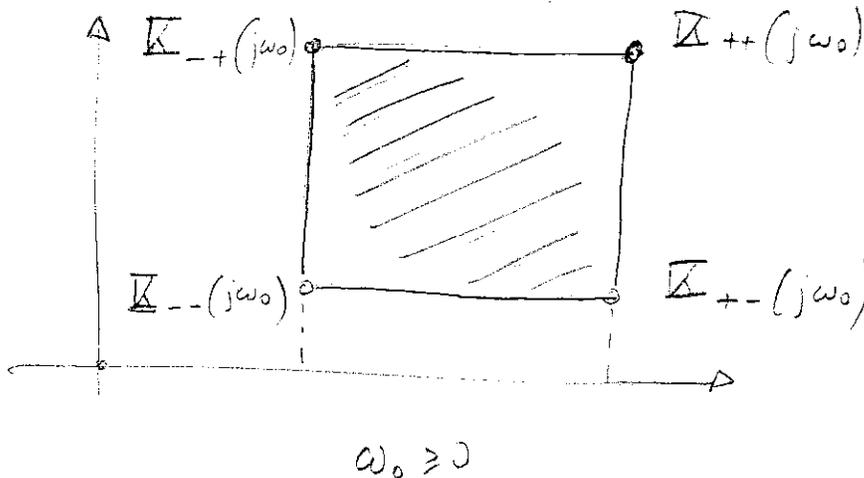


Figura 14.5.2

- Se $\omega_0 = 0$ il rettangolo collassa sul segmento (reale) $[\alpha_{0-}, \alpha_{0+}]$.
- Se $\omega_0 < 0$ si ottiene il rettangolo di figura 14.5.3.

La verifica è lasciata per esercizio. ■

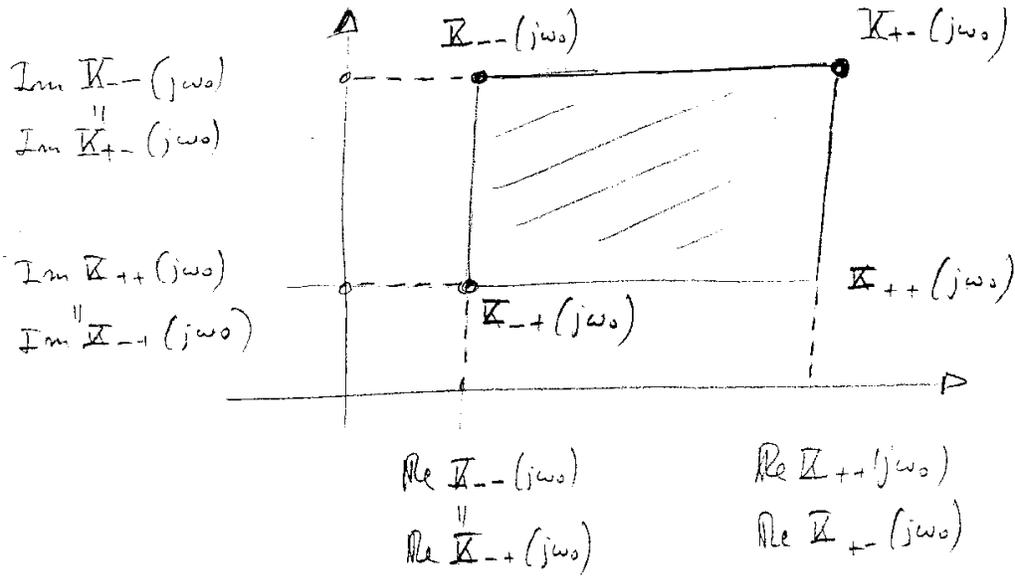


Figura 14.5.3

Osservazione Il rettangolo di Kharitonov è stato ottenuto “congelando“, per così dire, la pulsazione al valore ω_0 e variando il parametro vettoriale α nell’iper-intervallo a . Se si varia la pulsazione, ad esempio da $\omega = 0$ a $\omega = \Omega$, il rettangolo si muove, deformandosi, nel piano complesso, e tale movimento è essenzialmente determinato da quello dei quattro punti complessi $K_{++}(j\omega)$, $K_{+-}(j\omega)$, $K_{-+}(j\omega)$, $K_{--}(j\omega)$ che ne costituiscono i vertici. L’esempio riportato in figura 14.5.4 è riferito al polinomio intervallare

$$p(s, \alpha) = [0, 25, 1, 25]s^3 + [2, 75, 3, 25]s^2 + [0, 75, 1, 25]s + [0, 25, 1, 25]$$

e per ω variabile fra 0 e 1.

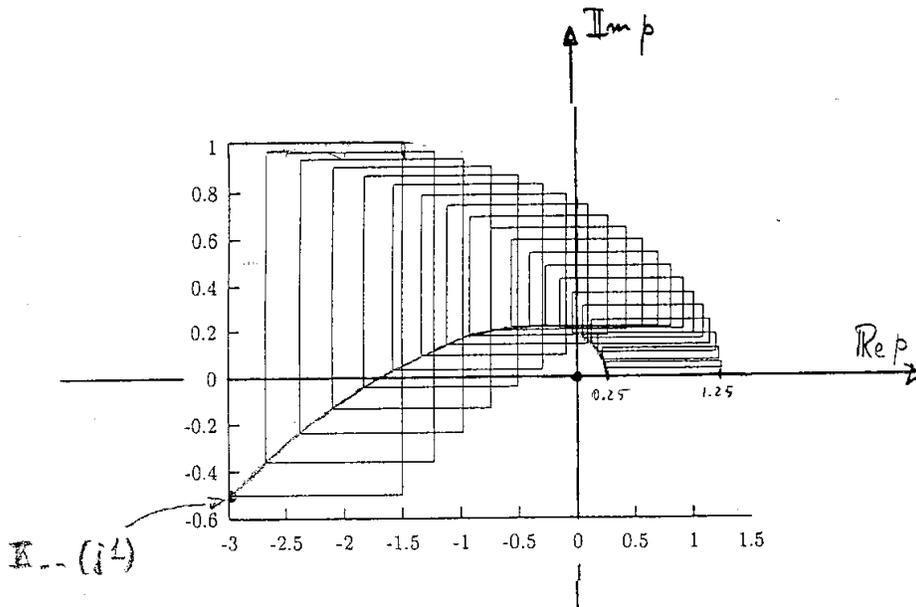


Figura 14.5.4

14.6 Prova del teorema di Kharitonov

La prova del teorema si basa su due risultati preliminari: il lemma di Michailov e il principio di esclusione dell'origine.

Lemma 14.6.1 [MICHAILOV] *Se $p(s)$ è un polinomio strettamente hurwitziano, allora $\angle p(j\omega)$ è una funzione strettamente crescente di ω . Se n è il grado di $p(s)$, l'incremento di fase quando ω cresce da $-\infty$ a $+\infty$ è pari a $n\pi$.*

PROVA Riscriviamo $p(s)$ nella forma fattorizzata

$$p(s) = K'(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_n) \quad (14.22)$$

Si ha allora

$$\angle p(j\omega) = \angle K' + \sum_{i=1}^n \angle(j\omega - z_i) \quad (14.23)$$

e poiché $\Re z_i < 0$, è evidente che $\angle(j\omega - z_i)$ è funzione strettamente crescente di ω , dal valore $-\pi/2$ al valore $+\pi/2$.

Basta allora sommare su tutti gli zeri del polinomio. ■

Osservazione Il valore della variazione totale di fase si ottiene direttamente dall'espressione di V_f nel paragrafo 12.2 (formula (17)).

- ESERCIZIO 14.6.1 Nelle ipotesi del lemma 14.6.1, se ω varia da 0 a $+\infty$, l'incremento totale della fase è $n\pi/2$.
 ‡ Suggestivo: si noti che ogni coppia di zeri coniugati dà un contributo eguale a π , oppure si osservi che $p(j\omega) = \check{p}(-j\omega)$.

Lemma 14.6.2 [PRINCIPIO DI ESCLUSIONE DELL'ORIGINE] *Sia $\mathcal{P} = \{p(s, \alpha), \alpha \in A\}$ una famiglia di polinomi intervallari che*

- 1) *abbia grado invariante,*
- 2) *includa un polinomio strettamente hurwitziano³.*

Allora \mathcal{P} è robustamente stabile se e solo se l'origine del piano di Gauss è esclusa da tutti i rettangoli di Kharitonov per ogni $\omega \geq 0$, i.e.

$$0 \notin p(j\omega, A), \quad \forall \omega \geq 0 \quad (14.24)$$

PROVA Notiamo preliminarmente che $z \in p(j\omega, A)$ se e solo se $\check{z} \in p(-j\omega, A)$. Quindi

$$0 \notin p(j\omega, A) \Leftrightarrow 0 \notin p(-j\omega, A)$$

e l'esclusione dell'origine dai rettangoli di Kharitonov per $\omega \geq 0$ equivale all'esclusione dai rettangoli di Kharitonov per ogni $\omega \in \mathbb{R}$.

³ossia esiste $\tilde{\alpha} \in A$ tale che il polinomio "fisso" $p(s, \tilde{\alpha})$ abbia tutte radici a parte reale negativa.

• Supponiamo ora che \mathcal{P} sia robustamente stabile e proviamo che $0 \notin p(j\omega, A)$, $\forall \omega \geq 0$. Per assurdo, se $0 \in p(j\omega_0, A)$ per qualche $\omega_0 \geq 0$, allora $p(j\omega_0, \hat{\alpha}) = 0$, $\exists \hat{\alpha} \in A$, e il polinomio $p(s, \hat{\alpha}) \in \mathcal{P}$ non sarebbe strettamente hurwitziano, avendo uno zero immaginario.

• Supponiamo, viceversa, che $0 \notin p(j\omega, A)$, $\forall \omega \in \mathbb{R}$ e proviamo la stabilità robusta di \mathcal{P} . Per assurdo, sia $p(s, \beta)$ non strettamente hurwitziano per qualche $\beta \in A$. Per $\lambda \in [0, 1]$ consideriamo il polinomio

$$\tilde{p}_\lambda(s) := p(s, \lambda\tilde{\alpha} + (1 - \lambda)\beta) \quad (14.25)$$

Esso è un elemento di \mathcal{P} , perché l'iper-intervallo A è convesso e $\lambda\tilde{\alpha} + (1 - \lambda)\beta$ è combinazione convessa di due punti di A . Inoltre, per $\lambda = 1$ il polinomio $\tilde{p}_1(s)$ è strettamente hurwitziano per ipotesi, mentre per $\lambda = 0$ il polinomio $\tilde{p}_0(s)$ non è strettamente hurwitziano, ossia ha almeno una radice con parte reale non strettamente negativa.

Poiché le radici di $\tilde{p}_\lambda(s)$ variano con continuità quando λ cresce da 0 a 1, esiste un valore $\lambda^* \in [0, 1]$ tale che $p_{\lambda^*}(s)$ ha una radice immaginaria, ovvero per qualche $\omega^* \in \mathbb{R}$

$$p(j\omega^*, \lambda^*\tilde{\alpha} + (1 - \lambda^*)\beta) = 0 \quad (14.26)$$

Ma allora avremmo $0 \in p(j\omega^*, A)$, contro l'ipotesi. ■

Abbiamo ora quanto ci serve per dimostrare il teorema di Kharitonov, enunciato nel paragrafo precedente.

PROVA DEL TEOREMA 14.5.3 In un verso, il teorema è banale: se \mathcal{P} è robustamente stabile, sono strettamente hurwitziani tutti i polinomi (fissi) che appartengono a \mathcal{P} , e in particolare i quattro polinomi di Kharitonov.

Viceversa, supponiamo che K_{++} , K_{+-} , K_{-+} , K_{--} siano strettamente hurwitziani, ma che, per assurdo, \mathcal{P} non sia robustamente stabile.

Caso 1: $0 \in [\alpha_{0-}, \alpha_{0+}]$

Per l'ipotesi di invarianza del grado, α_{n-} e α_{n+} devono avere lo stesso segno, mentre α_{0-} e α_{0+} hanno segno diverso, oppure uno almeno di essi è nullo.

Allora, uno dei quattro polinomi di Kharitonov ha un coefficiente nullo, oppure ha una variazione di segno nei coefficienti: quindi non è strettamente hurwitziano.

Caso 2: $0 \notin [\alpha_{0-}, \alpha_{0+}]$

Poiché il rettangolo di Kharitonov $p(j0, A)$ collassa sul segmento $[\alpha_{0-}, \alpha_{0+}]$, la condizione $0 \notin [\alpha_{0-}, \alpha_{0+}]$ si può riscrivere come

$$0 \notin p(j0, A) \quad (14.27)$$

La famiglia \mathcal{P} ha grado invariante e include dei polinomi strettamente hurwitziani (i polinomi di Kharitonov), quindi possiamo applicare il principio di esclusione dell'origine e, essendo \mathcal{P} robustamente stabile, esiste una pulsazione ω^* tale che il corrispondente rettangolo include l'origine

$$0 \in p(j\omega^*, A) \quad (14.28)$$

Poiché i vertici $K_{++}(j\omega)$, $K_{+-}(j\omega)$, $K_{-+}(j\omega)$, $K_{--}(j\omega)$, e con essi la frontiera $\partial p(j\omega, A)$ del rettangolo di Kharitonov, si muovono con continuità al variare di ω , da (14.27) e (14.28)

segue l'esistenza di una pulsazione $\hat{\omega}$ in corrispondenza alla quale 0 è sulla frontiera del corrispondente rettangolo

$$0 \in \partial p(j\hat{\omega}, A). \quad (14.29)$$

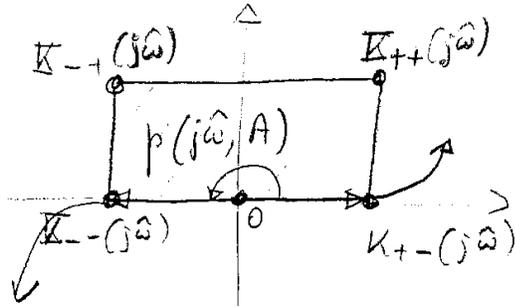


Figura 14.6.1

Supponiamo, ad esempio, che l'origine appartenga al lato "sud" del rettangolo $p(j\hat{\omega}, A)$. Essendo $K_{--}(s)$ e $K_{+-}(s)$ stabili, non è possibile che l'origine coincida con $K_{--}(j\hat{\omega})$ o con $K_{+-}(j\hat{\omega})$: quindi l'origine è un punto interno del lato considerato. Sfruttiamo ora il lemma di Michailov. Poiché $K_{--}(s)$ è strettamente hurwitziano, la fase $\angle K_{--}(j\omega)$ è strettamente crescente con ω e quindi, per $\Delta\omega$ piccolo e positivo,

$$\pi < \angle K_{--}(j\hat{\omega} + \delta\omega) < \frac{3}{2}\pi \quad (14.30)$$

Analogamente, per $K_{+-}(j\omega)$ si ha

$$0 < \angle K_{+-}(j\hat{\omega} + \delta\omega) < \frac{\pi}{2} \quad (14.31)$$

Ciò è impossibile, perché il verificarsi simultaneamente di (14.30) e di (14.31) implica l'assurdo che il lato "sud" del rettangolo di Kharitonov $p(j\hat{\omega} + \Delta\omega, A)$ non sia parallelo all'asse reale. ■

14.7 Riferimenti bibliografici

B.R.Barmish : " New tools for robustness of linear systems", McMillan, 1994