

Capitolo 15

Compensazione

15.1 Compensazione di un sistema di controllo

Un sistema di controllo viene progettato per una determinata applicazione e le caratteristiche che esso deve possedere dipendono pertanto dalle particolari esigenze dell'impianto nel quale viene inserito. È tuttavia possibile elencare alcune proprietà che abitualmente si cerca di conseguire con il controllo, e la cui traduzione in termini numerici fornisce, in tutto o in parte, le “specifiche di progetto” nella maggioranza dei casi.

Un sistema, una volta controllato correttamente,

- dovrebbe funzionare con un *errore* per quanto possibile piccolo;
- dovrebbe essere opportunamente *smorzato*, in modo che l'uscita segua l'andamento dell'ingresso senza andare incontro a oscillazioni o sovralongazioni di ampiezza eccessiva;
- dovrebbe *attenuare* l'effetto di disturbi non desiderati

In generale, le strategie di controllo adottate non portano ad un uniforme miglioramento di tutte le caratteristiche di un sistema, anzi, è frequente il caso in cui l'ottenimento di un obiettivo sia incompatibile con quello di un altro. Ad esempio, aumentando il guadagno di anello si riduce l'errore a regime del sistema, come abbiamo visto nel capitolo iniziale sulla retroazione, e si accresce la prontezza della risposta, ma si ottiene in generale uno smorzamento via via più insoddisfacente, al quale corrispondono forti sovralongazioni nella risposta al gradino.

A seconda delle specifiche imposte sul comportamento del sistema, la struttura che deve implementare il controllo (e quindi il modello matematico della struttura stessa) sarà più o meno complessa. In generale, obiettivi impossibili per una struttura molto semplice possono essere raggiunti ricorrendo a sistemi di controllo più raffinati e in ogni caso la soluzione del problema, quando esiste, non è unica.

In questo capitolo ci limiteremo a considerare alcune procedure di “compensazione” di un sistema. Esse possono ricondursi all'idea di

- introdurre una *retroazione unitaria*;

- modificare, se del caso, il *guadagno di anello*;
- inserire *componenti aggiuntive* (detti “*reti correttive*”) nella catena diretta, o in quella di retroazione o in entrambe (cfr. fig. 15.1.1)

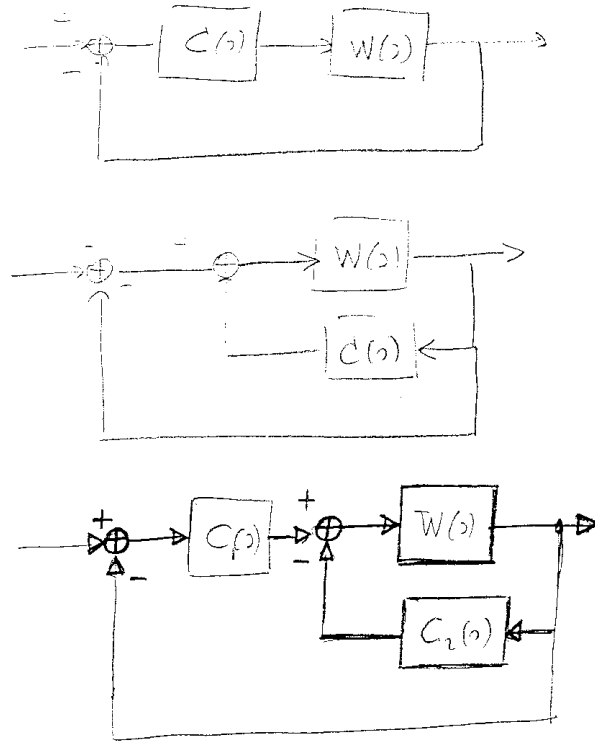


Figura 15.1.1

I dati di specifica sui quali si basa il progetto riguardano la precisione, la stabilità e la velocità di risposta.

1. I dati che riguardano la *precisione* sono gli errori a regime in risposta ai segnali canonici e il comportamento a regime in presenza di determinati disturbi e di determinate variazioni dei parametri.
2. I dati che riguardano la *stabilità* [intesa, in senso lato, come comportamento dinamico soddisfacente, dato che la stabilità in senso stretto è sempre sottintesa] sono la massima sovraelongazione nella risposta al gradino, il picco di risonanza, i margini di ampiezza e di fase, il coefficiente di smorzamento dei poli dominanti.
3. I dati che riguardano la *velocità di risposta* sono il tempo di ritardo, il tempo di salita, il tempo di assestamento e la larghezza di banda.

Alcune di queste specifiche sono relative alla risposta a segnali canonici, altri alla risposta armonica e alcuni, dell'uno o dell'altro tipo, sono, grosso modo, equivalenti.

Il progetto di un sistema di controllo si effettua di norma considerandone la risposta armonica e quindi è spesso necessario riportare le specifiche date nel dominio del tempo a specifiche sulla risposta frequenziale. Tale operazione in generale non può essere effettuata in modo esatto, dal momento che, se è ben vero che l'intera risposta armonica e l'intera

risposta a un segnale canonico sono legate biunivocamente, nel senso che ciascuna risposta in un dominio corrisponde a una e una sola risposta nell'altro dominio, tale biunivocità non vale quando ci si limiti a considerare alcuni parametri delle risposte.

Per poter porre in relazione fra loro, anche se in modo approssimato, i parametri della risposta frequenziale e quelli di una risposta a un segnale canonico, è abituale ipotizzare che il sistema in retroazione si comporti, in prima approssimazione, come un sistema del secondo ordine dotato di poli complessi o, quando tale approssimazione non sia accettabile, come un sistema dotato di un numero assai piccolo di poli dominanti.

Il primo parametro che si determina in fase di progetto, utilizzando i dati di specifica relativi alla precisione, è il guadagno di Bode (guadagno statico K_s per i sistemi di tipo 0, la costante di velocità K_v per i sistemi di tipo 1).

Una volta determinato il guadagno, si analizza se il sistema in retroazione soddisfa le specifiche riguardanti la stabilità e la velocità di risposta: se queste non sono soddisfatte, si progetta una “rete correttiva” che, inserita nell’anello, modifichi le caratteristiche dinamiche del sistema.

Esempio 15.1.1 Si consideri un sistema lineare

$$W(s) = \frac{K'}{s(s+1)(s+2)}$$

al quale venga applicata una retroazione unitaria. Si suppone che sia specificato un errore a regime in risposta alla rampa inferiore a 0.1

Per quanto visto nel paragrafo 10.4, risulta $\lim_{t \rightarrow +\infty} e(t) = 1/K$ dove $K = K_v = K'/2$ è la costante di velocità di $W(s)$. Pertanto si dovrà avere

$$\frac{K'}{2} \geq 10 \text{ sec}^{-1}$$

Applicando il criterio di Routh, si verifica che il sistema, retroazionato soltanto da una retroazione unitaria senza l'introduzione di reti correttive, risulta instabile quando $K' > 6$, dal momento che la prima colonna della tabella di Routh del polinomio $s^3 + 3s^2 + 2s + K'$ è positiva se $0 < K' < 6$:

0	1	2
1	3	K'
2	$2 - \frac{K'}{3}$	
3	K'	

Le reti correttive più frequentemente impiegate nei sistemi di controllo con amplificazione elettronica sono reti elettriche RC (da cui il nome “reti”). Le medesime funzioni di trasferimento si possono ottenere, in sistemi di controllo con amplificazione pneumatica o idraulica, con sistemi di serbatoi e strozzature, oppure con sistemi meccanici.

15.2 Rete integratrice e rete derivatrice

15.2.1 Rete integratrice

La *rete integratrice* ha funzione di trasferimento

$$C(s) = \frac{1}{1 + sT}, \quad T > 0$$

e i diagrammi di Bode e di Nyquist, nonché la struttura degli zeri e dei poli della funzione di trasferimento, sono riportati in figura 15.2.1.

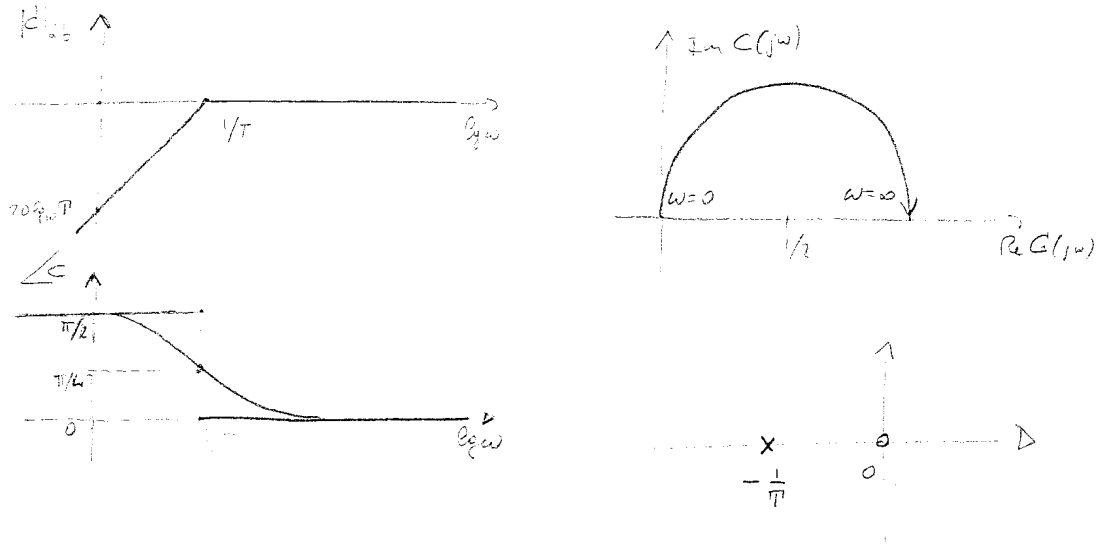


Figura 15.2.1

Il nome è dovuto al fatto che per valori elevati di ω la funzione di trasferimento $C(j\omega) \sim 1/j\omega T$ corrisponde a quella di un integratore ideale.

La realizzazione mediante un circuito RC (a vuoto) è riportata in figura 15.2.2

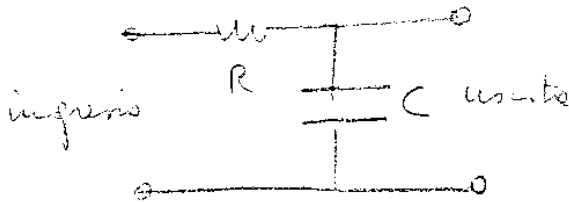


Figura 15.2.2

Il rapporto $C(s)$ fra le tensioni in uscita e in ingresso è dato da

$$\frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{1}{1 + sRC} = \frac{1}{1 + sT} \quad \text{con } T = RC$$

15.2.2 Rete derivatrice

Ha funzione di trasferimento

$$C(s) = \frac{sT}{1 + sT}, \quad T > 0$$

I diagrammi di Bode e di Nyquist, nonché la struttura degli zeri e dei poli della funzione di trasferimento, sono riportati in figura 15.2.3.

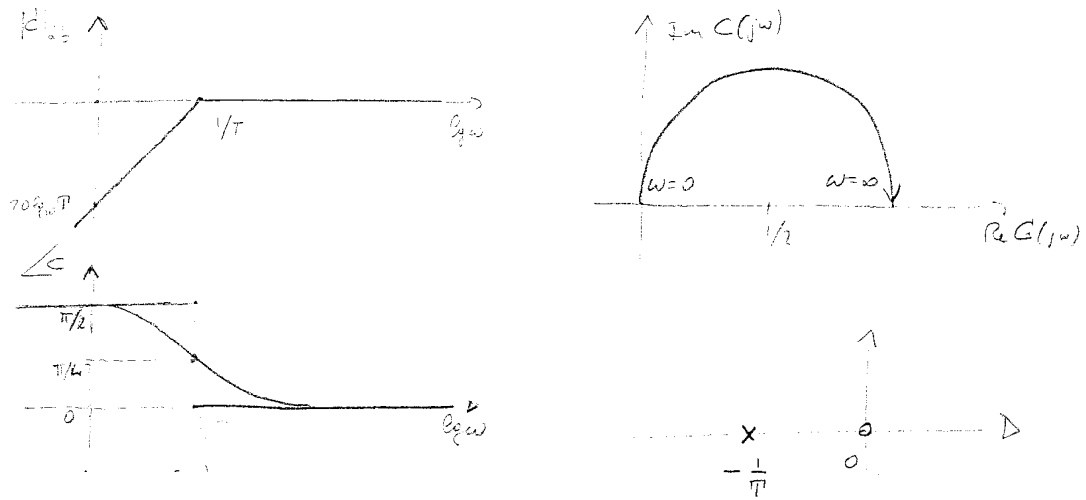


Figura 15.2.3

Il nome è dovuto al fatto che per piccoli valori di ω la funzione di trasferimento è

$$C(j\omega)$$

e quindi il segnale di uscita approssima la derivata del segnale di ingresso.

La realizzazione mediante un circuito RC (a vuoto) è riportata in figura 15.2.4

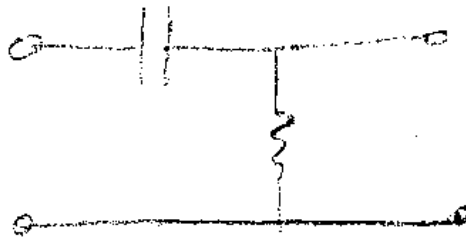


Figura 15.2.4

Il rapporto $C(s)$ fra le tensioni in uscita e in ingresso è dato da

$$C(s) = \frac{R}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{RCs}{1 + sRC} = \frac{T}{1 + sT} \quad \text{con } T = RC$$

Osservazione Le reti integratrice e derivatrice sono impiegate raramente nella compensazione: si preferisce infatti ricorrere alle reti discusse nel seguito. In particolare, la rete derivatrice a frequenza nulla ha guadagno nullo e non può essere impiegata in cascata nell'anello di retroazione¹

¹essa blocca la componente continua del segnale, mentre i sistemi di controllo devono di solito avere un guadagno elevato per la componente continua

15.3 Rete anticipatrice (lead compensator)

15.3.1 Analisi

La rete ha funzione di trasferimento

$$C(s) = \frac{1 + sT}{1 + saT} \quad \text{con } 0 < a < 1 \quad \text{e } T > 0 \quad (15.1)$$

Per pulsazioni molto minori di $1/T$ si ha un guadagno unitario (i.e. pari a 0 db), mentre per $\omega \gg 1/T$ il guadagno è pari a

$$20 \log_{10} \frac{1}{a}.$$

Di seguito sono riportati i diagrammi di Bode e di Nyquist e la posizione di poli e zeri della rete.

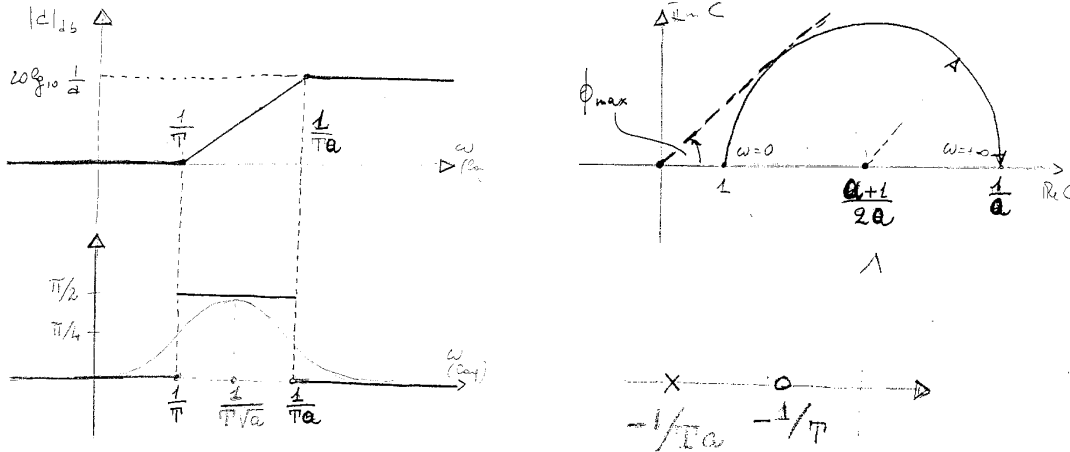


Figura 15.3.1

Si noti che lo sfasamento fra ingresso e uscita alla pulsazione ω è dato da

$$\angle \frac{1 + j\omega T}{1 + j\omega Ta} = \angle(1 + j\omega T) - \angle(1 + j\omega Ta) = \angle(1 + aT^2\omega^2) + j\omega T(1 - a) \quad (15.2)$$

La fase è massima quando è massimo il rapporto

$$\frac{\omega T(1 - a)}{1 + a\omega^2 T^2} = (1 - a) \frac{x}{1 + ax^2}, \quad (x = \omega T)$$

quindi per $x^2 = 1/a$, ovvero per

$$\omega = \omega_{\max} = 1/T\sqrt{a} \quad (15.3)$$

In corrispondenza, la fase vale

$$\phi_{\max} = \angle \left(2 + j \frac{1 - a}{\sqrt{a}} \right) = \operatorname{arctg} \frac{1 - a}{2\sqrt{a}} \quad (15.4)$$

Osservazione La (15.2) si può ricavare direttamente dal diagramma di fase di $C(j\omega)$ notando che esso è, nella scala logaritmica adottata, simmetrico rispetto al punto centrale del segmento intercettato dalle due pulsazioni di spezzamento. Tale punto centrale corrisponde alla pulsazione

$$\log_{10} \omega = \frac{1}{2} \left[\log_{10} \frac{1}{T} + \log_{10} \frac{1}{aT} \right] = \log_{10} \frac{1}{T\sqrt{a}}$$

Come $T > 0$ e $a \in (0, 1)$ individuano univocamente $\omega_{\max} > 0$ e $\phi_{\max} \in (0, \pi/2)$, viceversa, assegnati $\omega_{\max} > 0$ e $\phi_{\max} \in (0, \pi/2)$, si possono ricavare T e a e con essi la struttura della rete anticipatrice. Infatti, da (15.4) si ha

$$1 - a = 2\sqrt{a} \operatorname{tg} \phi_{\max}$$

ossia

$$\sqrt{a} = \sqrt{\operatorname{tg}^2 \phi_{\max} + 1} - \operatorname{tg} \phi_{\max} \in (0, 1) \quad (15.5)$$

e da (15.3)

$$T = \frac{1}{\omega_{\max} \sqrt{a}} \quad (15.6)$$

15.3.2 Sintesi

Ci proponiamo ora di risolvere il seguente problema di sintesi:

“Specificati i valori del guadagno $|\bar{C}|_{\text{db}} > 0$ e dell’anticipo di fase $\bar{\phi}$ ad una assegnata pulsazione $\bar{\omega}$, determinare, se possibile, i parametri a e T di una rete anticipatrice che li realizza.”

Posto

$$q := \operatorname{tg} \bar{\phi} > 0; \quad c := 10^{|\bar{C}|_{\text{db}}/20} > 1 \quad (15.7)$$

e imponendo che q e c siano la tangente della fase e il modulo di una rete anticipatrice alla pulsazione $\bar{\omega}$, si ottengono da (15.1) e (15.2) le relazioni

$$c^2 = \frac{1 + \bar{\omega}^2 T^2}{1 + \bar{\omega}^2 T^2 a^2}; \quad q = \frac{\bar{\omega} T (1 - a)}{1 + \bar{\omega}^2 T^2 a}, \quad (15.8)$$

da interpretare come equazioni nelle incognite a e T , e da risolvere per $a \in (0, 1)$ e per $T > 0$. Dalla prima delle (15.8) si ricava

$$\bar{\omega}^2 T^2 = \frac{c^2 - 1}{1 - c^2 a^2}, \quad (15.9)$$

e dalla seconda, elevandola a quadrato e tenendo conto di (15.9), si ricava

$$q^2 \left(1 + a \frac{c^2 - 1}{1 - c^2 a^2} \right)^2 = \frac{c^2 - 1}{1 - c^2 a^2} (1 - a)^2$$

ovvero

$$q^2 (1 - c^2 a^2 + a(c^2 - 1))^2 = (c^2 - 1)(1 - a^2)(1 - c^2 a^2) \quad (15.10)$$

$$q^2 ((1 - a)(1 + c^2 a))^2 = (c^2 - 1)(1 - a^2)(1 - c^2 a^2) \quad (15.11)$$

Poiché ricerchiamo soluzioni con $a \in (0, 1)$, possiamo eliminare il fattore $(1 - a)^2$ in entrambi i membri di (15.11), pervenendo all'equazione in a

$$q^2(1 + c^2a)^2 = (c^2 - 1)(1 - c^2a^2) \quad (15.12)$$

e quindi a

$$c^2(c^2q^2 + c^2 - 1)a^2 + 2c^2q^2a + (q^2 - c^2 + 1) = 0 \quad (15.13)$$

In (15.13) i coefficienti dei termini di grado 2 e 1 nell'incognita a sono positivi (si ricordi che è $c > 1$). Se fosse non negativo il coefficiente del termine di grado zero, entrambe le soluzioni in a avrebbero parte reale non positiva. Quindi deve essere $1 - c^2 + q^2 < 0$, ovvero

$$c^2 > q^2 + 1 \quad (15.14)$$

D'altra parte, se vale (15.14), avendosi una variazione e una permanenza di segno nei coefficienti dell'equazione, le radici sono reali e di segno opposto (essendo negativo il loro prodotto). Inoltre il modulo del prodotto delle radici vale

$$\frac{|1 - c^2 + q^2|}{c^2(c^2q^2 + c^2 - 1)} < \frac{c^2 - 1 - q^2}{c^2 - 1} \frac{1}{c^2} < \frac{1}{c^2} < 1$$

mentre è negativa la loro somma

$$-\frac{2q^2}{c^2q^2 + c^2 - 1}.$$

Di conseguenza, la radice positiva è minore di 1. Sulla base delle considerazioni esposte, possiamo allora affermare che

Proposizione 15.3.1 *La condizione (15.14)*

$$c^2 > q^2 + 1$$

è necessaria e sufficiente per l'esistenza di una soluzione $\bar{a} \in (0, 1)$ della equazione (15.13). Inoltre² (15.9) fornisce in corrispondenza un unico valore reale e positivo della costante T :

$$\bar{T} = \frac{1}{\bar{\omega}} \sqrt{\frac{c^2 - 1}{1 - c^2\bar{a}^2}} \quad \blacksquare \quad (15.15)$$

Infine, da (15.7), si vede che il problema ammette soluzione se e solo se

$$10^{|\bar{C}|_{\text{db}}/10} > 1 + \text{tg}^2 \bar{\phi} \quad (15.16)$$

ovvero se “l'ampiezza è abbastanza grande rispetto allo sfasamento”.

²Si noti che da (15.12) e da $c^2 > 1$ segue $1 - c^2a^2 > 0$

Esempio 15.3.1 Si vuole costruire una rete anticipatrice che in corrispondenza alla pulsazione $\bar{\omega} = 8$ rad/sec fornisca un anticipo di fase pari a $\pi/4$ e un guadagno di 10 db.

(i) Si ha

$$q = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1, \quad c^2 = 10^{\bar{C}|_{\text{db}}/10} = 10$$

Quindi la condizione $c^2 > q^2 + 1$ è soddisfatta e il problema ammette soluzione.

(ii) L'equazione (15.13) per a :

$$190a^2 + 20a - 8$$

ha radice positiva $\bar{a} = 0,159$.

In corrispondenza, si trova

$$\bar{T}^2 = \frac{1}{\bar{\omega}^2} \frac{c^2 - 1}{1 - c^2 \bar{a}^2} = 0.144 \Rightarrow T = 0.38$$

e

$$C(s) = \frac{1 + s\bar{T}}{1 + s\bar{a}} = \frac{1 + 0.38s}{1 + 0.06s}$$

Per realizzare la rete anticipatrice si può utilizzare la rete elettrica di figura 15.3.2, la cui

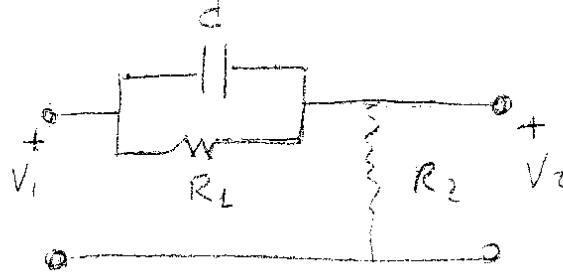


Figura 15.3.2

funzione di trasferimento (a vuoto) è

$$\frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{R_2}{R_2 + \frac{R_1/sC}{R_1 + 1/sC}} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{1 + R_1Cs}{1 + s \frac{R_1R_2C}{R_1 + R_2}}$$

Ponendo

$$T = R_1C, \quad a = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad (15.17)$$

si ha allora

$$\frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{1 + sT}{1 + sTa} = a \frac{1 + sT}{1 + sTa}$$

e per ottenere la struttura della rete anticipatrice ricorrendo alla rete RC sopra considerata, è necessario includere anche un amplificatore operazionale di guadagno $1/a$, oppure aumentare di un fattore $1/a$ il guadagno della catena diretta.

15.4 Rete ritardatrice (lag compensator)

15.4.1 Analisi

La sua funzione di trasferimento è

$$C(s) = \frac{1 + sT}{1 + srT} \quad \text{con } r > 1, T > 0 \quad (15.18)$$

Al solito, nella figura 15.4.1 si riportano i diagrammi di Bode e di Nyquist, nonché la posizione di poli e zeri.

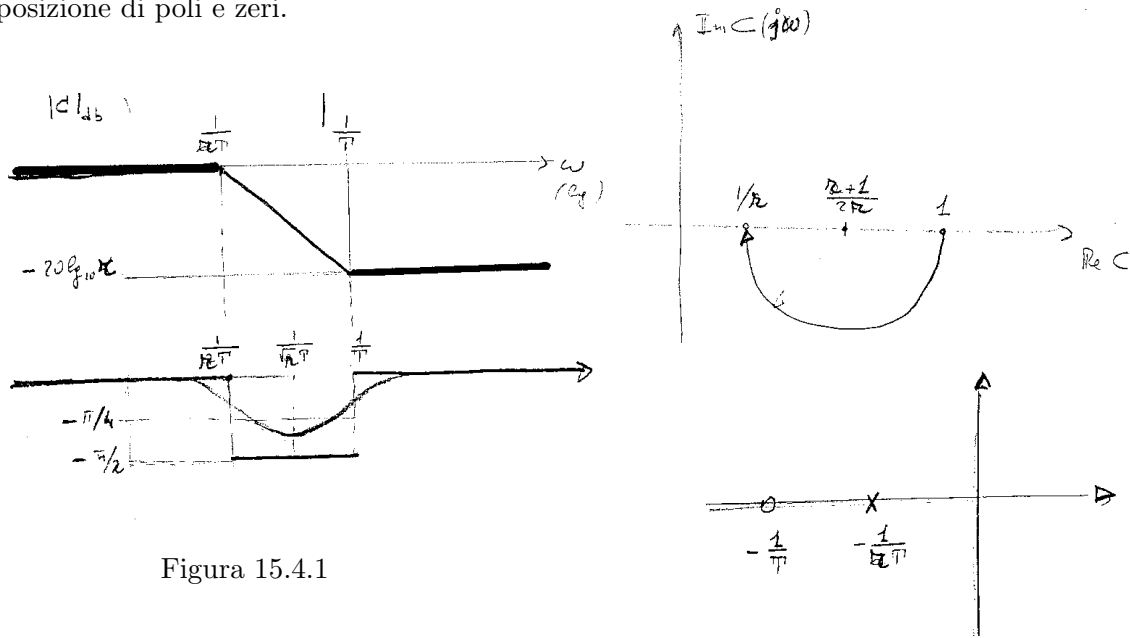


Figura 15.4.1

La fase di $C(j\omega)$ è data da

$$\angle C(j\omega) = \angle(1 + j\omega T)(1 - j\omega Tr) = \angle(1 + \omega^2 r T^2) + j\omega T(1 - r) \quad (15.19)$$

e lo sfasamento massimo, che si ottiene alla pulsazione

$$\omega_{\max} = \frac{1}{\sqrt{r}T},$$

vale

$$\phi_{\max} = \angle \left(2 + j \frac{1}{\sqrt{r}}(1 - r) \right) = -\operatorname{arctg} \frac{r - 1}{2\sqrt{r}} \quad (15.20)$$

15.4.2 Sintesi

Il problema di sintesi, già considerato per una rete anticipatrice, è il seguente

“dati la pulsazione $\bar{\omega}$, lo sfasamento $q := \operatorname{tg} \bar{\phi} < 0$ e il guadagno $|\bar{C}|_{\text{db}} < 0$, determinare, se possibile, i parametri T ed r di una rete ritardatrice che alla pulsazione $\bar{\omega}$ presenta lo sfasamento e il guadagno che sono stati assegnati”

e si risolve, nelle incognite r e T , secondo la medesima procedura adottata per la rete anticipatrice. Posto $c = 10^{|\bar{C}|_{\text{db}}/20} < 1$, deve essere

$$q = \operatorname{tg} \bar{\phi} = -\frac{\bar{\omega} T(r - 1)}{1 + r \bar{\omega}^2 T^2}, \quad c^2 = \frac{1 + \bar{\omega}^2 T^2}{1 + r^2 \bar{\omega}^2 T^2} < 1 \quad (15.21)$$

da cui le equazioni

$$\bar{\omega}^2 T^2 = \frac{1 - c^2}{c^2 \bar{r}^2 - 1} \quad (15.22)$$

$$q^2(1 - c^2 r)^2 = (1 - c^2)(c^2 r^2 - 1) \quad (15.23)$$

Si perviene all'equazione nell'incognita r , analoga della (15.13) del paragrafo 15.3,

$$c^2(c^2 q^2 + c^2 - 1)r^2 + 2c^2 q^2 r + (q^2 - c^2 + 1) = 0 \quad (15.24)$$

dove ora c è minore di 1 e i coefficienti dei termini di grado 1 e di grado 0 sono positivi. Per avere una soluzione positiva, deve essere negativo³ il coefficiente di r^2 , ovvero

$$c^2 q^2 + c^2 < 1 \Leftrightarrow c^2 < (q^2 + 1)^{-1} \quad (15.25)$$

In questa ipotesi, le radici hanno segno opposto e somma positiva

$$-\frac{2q^2}{c^2 q^2 + c^2 - 1}$$

mentre il modulo del loro prodotto soddisfa la disequaglianza

$$\frac{q^2 - c^2 + 1}{c^2 |c^2 q^2 + c^2 - 1|} \geq \frac{1}{c^2} \frac{1 - c^2}{1 - c^2 - c^2 q^2} \geq \frac{1}{c^2} \frac{1 - c^2}{1 - c^2} = \frac{1}{c^2} > 1 \quad (15.26)$$

Quindi la soluzione positiva \bar{r} soddisfa la condizione $\bar{r} > 1$ e (15.25) è condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di una soluzione $\bar{r} > 1$.

Da (15.22) si ricava inoltre, in corrispondenza, un valore positivo di T :

$$\bar{T} = \frac{1}{\bar{\omega}} \sqrt{\frac{1 - c^2}{c^2 \bar{r}^2 - 1}} \quad (15.27)$$

- ESERCIZIO 15.4.1 Si verifichi che (15.27) fornisce un valore reale per \bar{T} , dimostrando la disequaglianza $c^2 \bar{r}^2 > 1$.

‡ *Soluzione.* Le seguenti disequaglianze sono equivalenti:

$$\begin{aligned} c^2 \bar{r}^2 &> 1 \\ c^2 \bar{r}^2 (c^2 q^2 + c^2 - 1) &< c^2 q^2 + c^2 - 1 \\ -2c^2 q^2 \bar{r} - (q^2 - c^2 + 1) &< c^2 q^2 + c^2 - 1 \\ -2c^2 q^2 \bar{r} &< c^2 q^2 + q^2 \\ -2c^2 \bar{r} &< c^2 + 1 \\ -2\bar{r} &< 1 + \frac{1}{c^2} \end{aligned}$$

e l'ultima è evidentemente vera.

La rete elettrica di figura 15.4.2 può essere impiegata (a vuoto) come rete ritardatrice.

³se fosse positivo, il prodotto delle radici sarebbe positivo e negativa la somma

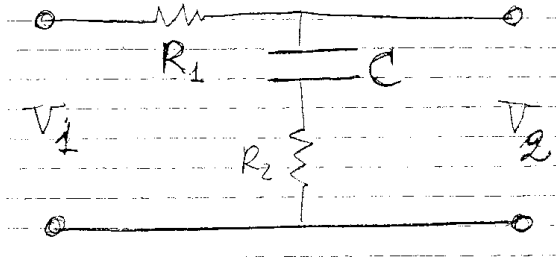


Figura 15.4.2

Infatti la sua funzione di trasferimento è

$$\frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{R_2 + \frac{1}{sC}}{R_1 + R_2 + \frac{1}{sC}} = \frac{1 + sCR_2}{1 + sC(R_1 + R_2)} = \frac{1 + s(CR_2)}{1 + s(CR_2)\frac{R_1 + R_2}{R_2}} = \frac{1 + sT}{1 + sTr}$$

in cui si è posto

$$T = R_2C, \quad r = \frac{R_1 + R_2}{R_2} = 1 + \frac{R_1}{R_2} \quad (15.28)$$

Esempio 15.4.1 Progettare una rete ritardatrice che alla pulsazione $\bar{\omega} = 2$ rad/secondo produca un ritardo di fase pari a 50° ed una attenuazione di 15 db.

(i) Nelle notazioni adottate precedentemente, si ha

$$q = \operatorname{tg}(-50^\circ) = -1.192, \quad c = 10^{|\operatorname{bar}C|_{\text{db}}/20} \Rightarrow c^2 = 10^{-15/10} = 0.031$$

Quindi è soddisfatta la condizione (15.25) di risolubilità.

(ii) Calcoliamo allora

$$\begin{aligned} q^2 - c^2 + 1 &= 2.388 \\ 2q^2c^2 &= 0.0898 \\ c^2(q^2c^2 + c^2 - 1) &= -0.0292 \end{aligned}$$

coefficienti dell'equazione (15.24) nell'incognita r

$$-0.0292r^2 + 0,0898r + 2.388$$

La radice positiva (e maggiore di uno) vale $\bar{r} = 10.71$

(iii) Infine si calcola

$$\bar{T}^2 = \frac{1}{\bar{\omega}^2} \frac{1 - c^2}{c^2\bar{r}^2 - 1} = 0.092 \Rightarrow \bar{T} = 0.303$$

ottenendo

$$C(s) = \frac{1 + \bar{T}s}{1 + \bar{r}\bar{T}s} = \frac{1 + 0.303s}{1 + 3.25s} \quad (15.29)$$

(iv) Nella sintesi con reti RC, applicando le (15.28), si ha

$$\bar{r} = 1 + \frac{R_1}{R_2} = 10.710, \quad \text{quindi} \quad \frac{R_1}{R_2} = 9.710$$

$$\bar{T} = R_2C = 0.303$$

e, fissato il valore di uno dei tre componenti della rete, rimangono determinati i valori degli altri due.

15.5 Rete anticipatrice-ritardatrice (lag-lead compensator)

15.5.1 Analisi

La funzione di trasferimento di questo tipo di rete è data dal prodotto delle funzioni di trasferimento di una rete anticipatrice e di una rete ritardatrice

$$C(s) = \frac{1 + sT_a}{1 + sT_a a} \frac{1 + sT_r}{1 + sT_r r}, \quad a \in (0, 1), r > 1, T_a > 0, T_r > 0 \quad (15.30)$$

Di solito, si suppone anche

$$0 < T_a a < T_a \ll T_r < T_r r \quad \text{e} \quad r = a^{-1} \quad (15.31)$$

per cui la distribuzione di poli e zeri è quella di figura 15.5.1

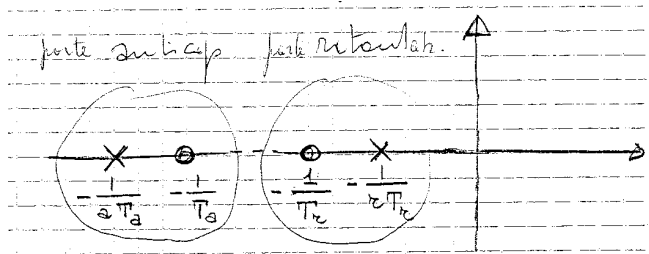


Figura 15.5.1

e i diagrammi di Bode hanno la struttura riportata in figura 15.5.2

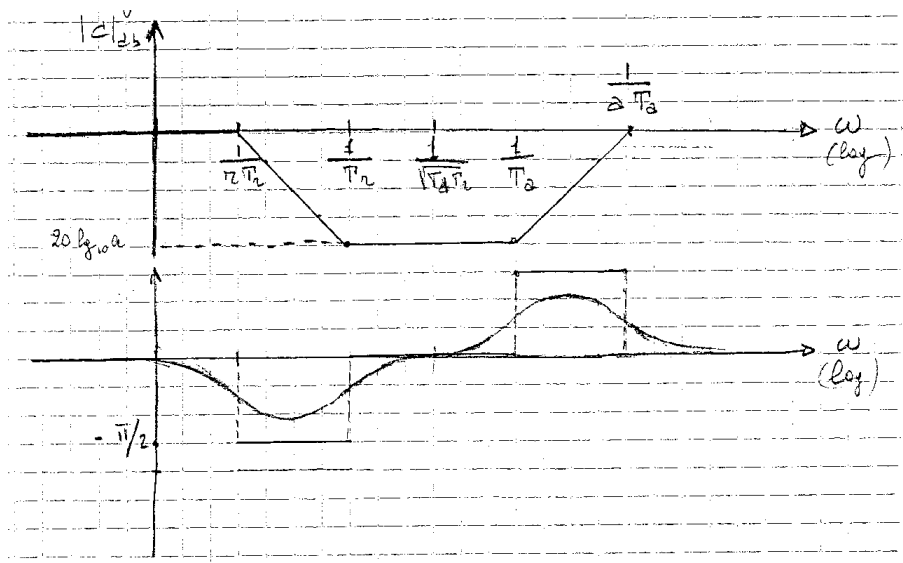


Figura 15.5.2

Lo sfasamento è nullo quando risulta

$$\angle(1 + j\omega T_a) + \angle(1 + j\omega T_r) = \angle(1 + j\omega T_a a) + \angle(1 + j\omega \frac{T_r}{a}) \quad (15.32)$$

Alla pulsazione $\omega = 1/\sqrt{T_a T_r}$ lo sfasamento di $(1 + j\omega T_a)(1 + j\omega T_r)$ vale $\pi/2$, e vale $\pi/2$ anche lo sfasamento di $(1 + j\omega a T_a)(1 + j\omega T_r/a)$. Quindi (15.32) è soddisfatta in

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{T_a T_r}} \quad (15.33)$$

A tale pulsazione il guadagno della rete è minimo e vale

$$\left| \frac{(\sqrt{T_r} + j\sqrt{T_a})(\sqrt{T_a} + j\sqrt{T_r})}{(\sqrt{T_r} + ja\sqrt{T_a})\left(\sqrt{T_a} + j\frac{\sqrt{T_r}}{a}\right)} \right| = \left| \frac{j(T_r + T_a)}{j\left(aT_a + \frac{T_r}{a}\right)} \right| = \frac{T_a + T_r}{aT_a + \frac{T_r}{a}} < 1 \quad (15.34)$$

15.5.2 Sintesi

Data la pulsazione $\bar{\omega}$, vogliamo determinare la funzione di trasferimento di una rete anticipatrice/ritardatrice che alla pulsazione $\bar{\omega}$ abbia guadagno $|\bar{C}|_{\text{db}} < 0$ e sfasamento in anticipo pari a $\bar{\phi}$.

Rispetto ai casi precedenti, abbiamo due dati di specifica e tre parametri da determinare, cioè T_r, T_a ed $a < 1$.

Possiamo quindi introdurre una ulteriore specifica, e cioè il valore dello sfasamento in ritardo $\phi_r < 0$ indotto dalla sola parte ritardatrice della rete alla pulsazione $\bar{\omega}$ e richiedere poi che la parte anticipatrice determini uno sfasamento

$$\phi_a = \bar{\phi} - \phi_r \quad (15.35)$$

Se ϕ_r è piccolo (qualche grado) e $\bar{\phi}$ è grande ($40^\circ \div 60^\circ$) si può ritenere che

- i) $\bar{\omega}$ sia compreso fra $1/T_a$ e $1/aT_a$;
- ii) in $\bar{\omega}$ la parte ritardatrice produca un guadagno

$$-20 \log_{10} r = 20 \log_{10} a \text{ db}$$

e quindi il guadagno complessivo sia

$$|\bar{C}|_{\text{db}} = \underbrace{10 \log_{10} \frac{1 + \bar{\omega}^2 T_a^2}{1 + \bar{\omega}^2 T_a^2 a^2}}_{\text{guad. della parte anticipatrice}} + \underbrace{20 \log_{10} a}_{\text{guad. della parte ritardatrice}} = 10 \log_{10} \frac{a^2 (1 + \bar{\omega}^2 T_a^2)}{1 + \bar{\omega}^2 T_a^2 a^2}$$

Ponendo allora

$$c^2 := 10^{|\bar{C}|_{\text{db}}/10} = a^2 \frac{1 + \bar{\omega}^2 T_a^2}{1 + \bar{\omega}^2 T_a^2 a^2} < 1 \quad (15.36)$$

$$q := \text{tg } \phi_a = \frac{\bar{\omega} T_a (1 - a)}{1 + T_a^2 \bar{\omega}^2} > 0 \quad (15.37)$$

il problema si riconduce a risolvere le equazioni (15.36-15.37) nelle incognite $a \in (0, 1)$ e $T_a > 0$, con c^2 e q costanti note.

Se definiamo

$$\tilde{c}^2 = \frac{c^2}{a^2} \quad (15.38)$$

(15.36) e (15.37) diventano

$$\tilde{c}^2 = \frac{1 + \bar{\omega}^2 T_a^2}{1 + \bar{\omega}^2 T_a^2 a^2}, \quad q := \frac{\bar{\omega} T_a (1 - a)}{1 + T_a^2 \bar{\omega}^2} \quad (15.39)$$

perfettamente corrispondenti a alle relazioni considerate in (15.8). Poiché il problema da risolvere ha la stessa struttura di quello della rete anticipatrice, l'equazione da risolvere nell'incognita a è la medesima considerata in (15.11):

$$\tilde{c}^2(\tilde{c}^2 q^2 + \tilde{c}^2 - 1)a^2 + 2\tilde{c}^2 q^2 a + (q^2 - \tilde{c}^2 + 1) = 0$$

e quindi, sostituendo \tilde{c} con il valore dato da (15.38),

$$(q^2 - c^2 + 1)a^2 + 2c^2 q^2 a + c^2(q^2 c^2 + c^2 - 1) = 0 \quad (15.40)$$

nella quale i coefficienti di a^2 e di a sono entrambi positivi. Affinché l'equazione in a ammetta una soluzione positiva deve essere negativa la costante, ovvero deve essere

$$c^2 < \frac{1}{1 + q^2}. \quad (15.41)$$

In questo caso le radici di (15.40) sono reali e di segno opposto. La loro somma vale $-2c^2 q^2$, quindi la radice più grande in modulo è quella negativa, e il modulo del loro prodotto è dato da

$$\frac{c^2(1 - c^2(1 + q^2))}{1 + q^2 - c^2} = c^2 \frac{\frac{1}{1 + q^2} - c^2}{1 - \frac{c^2}{1 + q^2}} \leq c^2 \frac{\frac{1}{1 + q^2} - c^2}{1 - c^2} \leq c^2$$

Allora la radice positiva \bar{a} di (15.40) appartiene a $(0, c) \subset (0, 1)$ e da (15.36) si ricava

$$\bar{\omega}^2 \bar{T}_a^2 = \frac{c^2 - \bar{a}^2}{\bar{a}^2(1 - c^2)}$$

e infine

$$\bar{T}_a = \frac{1}{\bar{\omega}} \sqrt{\frac{c^2 - \bar{a}^2}{\bar{a}^2(1 - c^2)}} \quad (15.42)$$

(si noti che $c^2 - \bar{a}^2$ è positivo, perché $0 < \bar{a} < c$).

Infine si calcola T_r in modo che la parte ritardatrice induca alla pulsazione $\bar{\omega}$ il ritardo di fase ϕ_r inizialmente scelto:

$$\begin{aligned} \phi_r &= \angle \left(\frac{1 + j\bar{\omega}T_r}{1 + j\bar{\omega}T_r\bar{a}^{-1}} \right) = \angle(1 + j\bar{\omega}T_r)(1 - j\bar{\omega}T_r\bar{a}^{-1}) \\ \text{tg } \phi_r &= \frac{\bar{\omega}T_r(1 - \bar{a}^{-1})}{1 + \bar{\omega}^2 T_r^2 \bar{a}^{-1}} = \frac{\bar{\omega}T_r(\bar{a} - 1)}{\bar{a}^2 + \bar{\omega}^2 T_r^2} \end{aligned} \quad (15.43)$$

Dalla (15.43) si ricava un'equazione del secondo grado nell'incognita T_r , e delle due soluzioni si sceglie quella positiva e maggiore di \bar{T}_a .

Esempio 15.5.1 Si vuole costruire una rete anticipatrice-ritardatrice che alla pulsazione $\bar{\omega} = 6$ rad/sec produca un anticipo $\bar{\phi} = 50^\circ$ e una attenuazione di 15 db. Vogliamo inoltre che in $\bar{\omega}$ la parte ritardatrice contribuisca con un ritardo pari a $\phi_r = -2^\circ$.

(i) Nelle notazioni precedenti, si ha

$$\begin{aligned} q &= \operatorname{tg} \phi_a = \operatorname{tg} (\bar{p}hi - \phi_r) = \operatorname{tg} 52^\circ = 1.28 \\ c^2 &= 10^{|\bar{C}|_{\text{db}}/10} = 10^{-15/10} = 10^{-3/2} = 0.0316 \end{aligned}$$

(ii) Si determinano i coefficienti dell'equazione (15.40)

$$2.5964a^2 + 0.1035a - 0.02897 = 0 \quad \Rightarrow \quad a^2 + 0.03986a - 0.011157 = 0$$

e si calcola la soluzione positiva

$$\bar{a} = -0.0199 + \sqrt{0.000397 + 0.011157} = 0.0875 \quad (15.44)$$

Si applica ora la (15.42) per ottenere la costante

$$\bar{T}_a = \frac{1}{\bar{\omega}} \sqrt{\frac{c^2 - \bar{a}^2}{\bar{a}^2(1 - c^2)}} = \frac{1}{6} \sqrt{\frac{0.02394}{0.007418}} = 0.3 \quad (15.45)$$

(iii) Infine, si valuta la costante T_r tramite la (15.43),

$$\operatorname{tg}(-2^\circ) = -0.0314 = \frac{6T_r(0.0875 - 1)}{0.00765 + 36T_r^2} = \frac{-5.475T_r}{0.00766 + 36T_r^2}$$

ottenendo l'equazione

$$-1.1304T_r^2 + 5.475T_r - 0.00024 = 0 \quad T_r^2 - 4.843T_r + 0.0002127 = 0$$

della quale si considera la soluzione (positiva) più grande

$$\bar{T}_r = 2.421 + \sqrt{2.42128} = 3.977 \quad (15.46)$$

(iv) La funzione di trasferimento della rete compensatrice è allora

$$C(s) = \frac{1 + s\bar{T}_a}{1 + s\bar{a}\bar{T}_a} \frac{1 + s\bar{T}_r}{1 + s\bar{T}_r\bar{a}^{-1}} = \frac{1 + 0.3s}{1 + 0.0262s} \frac{1 + 3.98s}{1 + 45.45s} = \frac{s^2 + 3.565s + 0.77}{s^2 + 38.15s + 0.77} \quad (15.47)$$

Per quanto riguarda la sintesi della rete anticipatrice-ritardatrice mediante una rete elettrica (a vuoto), il doppio bipolo

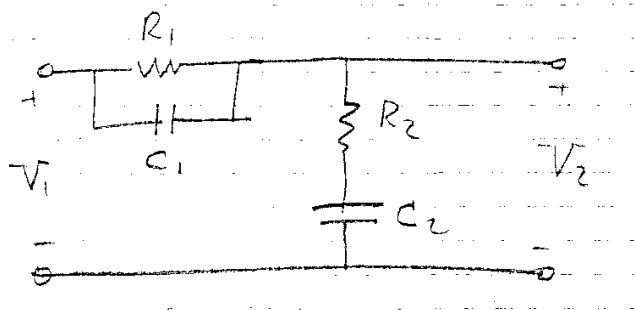


Figura 15.5.3

ha funzione di trasferimento

$$\frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{R_2 + \frac{1}{sC_2}}{R_2 + \frac{1}{sC_2} + \frac{R_1 \frac{1}{sC_1}}{R_1 + \frac{1}{sC_1}}} =$$

$$= \frac{\left(R_2 + \frac{1}{sC_2}\right)\left(R_1 + \frac{1}{sC_1}\right)}{\left(R_2 + \frac{1}{sC_2}\right)\left(R_1 + \frac{1}{sC_1}\right) + \frac{R_1}{sC_1}} = \frac{(sC_2R_2 + 1)(sC_1R_1 + 1)}{(sC_2R_2 + 1)(sC_1R_1 + 1) + sC_2R_1} \quad (15.48)$$

Il discriminante dell'equazione che si ottiene ponendo eguale a zero il denominatore della funzione di trasferimento è positivo. Infatti è positivo quello dell'equazione $(1 + sC_2R_2)(1 + sC_1R_1) = 0$ e aggiungendo il termine sR_1C_2 si incrementa il valore (positivo) del coefficiente del termine del primo ordine lasciando invariati gli altri coefficienti. Quindi le radici del denominatore della funzione di trasferimento sono entrambe reali e negative, come quelle del numeratore, ma più distanti fra loro: rimanendo costante il prodotto delle radici di numeratore e denominatore, l'intervallo fra le radici del denominatore ha estremo inferiore più piccolo ed estremo superiore più grande rispetto a quelli dell'intervallo fra le radici del numeratore.

Possiamo allora riscrivere la (15.48) nella forma

$$C(s) = \frac{(1 + sT_1)(1 + sT_2)}{(1 + sT_1)(1 + sT_2) + sR_1C_2} = \frac{(1 + sT_1)(1 + sT_2)}{(1 + sT_3)(1 + sT_4)} \quad (15.49)$$

in cui

- le radici del denominatore e quelle del numeratore hanno il medesimo prodotto, ovvero risulta $T_1T_2 = T_3T_4$;
- se, per fissare le idee, è $T_1 < T_2$ e $T_3 < T_4$ si ha $T_3 < T_1 < T_2 < T_4$, ponendo

$$a := \frac{T_3}{T_1} = \frac{T_2}{T_4} < 1,$$

si perviene a

$$C(s) = \frac{(1 + sT_1)(1 + sT_2)}{\left(1 + s\frac{T_1}{a}\right)(1 + sT_2a)} \quad (15.50)$$

ovvero $C(s)$ si configura come prodotto delle funzioni di trasferimento di una rete anticipatrice

$$\frac{1 + sT_2}{1 + sT_2a}$$

e di una rete ritardatrice

$$\frac{1 + sT_1}{1 + s\frac{T_1}{a}}$$

15.6 Compensazione mediante rete compensatrice

Si basa sulla introduzione di una rete compensatrice nella catena diretta di un sistema con retroazione unitaria.

Lo scopo è quello di modificare la risposta in frequenza della catena di azione diretta, in modo che siano soddisfatte alcune specifiche di progetto del sistema retroazionato.

Storicamente, è stato il primo metodo utilizzato nella progettazione dei sistemi di controllo ed ha il vantaggio di non richiedere una conoscenza esatta della funzione di trasferimento dell'impianto che si intende controllare: la risposta frequenziale è misurata sperimentalmente e modificata, quando necessario, in modo da soddisfare le specifiche di progetto

Le specifiche usualmente fanno riferimento a

- *l'errore di regime*: a seconda del tipo di impianto, si tratta dell'errore di posizione, di velocità, di accelerazione (ovvero: l'errore nella risposta al gradino, alla rampa, alla parabola unitarie)
- *la pulsazione di "crossover" per il guadagno*: la pulsazione ω_d in corrispondenza alla quale risulta

$$|W(j\omega_d)| = 1$$

- *il margine di fase*: lo sfasamento aggiuntivo in ritardo $-\phi_d$ necessario alla pulsazione di crossover ω_d perché il sistema sia al limite di stabilità, ovvero perché risulti

$$W(j\omega_d)e^{-j\phi_d} = -1$$

Se sono assegnate simultaneamente le specifiche sopradette, l'idea che sta alla base della procedura può essere compresa abbastanza agevolmente:

- si aggiusta il guadagno di anello* in modo da soddisfare le specifiche sul comportamento a regime;
- si determina la risposta in frequenza* della funzione di trasferimento ad anello aperto. Se essa non soddisfa le specifiche sul margine di fase
- si introduce una rete compensatrice* in serie sulla catena di azione diretta. La scelta del tipo di rete (ritardatrice, anticipatrice, anticipatrice/ritardatrice) dipende dalla struttura del diagramma di Nyquist in corrispondenza a ω_d , la pulsazione di crossover desiderata. Come criterio di massima:
 - se alla pulsazione ω_d si desidera che la fase sia $\pi + \phi_d$ (in ritardo) e se la funzione di trasferimento alla pulsazione ω_d ha

$$|W(j\omega_d)|_{\text{db}} < 0, \quad \angle W(j\omega_d) < \pi + \Phi_d$$

come in figura, si può ricorrere ad una rete anticipatrice, che induca alla pulsazione ω_d un anticipo pari a

$$(\pi + \phi_d) - \angle W(j\omega_d) =: \bar{\phi}$$

e un guadagno addizionale pari a

$$|\bar{C}|_{\text{db}} = -|W(j\omega_d)|_{\text{db}}.$$

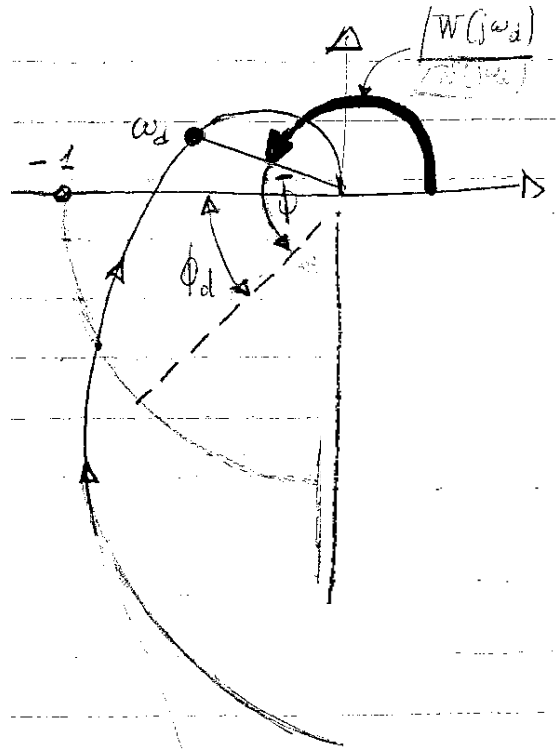


Figura 15.6.1

c2) se alla pulsazione ω_d la funzione di trasferimento originaria ha

$$|W(j\omega_d)|_{db} > 0, \quad \angle W(j\omega_d) > \pi + \phi_d$$

come in figura 15.6.2, si può ricorrere ad una rete ritardatrice, che induca alla pulsazione ω_d uno sfasamento in ritardo $-\bar{\phi}$ pari a

$$(\pi + \phi_d) - \angle W(j\omega_d) =: -\bar{\phi}$$

e una attenuazione, ovvero un guadagno negativo, data da

$$|barC|_{db} = -|W(j\omega_d)|_{db} < 0$$

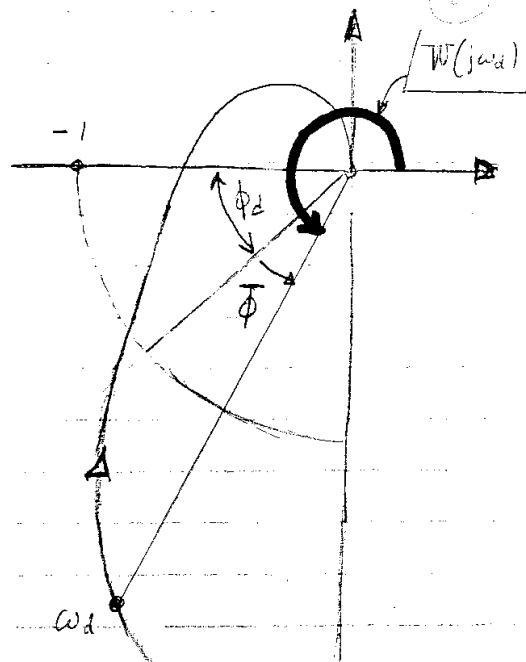


Figura 15.6.2

c3) Se alla pulsazione ω_d si ha

$$|W(j\omega_d)|_{\text{db}} > 0, \quad \angle W(j\omega_d) > \pi + \phi_d$$

si può ricorrere ad una rete anticipatrice-ritardatrice che alla pulsazione ω_d induce un anticipo di fase $\bar{\phi}$ pari a

$$\bar{\phi} = \pi + \phi_d - \angle W(j\omega_d)$$

e una attenuazione pari a

$$|\bar{C}|_{\text{db}} = -|W(j\omega_d)|_{\text{db}}$$

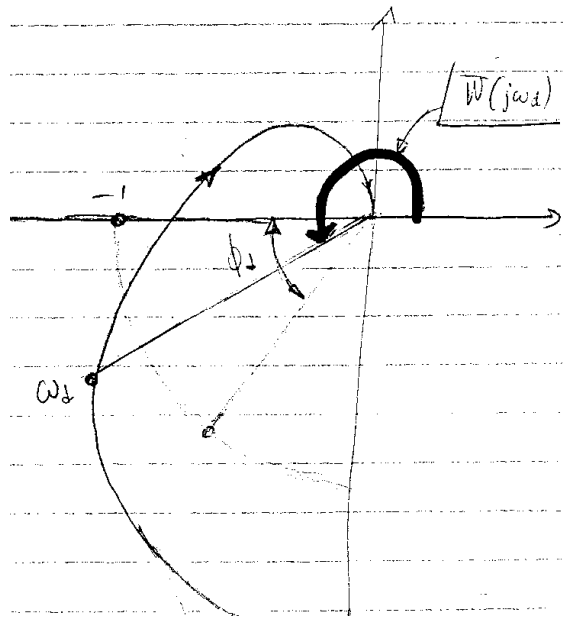
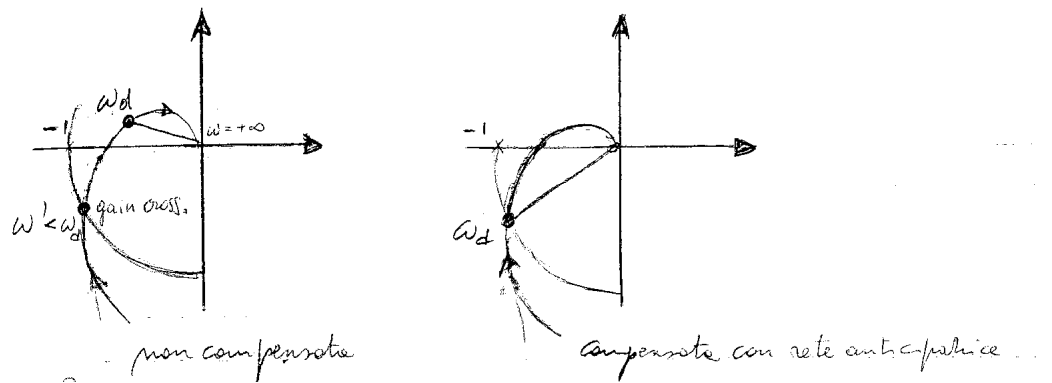
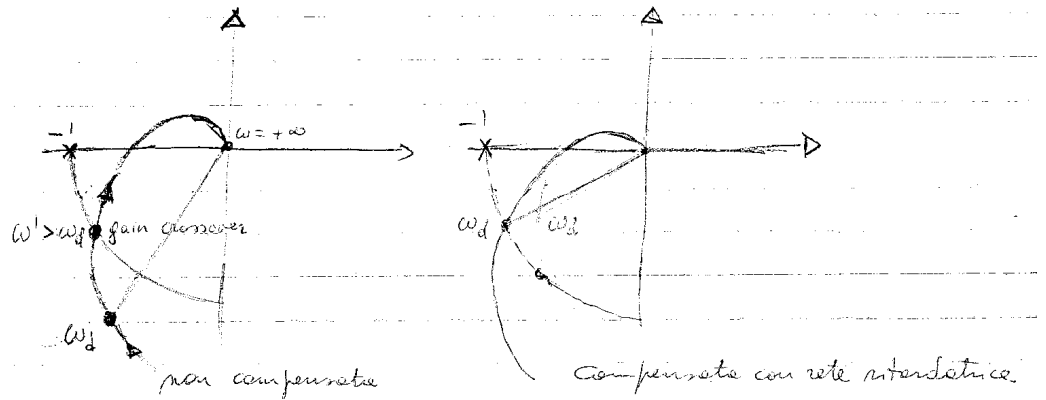


Figura 15.6.3

In generale, l'impiego di una rete anticipatrice porta ad incrementare la pulsazione di attraversamento (gain crossover) rispetto alla situazione non compensata



L'impiego di una rete ritardatrice riduce la pulsazione di attraversamento



La rete anticipatrice dà luogo, in generale, a una maggior larghezza di banda e a una risposta più pronta, ma rende il sistema più sensibile agli effetti del rumore. Una situazione intermedia si genera ricorrendo a una rete anticipatrice-ritardatrice.

15.7 Esempi ed esercizi

Esempio 15.7.1 Si consideri un sistema con funzione di trasferimento

$$W(s) = \frac{K'}{s(s+5)(s+10)} = \frac{K_v}{s(1 + \frac{s}{5})(1 + \frac{s}{10})}, \quad K_v = \frac{K'}{50} \quad (15.51)$$

Si intende progettare una rete compensatrice in modo che la costante di velocità valga $K_v = 10$ e il margine di fase sia di 45° (in ritardo).

(i) Per ottenere $K_v = 10$ deve essere $K' = 500$. Il diagramma di Bode e di Nyquist per $K_v = 10$ sono riportati in figura 15.7.1 e 15.7.2

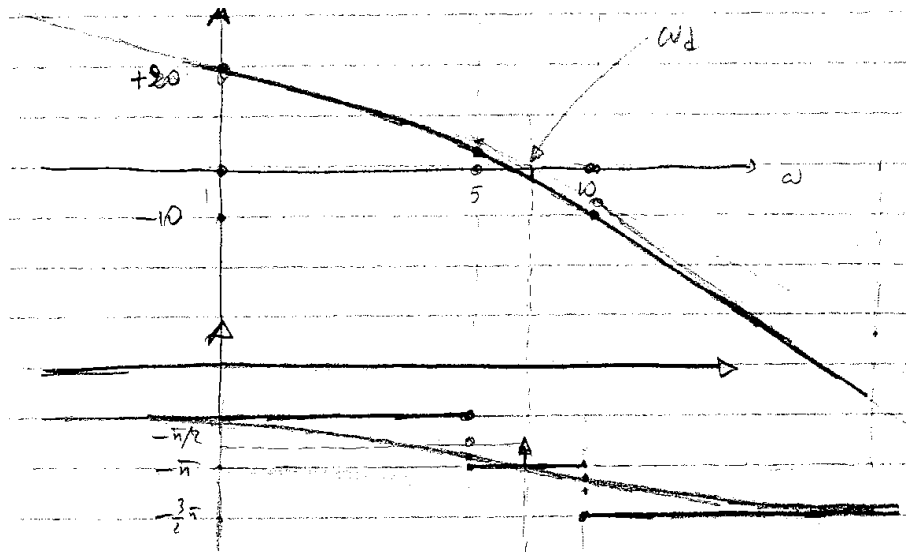


Figura 15.7.1

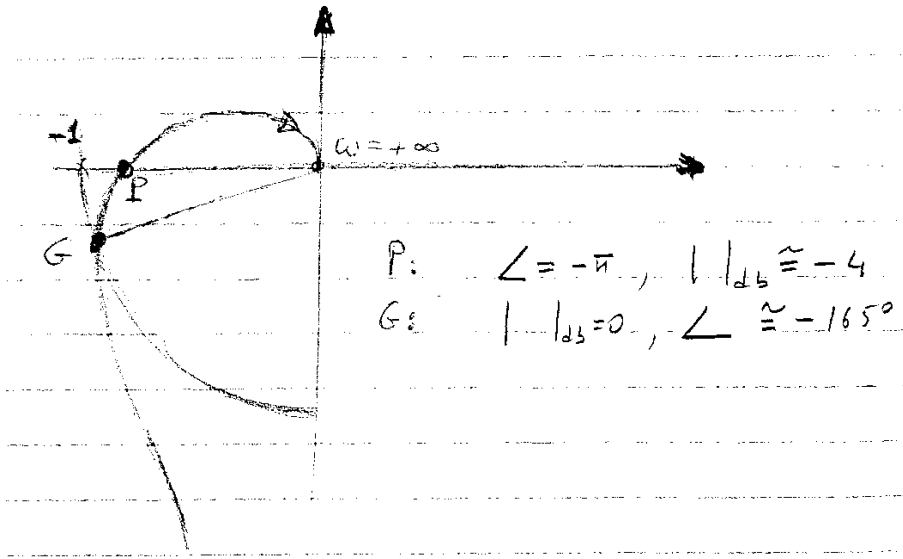


Figura 15.7.2

La tabella dettagliate del guadagno e della fase alle varie pulsazioni è riportata qui di seguito

ω	$ W(j\omega) _{\text{db}}$	$\angle W(j\omega)$
1	19.8	-107°
1.5	16.0	-115°
2	13.2	-123°
2.5	10.8	-130°
3	8.7	-137°
4	5.2	-150°
6	-0.78	-171°
8	-5.72	-186°
9	-7.94	-192°
10	-10.0	-198°

(15.52)

(ii) Se vogliamo introdurre una rete anticipatrice, dobbiamo scegliere una pulsazione di crossover $\omega_d \in [6, 10]$. Infatti

- deve essere una pulsazione in corrispondenza alla quale il guadagno è negativo, dato che il guadagno della rete è positivo;
- l'anticipo di fase introdotto dalla rete anticipatrice non eccede di regola i 65° , quindi per avere una fase nel sistema compensato pari a -135° occorre che la fase di $W(j\omega_d)$ non sia inferiore a -200° , ovvero che ω_d non ecceda il valore 10

Scegliendo $\omega_d = 8$, il compensatore deve introdurre uno sfasamento in anticipo pari a

$$\bar{\phi} = 186^\circ - 135^\circ = 51^\circ$$

e un guadagno pari a

$$|\bar{C}|_{\text{db}} = 5.7\text{db}$$

La funzione di trasferimento della rete anticipatrice si determina allora con il metodo descritto nel paragrafo 15.3 e si perviene alla sua funzione di trasferimento

$$C(s) = 12.7 \frac{s + 4.8}{s + 60} = \frac{1 + \frac{1}{4.8}s}{1 + \frac{1}{4.8} \frac{1}{12.7}s} = \frac{1 + T_a s}{1 + T_a a s} \quad (15.53)$$

i cui diagrammi di Bode sono riportati in figura 15.7.3

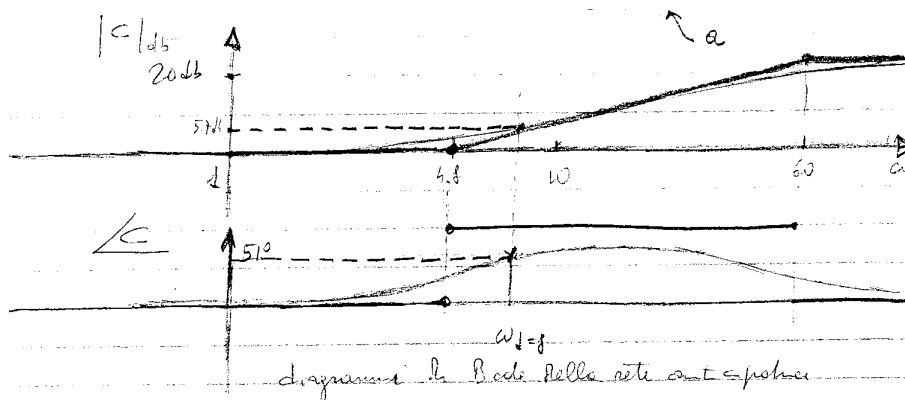


Figura 15.7.3

(iii) Se si intende far ricorso ad una rete ritardatrice, conviene scegliere $\omega_d \in [1, 2.5]$. Infatti alla pulsazione $\omega = 2.8$ si ha già la fase di -135° . D'altra parte, scegliendo $\omega_d < 1$ il guadagno di $W(s)$ supera 20 db e l'attenuazione richiesta alla rete potrebbe risultare eccessiva (dovrebbe agire già a pulsazione molto bassa e riducendo sensibilmente la banda passante).

Scegliamo allora, ad esempio, $\omega_d = 2$ rad/sec: la rete ritardatrice a tale pulsazione deve introdurre un ritardo di 12° ed un guadagno di -13.2 db. Ricorrendo al metodo descritto nel paragrafo 15.4, si ottiene

$$C(s) = 0.21 \frac{s + 0.54}{s + 0.11} = \frac{1 + \frac{1}{0.54}s}{1 + \frac{1}{0.54} \frac{1}{0.21}s} = \frac{1 + sT}{1 + srT}$$

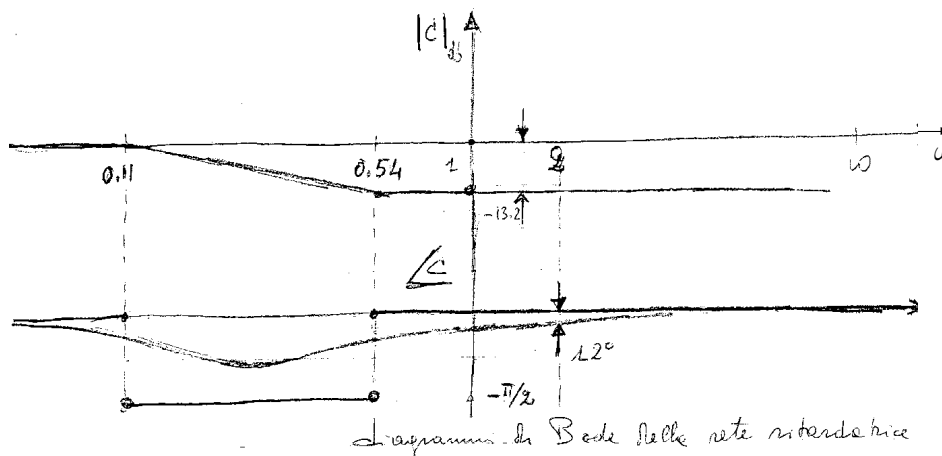


Figura 15.7.4

Sebbene sia la rete ritardatrice che quella anticipatrice soddisfino le specifiche, con la rete anticipatrice si ottiene una pulsazione di crossover più alta, quindi una maggior larghezza di banda e una risposta più pronta.

(iv) Possiamo anche applicare una rete anticipatrice/ritardatrice, scegliendo un pulsazione di crossover $\omega_d = 4$ rad/sec.

In questo caso la rete dovrà fornire un anticipo di 15° alla pulsazione ω_d e un guadagno di -5.2 db.

Applicando il procedimento riportato nel precedente paragrafo e scegliendo $\phi_r = -5^\circ$ si perviene ad una funzione di trasferimento

$$\begin{aligned} C(s) &= \frac{(s + 4.47)(s + 0.625)}{(s + 10.227)(s + 0.274)} = \frac{(1 + \frac{s}{4.4})(1 + \frac{s}{0.62})}{(1 + \frac{s}{10.2})(1 + \frac{s}{0.27})} \\ &= \frac{(1 + s 0.224)(1 + s 1.6)}{(1 + s 0.0977)(1 + s 3.65)} = \frac{(1 + sT_a)(1 + sT_r)}{(1 + saT_a)(1 + srT_r)} \end{aligned}$$

con $a = 0.437$, $r = 1/a$.

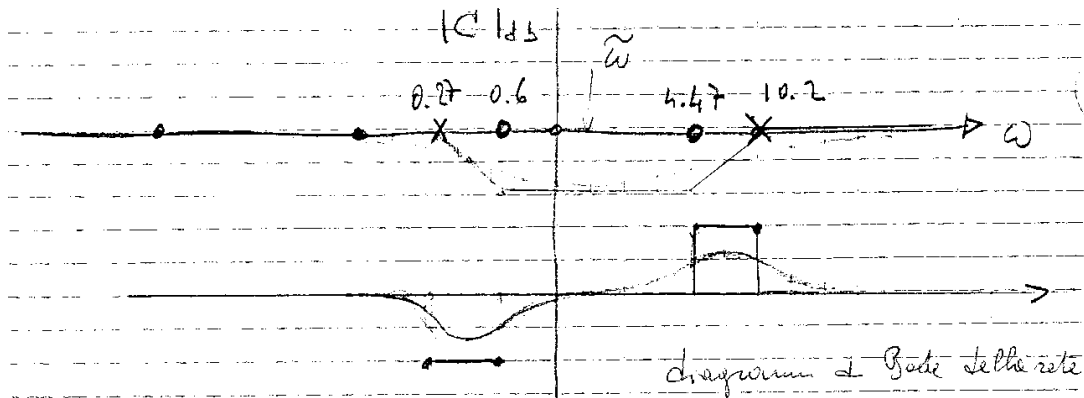


Figura 15.7.5

Il guadagno della rete in $\tilde{\omega} = \frac{1}{\sqrt{T_a T_r}}$ vale

$$\frac{T_a + T_r}{aT_a + rT_r} = \frac{1.6 + 0.224}{0.097 + 3.65} = 0.48$$

Quindi $|C(j\tilde{\omega})|_{\text{db}} = -6$ db.

La figura 15.7.6 riporta i iagrammi di Bode della funzione di trasferimento del sistema in catena diretta, nel caso non compensato e nel caso compensato.

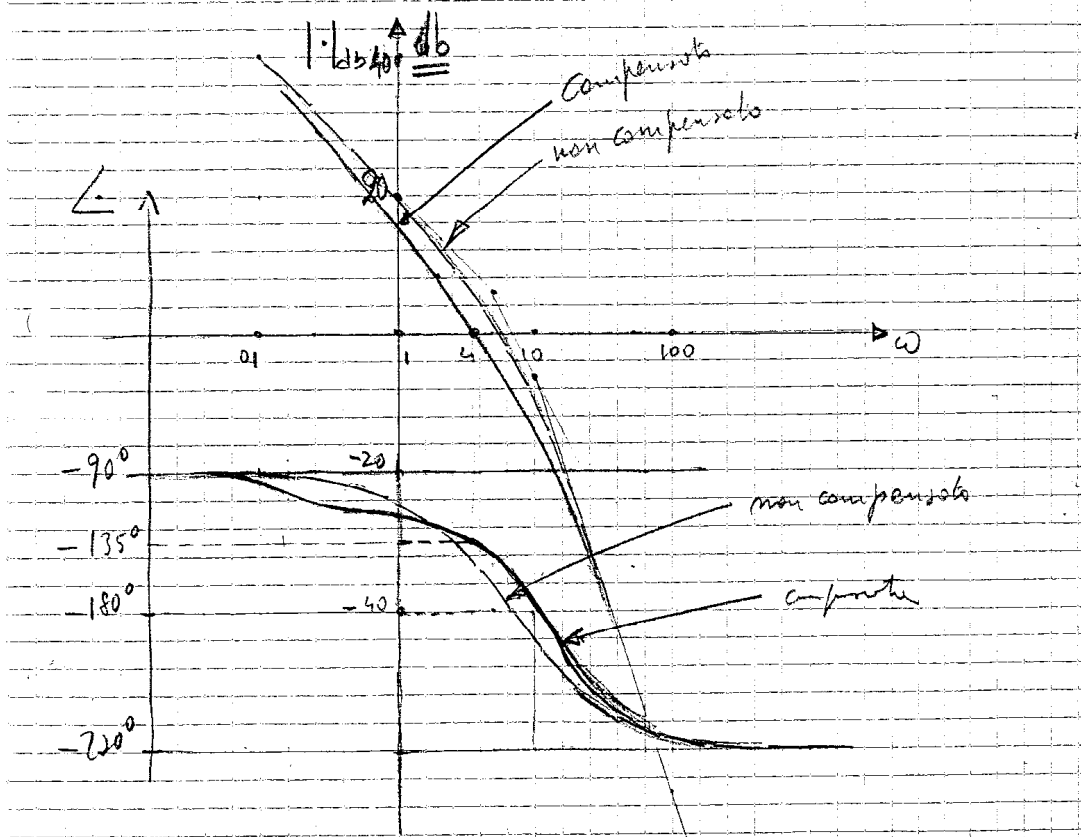


Figura 15.7.6

Si noti che non in tutti i casi è possibile soddisfare le specifiche del problema ricorrendo a tutti i tipi di rete correttiva.

Esempio 15.7.2 Si consideri il sistema

$$W(s) = \frac{K'}{s(s+5)(s+10)} = \frac{K_v}{s(1+\frac{s}{5})(1+\frac{s}{10})}, \quad K_v = K'/50$$

Ci si propone di progettare una rete compensatrice in modo da avere

$$K - v = 100; \quad \text{margine di fase } 45^\circ$$

Deve essere $K' = 5000$ e si ha

$$W(s) = \frac{100}{s(1+\frac{s}{5})(1+\frac{s}{10})}$$

In funzione di ω , la fase $\angle W(j\omega)$ ha lo stesso andamento della funzione considerata nell'esempio precedente, mentre $|W(j\omega)|_{dB}$ è incrementato di 20 db, come riportato nella seguente tabella

ω	$ W(j\omega) _{\text{db}}$	$\angle W(j\omega)$
1	39.8	-107°
1.5	36.0	-115°
2	33.2	-123°
2.5	30.8	-130°
3	28.7	-137°
4	25.2	-150°
6	19.2	-171°
8	14.3	-186°
9	12.1	-192°
10	10.0	-198°
15	1.36	-217°
16	-0.10	-220°
20	-5.31	-229°

Chiaramente la specifica sul margine di fase non è soddisfatta: quando $|W(j\omega)|_{\text{db}} = 0$, ossia per $\omega = 16$ rad/sec, si ha $\angle W = -220^\circ$, anziché -135° .

a) Il ricorso ad una rete anticipatrice non è proponibile, perché essa dovrebbe agire nella zona dello spettro dove il guadagno è negativo, e in tale zona il ritardo rispetto al valore 135° che si intende ottenere è eccessivo (supera i 75° ...) e quindi non compensabile.

b) Il ricorso ad una rete ritardatrice richiederebbe di agire nella zona dello spettro dove la fase è inferiore a -135° , quindi per pulsazioni inferiori a 2.5 rad/sec. L'attenuazione che deve essere introdotta è superiore a 30 db, quindi deve essere

$$20 \log_{10} r > 30,$$

che implica un rapporto zero/polo della rete ritardatrice dell'ordine di qualche decina, quindi un polo molto prossimo all'origine e una rete RC con una grande costante di tempo (e quindi alquanto difficile da sintetizzare).

Con riferimento al luogo delle radici, si vede che la funzione di trasferimento ad anello chiuso ha anch'essa un polo molto prossimo all'origine.

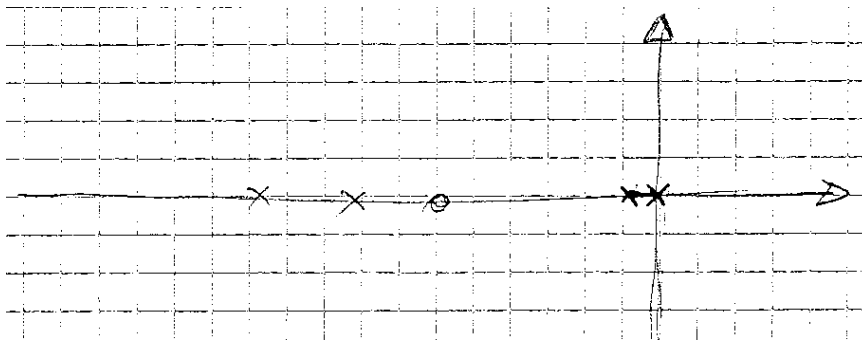


Figura 15.7.7

Sebbene la risposta transitoria non ne risenta molto (per effetto dello zero successivo, piuttosto prossimo), il comportamento può essere degradato considerevolmente per la piccola tolleranza sui parametri della rete.

c) Si può ricorrere allora ad una rete anticipatrice/ritardatrice, scegliendone la frequenza di attraversamento fra 4 e 10 rad/sec e quindi in una zona dove l'anticipo richiesto è tra 15° e 63° . Scegliendo ad esempio $\omega_d = 8$ rad/sec, si ottiene una rete con $r = 13$ (e $a = 0.076$) e funzione di trasferimento

$$C(s) = \frac{(s + 3.422)(s + 0.75)}{(s + 44.5)(s + 0.059)}.$$

15.8 Compensatori PID

15.8.1 Struttura e funzioni dei compensatori PID

Nella pratica, spesso il legame ingresso/uscita del sistema da controllare è noto solo parzialmente. È tuttavia possibile in molti casi ottenere un comportamento soddisfacente del sistema ad anello chiuso ricorrendo allo schema di figura 15.8.1, nel quale viene inserito

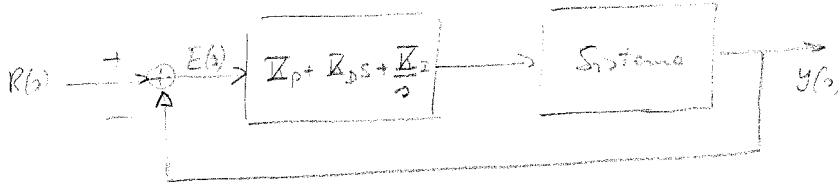


Figura 15.8.1

nella catena diretta un “controllore PID (=proporzionale, integrale e derivativo)”. L’ingresso al sistema è allora costituito dalla somma di tre componenti:

- una componente $K_p E$, proporzionale all’errore,
- una componente $sK_D E$, proporzionale alla derivata dell’errore,
- una componente $\frac{1}{s}K_I E$, proporzionale all’integrale dell’errore.

La prima incrementa il guadagno d’anello, riducendo la sensibilità alle variazioni nei parametri del sistema; la seconda tende a stabilizzare il sistema, introducendo la derivata dell’errore, la terza aumenta l’ordine del sistema e riduce l’errore a regime.

Il grande vantaggio di questo approccio è che i valori delle costanti K_p, K_D, K_I sono spesso determinate mediante una procedura sperimentale di aggiustamenti successivi, fino ad ottenere (o ad approssimare!) il comportamento voluto. Se inoltre i parametri del sistema subiscono variazioni durante il funzionamento, è possibile riaggiustare i valori di K_p, K_D e K_I .

Nella pratica, il rumore presente può essere fonte di problemi quando sia ragguardevole la componente proporzionale alla derivata dell’errore: essa ha infatti l’effetto di accentuare l’effetto del rumore. Per questo motivo, spesso si pone $K_D = 0$.

Esempio 15.8.1 Si consideri un sistema con funzione di trasferimento

$$W(s) = \frac{10}{s(s+2)}$$

Con un controllore PID, la funzione di trasferimento del sistema ad anello chiuso diventa

$$T(s) = \frac{(K_p + K_D s + \frac{K_I}{s})W(s)}{1 + (K_p + K_D s + \frac{K_I}{s})W(s)} = \frac{10(K_D s^2 + K_p s + K_I)}{s^3 + 2s^2 + 10K_p s + 10K_D s^2 + 10K_I} \quad (15.55)$$

È chiaro che, scegliendo opportunamente le tre costanti, il polinomio a denominatore può diventare un arbitrario polinomio monico del terzo grado e quindi i poli di $T(s)$ possono essere allocati arbitrariamente nel piano complesso. Ad esempio, per avere i poli di $T(s)$ in -3 e in $-1 \pm j$, è necessario e sufficiente che il polinomio a denominatore della (15.55) diventi

$$(s + 3)(s + 1 + j)(s + 1 - j) = s^3 + 5s^2 + 8s + 6$$

e quindi dovrà essere

$$\begin{aligned} 2 + 10K_D &= 5 \\ 10K_p &= 8 \\ 10K_I &= 6 \end{aligned}$$

ovvero $K_D = 3/10$, $K_p = 4/5$, $K_I = 3/5$. Si noti che il sistema retroazionato ha un errore a regimenuello nella risposta al gradino e alla rampa, per effetto del doppio polo nell'origine presente in catena diretta.

Osservazione Nella realizzazione pratica della parte derivatrice del controllore PID si può approssimare in bassa frequenza la funzione $K_D s$ con

$$\frac{K_D}{T} \frac{sT}{1 + sT} \quad (15.56)$$

e ricorrere ad una rete derivatrice (cfr. par.15.2) ed, eventualmente, ad un amplificatore (se $K_D/T > 1$). Se ω_b denota la larghezza di banda del sistema, si sceglie T in modo che risulti

$$10\omega_b T < 1 \quad (15.57)$$

15.8.2 Procedura di Ziegler-Nichols

Se il modello del sistema non è noto, si possono aggiustare K_p , K_D e K_I con una procedura empirica proposta da Ziegler e Nichols, basata su due semplici test da applicare al sistema di cui si intende effettuare il controllo.

Per motivi di convenienza, la funzione di trasferimento del compensatore PID sarà riscritta nella forma

$$C(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right) \quad (15.58)$$

- a) METODO DELLA RISPOSTA AL GRADINO: si utilizza la risposta ad anello aperto al gradino unitario, approssimandola con una spezzata come in figura 15.8.2.

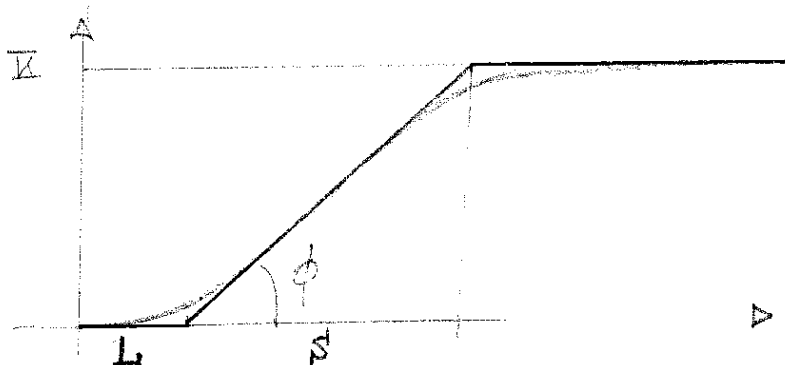


Figura 15.8.2

In essa si distinguono un tempo di ritardo L (=lag) e un tempo di salita S . I valori dei parametri che figurano in (15.58), se scelti in accordo con la seguente tabella

tipologia del controllore	K_p	T_I	T_D
P	$\frac{1}{RL}$		
PI	$\frac{0.9}{RL}$	$3L$	
PID	$\frac{1.2}{RL}$	$2L$	$0.5L$

in cui si è posto $R = K/S = \operatorname{tg} \phi$, danno normalmente luogo a un sistema con due poli dominanti complessi coniugati e con fattore di smorzamento δ 0.2.

- b) METODO DEL LIMITE DI STABILITÀ: si esamina dapprima il comportamento del sistema ad anello chiuso con il solo compensatore proporzionale, e si accresce K_p finché il sistema raggiunge il limite di stabilità e inizia ad oscillare. Il valore del guadagno per cui ciò si verifica sarà indicato con \bar{K}_p . Allora i parametri in (15.58) si scelgono in accordo con la seguente tabella

tipologia del controllore	K_p	T_I	T_D
P	$0.5 \bar{K}_p$		
PI	$0.45 \bar{K}_p$	$0.85 \bar{K}_p$	
PID	$0.6 \bar{K}_p$	$0.5 \bar{K}_p$	$0.125 \bar{K}_p$

15.9 Riferimenti

1. Marro G. "Controlli Automatici", Zanichelli 1992
2. Sinha N.K. "Control Systems" , Wiley, 1994