

Capitolo 16

Sistemi a tempo discreto

16.1 Considerazioni introduttive

Il controllo in retroazione moderno fa sempre più frequentemente uso del calcolatore digitale non solo come strumento per progettare l'algoritmo di controllo, ma anche come dispositivo per implementarlo in tempo reale. La configurazione tipica di un sistema controllato da un calcolatore è riportata in figura 16.1.1.

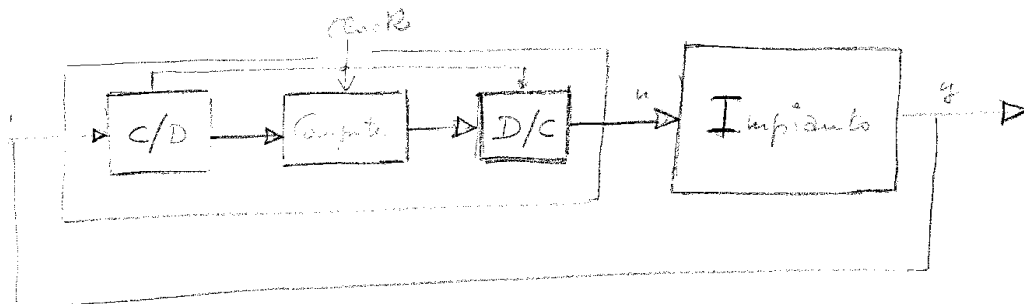


Figura 16.1.1

Il dispositivo di controllo comprende

- il calcolatore digitale;
- un convertitore (C/D) che trasforma i segnali a tempo continuo nel formato digitale richiesto dal calcolatore;
- un convertitore (D/C) che converte i valori “digitali” della variabile di controllo nel segnale fisico “continuo” che pilota l’impianto (o il sistema di amplificazione che lo precede).

Il ricorso a un calcolatore nella catena di controllo offre numerosi vantaggi:

- la flessibilità: il calcolatore può eseguire complicate operazioni logiche e non lineari, cosicché algoritmi di controllo complessi non risultano particolarmente difficili da implementare;

- l'accuratezza: l'accuratezza dei calcoli non dipende dalla stabilità dei componenti utilizzati: con i medesimi ingressi si otterranno sempre le medesime uscite, indipendentemente dalle variazioni che nel tempo subiscono resistori, transistor, condensatori, etc.;
- un'integrazione priva di effetti di deriva, impossibile da ottenere con componenti analogici;
- la possibilità di operare a distanza: sensori e attuatori possono essere posti in siti fisicamente anche molto lontani dal calcolatore e il segnale può essere trasmesso in modo affidabile con tecniche di trasmissione digitale (codifica con codici a correzione di errore).

A fronte di questi vantaggi, dobbiamo peraltro tener conto

- del costo, anche se oggi l'hardware ha costi progressivamente decrescenti, a parità di prestazioni;
- dei ritardi intercorrenti fra il processo di misura e la generazione del segnale di controllo (ritardi nella conversione C/D e D/C e ritardi dovuti al tempo di calcolo), che pongono un confine superiore alla frequenza di campionamento e quindi alla larghezza di banda del sistema ad anello chiuso.

Ci sono fondamentalmente due modi per studiare il sistema di fig. 16.1.1. Se la frequenza di campionamento è piuttosto elevata rispetto alla larghezza di banda che si desidera per il sistema ad anello chiuso, si può assimilare il sistema ad uno di tipo continuo. Quando ciò non succede, l'alternativa è il ricorso a metodologie specifiche per i sistemi a tempo discreto.

Osservazione Il fattore più critico, quando si interpretano come continui i sistemi a segnali campionati, è quello del ritardo introdotto dal campionamento. A livello intuitivo, e per fissare le idee nel modo più semplice possibile, supponiamo che l'unico effetto del regolatore di figura 16.1.1 sia¹ quello di rilevare negli istanti $k\Delta$ la grandezza $y(k\Delta)$, $k \in \mathbb{Z}$ e di produrre in $[k\Delta, (k+1)\Delta)$ un segnale di valore costante $y(k\Delta)$.

L'effetto di approssimazione è illustrato in figura 16.1.2, in cui il segnale "a scala" appare mediamente come una versione ritardata di $\Delta/2$ rispetto al segnale y originario. Ne risulta quindi l'introduzione

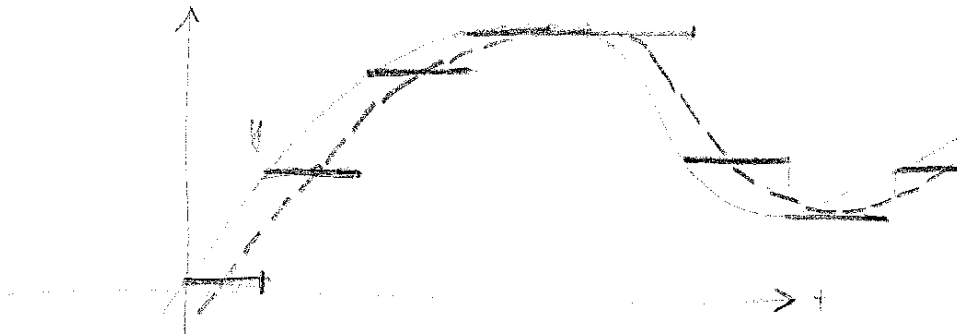


Figura 16.1.2

¹“sample and hold”

di un ritardo fra l'ingresso e l'uscita del regolatore pari a $\Delta/2$.

Il ritardo ha in generale un effetto destabilizzante, come si può vedere p.es. sul diagramma di Nyquist, nel quale il margine di fase subisce una riduzione.

La commistione di segnali di vario tipo può essere talvolta motivo di difficoltà nello studio dei sistemi controllati da un calcolatore. Nella maggior parte dei casi, è tuttavia possibile descrivere il comportamento del sistema facendo riferimento soltanto ai valori delle grandezze negli istanti di clock. Allora i segnali in gioco possono essere visti come successioni di valori, definite su un insieme temporale discreto, e sono disponibili modelli (lineari e non) per rappresentare gli algoritmi di elaborazione per tali successioni, spesso analoghi a quelli studiati nei capitoli precedenti per i segnali a tempo continuo.

Nella prima parte di questo capitolo ci occuperemo dello studio dei segnali a tempo discreto, prescindendo dalle connessioni fra tali segnali e quelli a tempo continuo che li determinano o ne sono determinati. Parimenti, trascureremo in prima battuta il funzionamento dei sistemi a tempo continuo sui quali si operi un controllo mediante (i segnali generati da) un calcolatore. Questi problemi saranno invece accennati nella seconda parte e saranno comunque approfonditi in corsi successivi.

16.2 Segnali a tempo discreto e loro rappresentazione

In molte applicazioni il segnale $u(\cdot)$ di un sistema assume interesse, o addirittura può essere definito e preso in considerazione, soltanto in specifici istanti, che costituiscono un sottoinsieme numerabile (in particolare, finito) dell'intero asse \mathbb{R} dei tempi. Si ottiene in tal modo un segnale "discreto", identificato dalla successione dei valori che $u(\cdot)$ assume in corrispondenza alla particolare *successione di istanti* $t_k, k \in \mathbb{Z}$ in cui si intende considerarlo.

Si osservi che, in quest'ottica, il segnale discreto deriva da uno continuo, che viene "campionato" in particolari istanti t_k , e la sua definizione in termini di successione su \mathbb{Z} si basa su due mappe: la prima, di *selezione* degli istanti di campionamento

$$\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} : k \mapsto t_k$$

e la seconda, di *campionamento* vero e proprio

$$\{t_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{R} : t_k \mapsto u(t_k)$$

operato sul segnale a tempo continuo $u(\cdot)$.

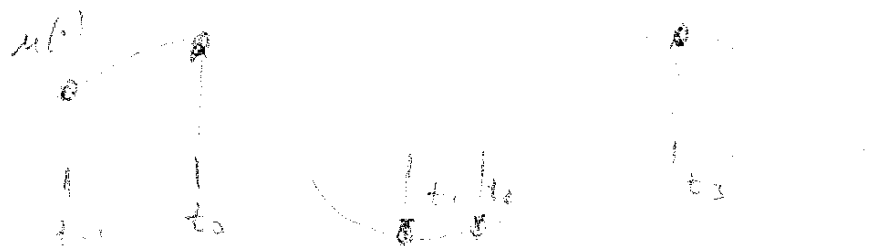


Figura 16.2.1

Ovviamente, la composizione delle due operazioni dà un segnale definito sugli interi $v : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} : k \mapsto v(k) := u(t_k)$.

In qualche caso, ipotizzare che abbia significato operativo, a monte della successione $\{t_k\}$, un tempo “continuo” t e supporre che, per ogni $t \in \mathbb{R}$, convenga (o almeno si possa) considerare la grandezza $u(t)$, risulta alquanto artificioso. Basti pensare, ad esempio, ai alcuni modelli di crescita di popolazioni biologiche, o per la gestione di magazzini, nei quali le grandezze in gioco sono identificabili soltanto nei particolari istanti in cui sono “censite” (o, quanto meno, “censibili”). Spesso, tuttavia, i segnali (16.1) derivano effettivamente da un’operazione di campionamento, e negli ultimi paragrafi del capitolo analizzeremo quali relazioni intercorrono fra un segnale a tempo continuo e le (infinite) successioni che si possono ricavare dal suo campionamento.

Per ora, concentriamo l’attenzione sui segnali definiti sull’asse \mathbb{Z} e a valori reali, prescindendo da loro ogni interpretazione connessa con l’eventuale campionamento di segnali a tempo continuo.

Definizione 16.2.1 *Un segnale a tempo discreto è una mappa*

$$v : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto v(t), \quad (16.1)$$

che associa ad ogni valore intero t il numero reale $v(t)$. In altri termini, è una successione

$$\{v(t)\}_{t \in \mathbb{Z}} \quad (16.2)$$

La notazione (16.1), analoga a quella impiegata per i segnali a tempo continuo, e la (16.2) saranno utilizzate indifferentemente.

Per motivi che risulteranno chiariti nella discussione successiva, è spesso conveniente associare ad un segnale a tempo discreto $v(\cdot)$ una *serie formale bilatera*, definita da

$$V(z) = \sum_{t=-\infty}^{+\infty} v(t)z^{-t} \quad (16.3)$$

Si noti che, in questo contesto, z va interpretata come una indeterminata, e non come una variabile (reale o complessa) e che alla scrittura (16.3) non va attribuito nessun significato di somma, nel senso abituale della convergenza di una serie di potenze. Il simbolo z^{-t} è un puro “marcatempo”: se $v(t) = \alpha$, nella serie figura il monomio αz^{-t} , a indicare che il valore α è assunto dalla funzione $v(\cdot)$ nell’istante intero t . In altre parole, la (16.3) può essere vista come una scrittura alternativa² per denotare la funzione $v(\cdot)$ o la successione $\{v(t)\}_{t \in \mathbb{Z}}$, introdotte in (16.1) e (16.2).

L’insieme delle successioni bilatere a valori in \mathbb{R} sarà denotato con $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ e quello delle serie formali bilatere con \mathbb{R}^{bil} . È chiaro che le successioni bilatere formano uno spazio vettoriale rispetto agli usuali somma e prodotto per uno scalare, e lo stesso vale per \mathbb{R}^{bil} , rispetto alla usuale somma per serie e al prodotto usuale di una serie per una costante. La corrispondenza $\{v(t)\}_{t \in \mathbb{Z}} \mapsto V(z) = \sum_t v(t)z^{-t}$ “conserva i risultati delle operazioni” e pertanto $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ e \mathbb{R}^{bil} sono isomorfi.

²Il cambiamento di segno nell’esponente (ovvero il ricorso a z^{-t} per indicare l’istante t) è dovuto a ragioni storiche e non a motivazioni sostanziali

Esempio 16.2.1 Sia $v(t) = t, \forall t \in \mathbb{Z}$ e $w(t) = 5, \forall t \in \mathbb{Z}$. Allora

$$(v + w)(t) = t + 5, \quad (\alpha v)(t) = \alpha t, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{Z}.$$

Le serie corrispondenti a $v(\cdot)$ e $w(\cdot)$ sono rispettivamente

$$V(z) = \sum_{t=-\infty}^{+\infty} t z^{-t}, \quad W(z) = \sum_{t=-\infty}^{+\infty} 5 z^{-t}$$

La loro somma è la serie $V(z) + W(z) = \sum_{t=-\infty}^{+\infty} (t + 5) z^{-t}$, mentre il prodotto di $V(z)$ per α è $\alpha V(z) = \sum_{t=-\infty}^{+\infty} (\alpha t) z^{-t}$.

Le successioni compatte a sinistra rappresentano un tipo particolare, ma molto importante, di segnali a tempo discreto. Si tratta delle successioni $v(\cdot)$ per ciascuna delle quali esiste un intero T (dipendente dalla successione) tale che $v(t) = 0, \forall t < T$. Il loro insieme sarà denotato con $\mathbb{R}_{\mathbb{Z}}^{\mathbb{Z}}$. Le serie formali corrispondenti alle successioni compatte a sinistra sono dotate di un numero finito (eventualmente nullo) di potenze positive, sono chiamate “serie (formali) di Laurent” e il loro insieme si indica con $\mathbb{R}((z^{-1}))$.

Lo spazio delle successioni nulle per valori negativi di t sarà denotato con $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, e ad esso corrisponde lo spazio delle serie formali $\mathbb{R}[[z^{-1}]]$ nelle potenze non positive di z .

Come per i segnali a tempo continuo, anche per quelli a tempo discreto si definiscono operazioni di troncamento, di concatenamento e di shift. Ci soffermeremo brevemente sullo shift, per sottolineare alcuni aspetti relativi alla sua rappresentazione.

L'operatore di shift (di un passo) σ si definisce, per ciascun segnale discreto $v(\cdot)$, ponendo

$$(\sigma v)(t) = v(t + 1), \quad \forall t \in \mathbb{Z}$$

Se k è un intero arbitrario, si pone poi

$$(\sigma^k v)(t) = v(t + k), \quad \forall t \in \mathbb{Z}.$$

Se al segnale $v(\cdot)$ corrisponde la serie formale $V(z) = \sum_t v(t) z^{-t}$, al segnale $(\sigma^k v)(t)$ corrisponde la serie

$$\sum_{t=-\infty}^{+\infty} v(t + k) z^{-t} = \sum_{t=-\infty}^{+\infty} v(t) z^{-t+k} = z^k V(z)$$

Più in generale, si possono definire operatori polinomiali³ nello shift, ponendo

$$\left(\left(\sum_{i=n}^N a_i \sigma^i \right) v \right) (t) = \sum_{i=n}^N a_i (\sigma^i v)(t) = \sum_{i=n}^N a_i v(t + i)$$

Se $V(z)$ è la serie corrispondente al segnale v , la serie corrispondente al segnale $(\sum_i a_i \sigma^i) v$ è $(\sum_{i=n}^N a_i z^i) V(z)$, ovvero la serie prodotto del polinomio $\sum_{i=n}^N a_i z^i$ per $V(z)$.

³i polinomi possono essere, nel caso generale, “polinomi di Laurent”, comprendenti cioè potenze sia positive che negative dell'indeterminata

Se $p_1(\sigma) = \sum_i a_i \sigma^i$ e $p_2(\sigma) = \sum_j b_j \sigma^j$ sono due operatori polinomiali nello shift e $p_1(z)$, $p_2(z)$ i corrispondenti polinomi nell'indeterminata z , l'applicazione successiva alla successione $v(\cdot)$ dei due operatori

$$p_2(\sigma) \left(p_1(\sigma)v \right)$$

dà luogo a una successione alla quale corrisponde la serie formale

$$p_2(z) \left(p_1(z)V(z) \right) = (p_2(z)p_1(z))V(z)$$

La composizione di due operatori polinomiali di shift è ancora un operatore polinomiale, prodotto formale dei due polinomi $p_2(\sigma)p_1(\sigma)$.

16.3 Convoluzione

Sia $\mathbb{R}_R^{\mathbb{Z}}$ lo spazio delle successioni a supporto compatto a sinistra. Per ogni coppia di segnali $v, w \in \mathbb{R}_R^{\mathbb{Z}}$ è definita la successione di convoluzione $v \star w$ ponendo

$$(v \star w)(t) = \sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} v(t-\tau)w(\tau), \quad \forall t \in \mathbb{Z} \quad (16.4)$$

È immediato verificare che la sommatoria in (16.4) è ben definita per ogni $t \in \mathbb{Z}$, dato che essa coinvolge comunque un numero finito di addendi non nulli, a causa dell'ipotesi sul supporto di v e w . Essa può inoltre essere riscritta nelle forme equivalenti

$$(v \star w)(t) = \sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} v(\tau)w(t-\tau) = \sum_{\substack{i,j \\ i+j=t}} v(i)w(j) \quad (16.5)$$

Osservazione Come per i segnali a tempo continuo, l'operazione di convoluzione può non essere definita se i segnali v e w non soddisfano le ipotesi sul supporto. Ad esempio, è chiaro che, se si assume $v(t) = w(t) = 1, \forall t \in \mathbb{Z}$, la (16.4) non è applicabile. Se non si impongono vincoli sul supporto dei segnali, la convoluzione può essere definita introducendo, in alternativa, opportune condizioni sui valori dei segnali, che consentano di attribuire un significato, in termini di limite, alla somma (16.4). Su questo aspetto ritorneremo nel seguito.

Se $V(z) = \sum_t v(t)z^{-t}$ e $W(z) = \sum_t w(t)z^{-t}$ sono le serie di Laurent corrispondenti ai segnali v e w , la serie corrispondente a $v \star w$ è

$$\begin{aligned} \sum_t (v \star w)(t)z^{-t} &= \sum_t \left(\sum_{\substack{i,j \\ i+j=t}} v(i)w(j) \right) z^{-t} = \sum_t \sum_{\substack{i,j \\ i+j=t}} v(i)z^{-i}w(j)z^{-j} \\ &= \left(\sum_i v(i)z^{-i} \right) \left(\sum_j w(j)z^{-j} \right) \end{aligned} \quad (16.6)$$

ossia il prodotto alla Cauchy delle due serie $V(z)$ e $W(z)$. È questo il motivo che giustifica la rappresentazione seriale dei segnali a tempo discreto: come per la trasformata di Laplace nel caso continuo, alla convoluzione nel dominio del tempo corrisponde nel caso discreto il prodotto delle serie rappresentative.

Proposizione 16.3.1 *Il prodotto di convoluzione in $\mathbb{R}_R^{\mathbb{Z}}$ è dotato di identità. Il δ di Kronecker, ossia la successione*

$$\kappa(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t = 0, \\ 0 & \text{se } t \neq 0 \end{cases} \quad (16.7)$$

soddisfa $v \star \delta = v$, per ogni successione $v \in \mathbb{R}_R^{\mathbb{Z}}$.

Un risultato importante, che non ha l'analogo nel caso dei sistemi continui è l'esistenza dell'inversa convoluzionale di ogni successione $v \neq 0$ appartenente a $\mathbb{R}_R^{\mathbb{Z}}$.

Proposizione 16.3.2 *Per ogni $v \in \mathbb{R}_R^{\mathbb{Z}}$, $v \neq 0$, esiste $w \in \mathbb{R}_R^{\mathbb{Z}}$ tale per cui*

$$v \star w = \kappa. \quad (16.8)$$

PROVA Si può procedere in due passi. Si dimostra dapprima che ogni successione v con supporto in \mathbb{N} e con $v(0) \neq 0$ ammette un'inversa convoluzionale w con supporto in \mathbb{N} . A tale scopo, se $w(0), w(1), w(2), \dots$ sono i valori incogniti di w , osserviamo che per la (16.4) devono soddisfare le equazioni

$$\begin{aligned} v(0)w(0) &= 1 \\ v(0)w(1) + v(1)w(0) &= 0 \\ v(0)w(2) + v(1)w(1) + v(2)w(0) &= 0 \\ &\dots \quad \dots \end{aligned} \quad (16.9)$$

Poiché $v(0) \neq 0$, la prima equazione è risolubile e fornisce un unico valore per $w(0)$, quindi è risolubile in modo unico la seconda, che fornisce $w(1)$, quindi la terza, che fornisce $w(2)$, etc. Si perviene così a determinare in modo unico la successione che soddisfa la (16.8). Se v ha $v(k)$ come primo termine non nullo, con $k \neq 0$, si considera la successione $\tilde{v} := \sigma^k v$, che soddisfa le condizioni del caso precedente. Esiste allora una successione \tilde{w} , con supporto in \mathbb{N} , per cui risulta

$$\kappa = \tilde{v} \star \tilde{w} = (\sigma^k v) \star \tilde{w} = v \star (\sigma^k w) \quad (16.10)$$

(si verifichi l'ultima uguaglianza). Quindi $\sigma^k w$ è l'inversa convoluzionale di v . ■

Conseguenza immediata della proposizione precedente è il

Corollario 16.3.3 *Ogni serie non nulla in $\mathbb{R}((z^{-1}))$ ammette una serie inversa*

PROVA Se $V(z) = \sum_t v(t)z^{-t} \neq 0$ e se w è l'inversa convoluzionale di v , ovvero se $v \star w = \kappa$, allora, posto $W(z) = \sum_t w(t)z^{-t}$, si ha $V(z)W(z) = 1$ ■

- **ESERCIZIO 16.3.1** Si determini l'inversa convoluzionale del gradino discreto

$$v(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ 1 & \text{per } t \geq 0 \end{cases}$$

‡ *Soluzione: deve essere*

$$\begin{aligned} 1 &= w(0) \\ 0 &= w(1) + w(0) && \Rightarrow w(1) = -1 \\ 0 &= w(2) + w(1) + w(0) && \Rightarrow w(2) = 0 \\ 0 &= w(3) + w(2) + w(1) + w(0) && \Rightarrow w(3) = 0 \\ &\dots \end{aligned}$$

ed un facile ragionamento induttivo prova che $w(t) = 0, \forall t \geq 2$.

In termini di serie formali, la serie $V(z) = \sum_{t=0}^{+\infty} z^{-t}$ ha come inversa la serie (finita) $W(z) = 1 - z^{-1}$.

- **ESERCIZIO 16.3.2** Sia $V(z) = 1 - \sum_{t=1}^{+\infty} v(t)z^{-t} = 1 - V_S(z)$. La serie inversa di $V(z)$ è data da

$$W(z) = 1 + V_S(z) + V_S(z)^2 + V_S(z)^3 + \dots \quad (16.11)$$

‡ *Soluzione. Si noti anzitutto che la scrittura (16.11) ha significato, pur coinvolgendo la somma di infinite serie. Infatti, per ogni $n \in \mathbb{N}$ il coefficiente di z^{-n} è nullo in tutti gli addendi $V_S(z)^k$ se $k > n$, quindi la sua determinazione si effettua in termini finiti, coinvolgendo un numero finito di operazioni.*

D'altra parte risulta

$$[1 - V_S(z)][1 + V_S(z) + V_S(z)^2 + \dots] = [1 + V_S(z) + V_S(z)^2 + \dots] - [V_S(z) + V_S(z)^2 + V_S(z)^3 + \dots] = 1$$

La (16.11) estende alle serie formali la formula della somma di una serie geometrica

$$\frac{1}{1 - V_S(z)} = \sum_{i=0}^{+\infty} V_S(z)^i$$

- **ESERCIZIO 16.3.3** Si determini l'inversa convoluzionale della successione a supporto finito

$$v(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ 1 & \text{per } t = 0 \\ c_t & \text{per } 0 < t \leq n \\ 0 & \text{per } t > n \end{cases}$$

‡ *Soluzione. Si ponga*

$$\begin{aligned} V(z) &= 1 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \dots + c_n z^{-n} \\ V_S(z) &= -c_1 z^{-1} - c_2 z^{-2} - \dots - c_n z^{-n} \end{aligned}$$

Allora $W(z) = 1 + V_S(z) + V_S(z)^2 + \dots$ è la serie inversa di $V(z)$ e i suoi coefficienti sono quelli della successione che rappresenta l'inversa convoluzionale di v .

Definizione 16.3.4 *La serie $V(z) \in \mathbb{R}((z^{-1}))$ si dice razionale se esistono due polinomi $p(z^{-1})$ e $q(z^{-1})$ in $\mathbb{R}[z^{-1}]$, con $p(z^{-1}) \neq 0$, per i quali vale l'uguaglianza*

$$p(z^{-1})V(z) = q(z^{-1}) \quad (16.12)$$

o anche, com'è d'uso scrivere, $V(z) = q(z^{-1})/p(z^{-1})$.

Moltiplicando entrambi i membri di (16.12) per un potenza positiva di z di grado abbastanza elevato

$$[p(z^{-1})z^N]V(z) = [q(z^{-1})z^N]$$

si perviene a una relazione equivalente alla (16.12), del tipo

$$\tilde{p}(z)V(z) = \tilde{q}(z), \quad \tilde{p}(z), \tilde{q}(z) \in \mathbb{R}[z] \quad (16.13)$$

e alla rappresentazione

$$V(z) = \tilde{q}(z) \tilde{p}(z)^{-1} = \tilde{q}(z)/\tilde{p}(z) \quad (16.14)$$

Quindi una serie razionale può essere vista indifferentemente come rapporto di due polinomi in $\mathbb{R}[z^{-1}]$ o di due polinomi in $\mathbb{R}[z]$ o, più coerentemente, come il prodotto di un polinomio in $\mathbb{R}[z^{-1}]$ o in $\mathbb{R}[z]$ per la serie inversa di un polinomio non nullo in $\mathbb{R}[z^{-1}]$ o in $\mathbb{R}[z]$.

L'insieme delle serie razionali sarà indicato con $\mathbb{R}(z^{-1})$. Esso è un sottocampo del campo delle serie di Laurent $\mathbb{R}((z^{-1}))$.

Osservazione Se in (16.12) i polinomi $p(z^{-1})$ e $q(z^{-1})$ hanno massimo comun divisore $d(z^{-1})$ e poniamo

$$p(z^{-1}) = d(z^{-1})\bar{p}(z^{-1}), \quad q(z^{-1}) = d(z^{-1})\bar{q}(z^{-1}),$$

allora insieme alla (16.12) vale anche

$$\bar{p}(z^{-1})V(z) = \bar{q}(z^{-1}) \quad (16.15)$$

e la totalità delle rappresentazioni di $V(z)$ come rapporto di polinomi in $\mathbb{R}[z^{-1}]$ è data allora da

$$V(z) = \frac{\bar{p}(z^{-1})c(z^{-1})}{\bar{q}(z^{-1})c(z^{-1})} \quad (16.16)$$

al variare di $c(z^{-1})$ in $\mathbb{R}[z^{-1}] \setminus \{0\}$. La rappresentazione $V(z) = \bar{p}(z^{-1})/\bar{q}(z^{-1})$, nella quale denominatore e denominatore sono coprimi, si dice irriducibile.

Analogo discorso può farsi per la rappresentazione (16.14) delle serie razionali come rapporto di polinomi in $\mathbb{R}[z]$.

Per le serie razionali è particolarmente interessante caratterizzarne l'appartenenza a $\mathbb{R}[[z^{-1}]]$ (serie "causali", o "proprie") tramite una proprietà dei polinomi che ne rappresentano il numeratore e il denominatore. è questo il contenuto della seguente

Proposizione 16.3.5 *Sia $V(z) \in \mathbb{R}(z^{-1})$ una serie razionale. Sono fatti equivalenti*

- i) $V(z) \in \mathbb{R}[[z^{-1}]]$;
- ii) nella rappresentazione irriducibile (16.15) $V(z) = \bar{p}(z^{-1})/\bar{q}(z^{-1})$ il polinomio $\bar{p}(z^{-1})$ ha il termine costante diverso da zero;
- iii) nella (16.13) si ha $\deg \tilde{p}(z) \geq \deg \tilde{q}(z)$.

PROVA (i) \Rightarrow (ii) Supponiamo che $\bar{p}(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^{-i}$ abbia il termine costante a_0 uguale a zero. Allora non può essere $b_0 = 0$ in $\bar{q}(z^{-1}) = \sum_{i=0}^m b_i z^{-i}$, altrimenti \bar{p} e \bar{q} non sarebbero coprimi. D'altra parte, dall'ipotesi (i) e da (16.15) segue la relazione

$$\bar{p}(z^{-1})V(z) = \sum_{i=1}^n a_i z^{-i} \sum_{j=0}^{+\infty} v(t) z^{-t} = \sum_{i=0}^m b_i z^{-i} = \bar{q}(z^{-1}),$$

evidentemente contraddittoria perché il prodotto $\sum_{i=1}^n a_i z^{-i} \sum_{j=0}^{+\infty} v(t) z^{-t}$ ha il termine costante nullo, mentre b_0 è diverso da zero.

(ii) \Rightarrow (iii) Da

$$\sum_{i=0}^n a_i z^{-i} V(z) = \sum_{i=0}^m b_i z^{-i} \text{ con } a_0 \neq 0,$$

moltiplicando entrambi i membri per z^N , $N = \max\{n, m\}$, si ottiene

$$(a_0 z^N + a_1 z^{N-1} + \dots + a_n z^{N-n}) V(z) = (b_0 z^N + b_1 z^{N-1} + \dots + b_m z^{N-m})$$

e la (16.13) vale con $\tilde{p}(z) = a_0 z^N + a_1 z^{N-1} + \dots + a_n z^{N-n} \in \mathbb{R}[z]$ di grado N e con $\tilde{q}(z) = b_0 z^N + b_1 z^{N-1} + \dots + b_m z^{N-m} \in \mathbb{R}[z]$ di grado al più N (b_0 può essere nullo!). Quindi $\deg \tilde{p} \geq \deg \tilde{q}$, e ciò vale per ogni altra coppia di polinomi in $\mathbb{R}[z]$ che rappresenti $V(z)$.

(iii) \Rightarrow (i) Se $\deg \tilde{p}(z) = n \geq \deg \tilde{q}(z) = m$ e se risulta

$$\tilde{p}(z)V(z) = \tilde{q}(z) \tag{16.17}$$

non è restrittivo supporre $\tilde{p}(z)$ monico e si può riscrivere (16.17) nella forma

$$[z^{-n} \tilde{p}(z)]V(z) = (1 + a_{n-1}z^{-1} + \dots + a_0 z^{-n})V(z) = [z^{-n} \tilde{q}(z)] \in \mathbb{R}[z^{-1}]$$

Poiché il polinomio $1 + a_{n-1}z^{-1} + \dots + a_0 z^{-n}$ ha per inversa una serie in $\mathbb{R}[[z^{-1}]]$ (si veda l'esercizio 16.3.3), si conclude che

$$V(z) = [z^{-n} \tilde{q}(z)][1 + a_{n-1}z^{-1} + \dots + a_0 z^{-n}]^{-1}$$

contiene soltanto potenze non positive e perciò appartiene a $\mathbb{R}[[z^{-1}]]$ ■

- **ESERCIZIO 16.3.4** $V(z) = \sum_{t=0}^{+\infty} z^{-t}$ è la serie corrispondente al gradino unitario discreto. Si verifichi che $V(z)$ è razionale.

‡ *Soluzione.* È chiaro che vale l'identità $1 = V(z) - z^{-1}V(z)$, ovvero $(1 - z^{-1})V(z) = 1$

Quindi $V(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}$ è una serie razionale propria.

16.4 Rappresentazione convoluzionale di mappe i/u

Sia $\mathcal{A} : \mathbb{R}_R^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ una mappa che associa ad ogni successione u con supporto compatto a sinistra una successione di uscita, e supponiamo che \mathcal{A} sia causale, invariante e lineare.

Poniamo

$$w := \mathcal{A}\kappa \tag{16.18}$$

e osserviamo che, per l'ipotesi di causalità, risulta $\mathcal{P}_0(\mathcal{A}\kappa) = \mathcal{P}_0(\mathcal{A}(\mathcal{P}_0\kappa)) = \mathcal{P}_0(\mathcal{A}0)$ e per l'ipotesi di linearità $\mathcal{P}_0(\mathcal{A}0) = 0$. Quindi w ha supporto in \mathbb{N} .

Inoltre, per l'invarianza risulta

$$\mathcal{A}(\sigma^\nu \kappa) = \sigma^\nu(\mathcal{A}\kappa) = \sigma^\nu w, \quad \forall \nu \in \mathbb{Z} \tag{16.19}$$

Supponiamo ora che u sia un ingresso generico con supporto compatto a sinistra.

Per determinare l'uscita $y := \mathcal{A}u$ che gli corrisponde all'istante t , si può considerare un istante arbitrario $T > t$ e porre

$$(\mathcal{A}u)(t) = \left(\mathcal{A}(\mathcal{P}_T u) \right)(t) \tag{16.20}$$

Poiché $\mathcal{P}_T u$ è la combinazione di un numero finito di impulsi di Kronecker traslati nel tempo

$$\mathcal{P}_T u = \sum_{\tau < T} u(\tau)(\sigma^{-\tau} \kappa) \quad (16.21)$$

da (16.18) e (16.19) segue

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}u)(t) &= \left(\mathcal{A} \sum_{\tau < T} u(\tau)(\sigma^{-\tau} \kappa) \right) (t) \\ &= \sum_{\tau < T} u(\tau)(\sigma^{-\tau} w)(t) && \text{per la linearità} \\ &= \sum_{\tau < T} u(\tau)w(t - \tau) = \sum_{\tau = -\infty}^{+\infty} u(\tau)w(t - \tau) \end{aligned} \quad (16.22)$$

dove l'ultima uguaglianza è dovuta al fatto che, se $\tau \geq T > t$, allora $w(t - \tau) = 0$. Abbiamo così provato la seguente

Proposizione 16.4.1 *La mappa ingresso/uscita $\mathcal{A} : \mathbb{R}_R^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ di un arbitrario sistema discreto lineare, causale, invariante è rappresentato da una mappa di convoluzione, avente per nucleo la risposta $w = \mathcal{A}\kappa$ del sistema all'impulso di Kronecker:*

$$\mathcal{A}u = w \star u, \quad \forall u \in \mathbb{R}_R^{\mathbb{Z}} \quad (16.23)$$

Se $W(z) = \sum_{t=0}^{+\infty} w(t)z^{-t}$ è la serie formale corrispondente al nucleo di convoluzione w , la mappa ingresso/uscita è esprimibile nella forma

$$Y(z) = W(z)U(z), \quad \forall U(z) \in \mathbb{R}((z^{-1})), \quad (16.24)$$

dove $U(z)$ e $Y(z)$ sono le serie formali corrispondenti ai segnali u e y di ingresso e di uscita del sistema e $W(z)$ si dice la “funzione di trasferimento” del sistema. ■

È chiaro che, viceversa, ogni successione w con supporto in \mathbb{N} (ovvero ogni serie formale $W(z) \in \mathbb{R}[[z^{-1}]]$) induce una mappa ingresso/uscita causale, lineare, invariante tramite la (16.23) (o la (16.24)).

Come nel caso continuo, le mappe i/u a tempo discreto possono avere proprietà particolarmente interessanti quando si impongano al nucleo o alle successioni di ingresso vincoli strutturali opportuni.

Definizione 16.4.2 *Per ogni numero reale p , $1 \leq p, \infty$, ℓ^p denota l'insieme delle successioni $\{v(t)\}_{t \in \mathbb{Z}}$ tali che $\sum_t |v(t)|^p < \infty$. Per ogni $v \in \ell^p$ si pone*

$$\|v\|_p := \left[\sum_t |v(t)|^p \right]^{\frac{1}{p}} \quad (16.25)$$

Con ℓ^∞ si denota l'insieme delle successioni $\{v(t)\}_{t \in \mathbb{Z}}$ tali che $\sup_{t \in \mathbb{Z}} |v(t)| < \infty$. Se $v \in \ell^\infty$, si pone

$$\|v\|_\infty := \sup_{t \in \mathbb{Z}} |v(t)| \quad (16.26)$$

Si possono dimostrare le seguenti “classiche” proprietà (si veda, p.es., [Du]):

i) se $1 \leq p \leq \infty$ e $p^{-1} + q^{-1} = 1$, per ogni $v \in \ell^p$ e ogni $w \in \ell^q$ si ha

$$\{z(t)\}_{t \in \mathbb{Z}} := \{v(t)w(t)\}_{t \in \mathbb{Z}} \in \ell^1 \quad (16.27)$$

e risulta

$$\|z\|_1 = \sum_t |v(t)w(t)| \leq \|v\|_p \|w\|_q \quad [\text{diseguaglianza di Hölder}] \quad (16.28)$$

ii) se $1 \leq p \leq \infty$, $v \in \ell^p$ e $w \in \ell^p$ allora $v + w \in \ell^p$ e risulta

$$\|v + w\|_p \leq \|v\|_p + \|w\|_p \quad [\text{diseguaglianza di Minkowski}] \quad (16.29)$$

ii) per ogni p con $1 \leq p \leq \infty$, ℓ^p è uno spazio normato da (16.25) e (16.26) e completo per la metrica definita dalla norma.

- ESERCIZIO 16.4.1 Se $1 \leq p \leq q \leq \infty$ allora $\ell^p \subseteq \ell^q$.

Proposizione 16.4.2 Se $w, u \in \ell^1$, allora $y := w \star u$ è definito, appartiene a ℓ^1 e si ha

$$\|y\|_1 \leq \|w\|_1 \|u\|_1 \quad (16.30)$$

PROVA Per ogni t risulta

$$|y(t)| = \left| \sum_{\tau} w(t - \tau)u(\tau) \right| \leq \sum_{\tau} |w(t - \tau)| |u(\tau)| \quad (16.31)$$

e poiché i valori di $|u(\tau)|$ sono confinati superiormente da una costante M (si veda l'esercizio 16.4.1) da (16.31) segue $|y(t)| \leq \|w\|_1 M$, ossia $y(t)$ esiste finito per ogni t .

Abbiamo poi

$$\|y\|_1 = \sum_t |y(t)| \leq \sum_t \left(\sum_{\tau} |w(t - \tau)| |u(\tau)| \right) \quad (16.32)$$

L'ultima sommatoria in (16.32) converge, perché converge la sommatoria

$$\sum_{\tau} |u(\tau)| \sum_t |w(t - \tau)| = \|u\|_1 \|w\|_1$$

e ne assume il medesimo valore⁴ Quindi $y \in \ell^1$ e vale la (16.30). ■

- ESERCIZIO 16.4.2 Se $w \in \ell^1$ e $u \in \ell^p$, $p \geq 1$, allora esiste $y := w \star u$, è in ℓ^p e si ha $\|y\|_p \leq \|w\|_1 \|u\|_p$.

‡Suggerimento: si veda la prova dell'analogo continuo nel cap.3.

⁴Teorema di Fubini-Tonelli nel caso discreto: se $f(\tau, t)$ è una successione a due indici, allora $\sum_{\tau, t} f(\tau, t) = \sum_{\tau} (\sum_t f(\tau, t)) = \sum_t (\sum_{\tau} f(\tau, t))$, purché f sia sommabile in uno qualsiasi dei tre sensi (si veda [DM]).

Proposizione 16.4.3 Se $w, u \in \ell^2$, allora $y := w \star u$ esiste, è un elemento di ℓ^∞ e si ha

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0.$$

PROVA Dalla diseguaglianza di Schwartz negli spazi a prodotto interno si ottiene

$$|y(t)| = \left| \sum_{\tau} w(t - \tau)u(\tau) \right| \leq \|w\|_2 \|u\|_2 \quad \forall$$

Quindi $|y(t)|$ è per ogni t confinato superiormente da $\|w\|_2 \|u\|_2$.

Fissato un arbitrario $\epsilon > 0$, si scelgano $N \in \mathbb{Z}$ tale da avere

$$\|\mathcal{F}_N u\|_2 = \left[\sum_{\tau=N}^{\infty} u^2(\tau) \right]^{\frac{1}{2}} < \epsilon$$

e $t > N$ abbastanza grande da avere

$$\|\mathcal{P}_N w(t - \cdot)\|_2 = \left[\sum_{\tau=-\infty}^N |w^2(t - \tau)| \right]^{\frac{1}{2}} < \epsilon$$

Allora

$$|y(t)| \leq \left| \sum_{-\infty}^{N-1} w(t - \tau)u(\tau) \right| + \left| \sum_N^{+\infty} w(t - \tau)u(\tau) \right| \leq \epsilon \|u\|_2 + \epsilon \|w\|_2$$

Quindi risulta $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0$.

Si procede in modo analogo alla verifica per $t \rightarrow -\infty$ nel caso in cui w e u abbiano supporto non compatto a sinistra. ■

La definizione di stabilità BIBO di una mappa i/u lineare, causale e invariante a tempo discreto

$$\mathcal{A} : \mathbb{R}_R^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} : u \mapsto w \star u \quad (16.34)$$

è analoga a quella del caso continuo.

Definizione 16.4.4 Il sistema lineare in forma ingresso uscita (16.34) è BIBO stabile se ad ogni ingresso limitato $u \in \ell_R^\infty$ corrisponde un'uscita limitata $y = \mathcal{A}u = w \star u \in \ell_R^\infty$.

Teorema 16.4.4 Sia $w \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{Z}}$ la risposta impulsiva di un sistema causale, lineare e invariante a tempo discreto.

Condizione necessaria e sufficiente perché il sistema sia BIBO stabile è che w appartenga a ℓ^1 , ossia che la successione $\{w(t)\}_{t \in \mathbb{N}}$ soddisfi la condizione di sommabilità

$$\sum_{t \geq 0} |w(t)| < \infty \quad (16.35)$$

Se $w \in \ell^1$, per ogni $u \in \ell_R^\infty$ la norma ℓ^∞ dell'uscita è limitata da

$$\|y\|_\infty \leq \|w\|_1 \|u\|_\infty \quad (16.36)$$

La prova può essere condotta sulla traccia di quella per i sistemi continui esposta nel paragrafo 9.1 ed è lasciata in esercizio.

- ESERCIZIO 16.4.3 Il sistema con risposta impulsiva

$$w(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t \leq 0 \\ (-1)^t/t & \text{per } t > 0 \end{cases}$$

non è BIBO stabile. Si determini un ingresso limitato u cui corrisponde un'uscita non limitata.

16.5 Generalità sulle equazioni lineari alle differenze

Nello studio dei sistemi lineari invarianti a tempo discreto le equazioni alle differenze svolgono un ruolo analogo a quello delle equazioni differenziali per i sistemi a tempo continuo. Molti processi in campo ingegneristico, economico, biologico, etc. possono essere modellati, almeno in prima approssimazione, mediante un'equazione lineare alle differenze che esprime il legame fra la successione dei dati di ingresso e quella dei dati di uscita.

Consideriamo l'equazione alle differenze all'indietro

$$\sum_{i=0}^n a_i y(t-i) = \sum_{i=0}^m b_i u(t-i) \quad (16.37)$$

nella successione incognita $\{y(t)\}$. La successione $\{u(t)\}$ si suppone nota, equindi per ogni t è noto il valore del secondo membro della (16.37). Se si ha inoltre

$$\begin{aligned} a_0 = a_1 = \dots = a_{\nu-1} = 0, \quad a_\nu \neq 0 \\ a_N \neq 0, \quad a_{N+1} = a_{N+2} = \dots = a_n = 0 \end{aligned} \quad (16.38)$$

allora, assegnati arbitrariamente $N - \nu$ valori consecutivi di y

$$y(k+1), y(k+2), \dots, y(k+N-\nu) \quad (16.39)$$

si può calcolare in modo unico la soluzione di (16.37) che soddisfa le “condizioni iniziali” (16.39). Pertanto, se uno almeno dei coefficienti a_i è non nullo, la (16.37) è risolvibile e l'insieme delle sue soluzioni (la “soluzione generale”) è parametrata da $N - \nu$ costanti arbitrarie.

Per ogni intero L , l'equazione (16.37) può essere riscritta nella forma equivalente

$$\sum_{i=0}^n a_i y(t+L-i) = \sum_{i=0}^m b_i u(t+L-i) \quad (16.40)$$

e, in particolare, scegliendo $L = \max\{n, m\}$ e introducendo eventuali coefficienti nulli, nella forma

$$\begin{aligned} a_L y(t) + a_1 y(t+1) + \dots + a_0 y(t+L) &= \sum_{j=0}^L a_{L-j} y(t+j) \\ &= b_L u(t) + b_1 u(t+1) + \dots + b_0 u(t+L) = \sum_{j=0}^L b_{L-j} u(t+j) \end{aligned}$$

di equazione alle differenze in avanti.

Affinché la (16.37) determini un legame causale fra l'ingresso u e l'uscita y , occorre che, una volta fissate le condizioni iniziali, l'uscita $y(t)$ non dipenda dall'ingresso futuro $\mathcal{F}_{t+1}u$. Se valgono le (16.38), ciò succede se e solo se i coefficienti $b_0, b_1, \dots, b_{\nu-1}$ sono anch'essi nulli. Allora, scegliendo $L = -\nu$ in (16.42) e ponendo $\bar{a}_i = a_{i-\nu}$, $\bar{b}_i = b_{i-\nu}$ da (16.37) si ottiene

$$\bar{a}_0 y(0) + \bar{a}_1 y(t-1) + \dots + \bar{a}_{n-\nu} y(t-n+\nu) = \bar{b}_0 u(0) + \bar{b}_1 u(t-1) + \dots + \bar{b}_{m-\nu} u(t-m+\nu), \quad \bar{a}_0 \neq 0 \quad (16.41)$$

Possiamo concludere che, se l'equazione alle differenze all'indietro (16.37) realizza un legame ingresso/uscita causale, non è restrittivo supporre $a_0 \neq 0$ e, viceversa, se $a_0 \neq 0$, allora (16.37) realizza un legame causale.

È anche immediato che un'equazione alle differenze in avanti

$$\tilde{a}_0 y(t) + \tilde{a}_1 y(t+1) + \dots + \tilde{a}_n y(t+n) = \tilde{b}_0 u(t) + \tilde{b}_1 u(t+1) + \dots + \tilde{b}_m u(t+m), \quad \tilde{a}_n \tilde{b}_m \neq 0 \quad (16.42)$$

determina un legame causale se e solo se $n \geq m$.

Convieni spesso scrivere le equazioni alle differenze in modo compatto ricorrendo agli operatori polinomiali nello shift.

L'equazione all'indietro (16.37) si può riscrivere nella forma

$$(p(\sigma^{-1})y)(t) = (q(\sigma^{-1})u)(t) \quad (16.43)$$

con $p(\sigma^{-1}) = \sum_{i=0}^n a_i \sigma^{-i}$, $q(\sigma^{-1}) = \sum_{i=0}^m b_i \sigma^{-i}$.

La condizione di causalità, per quanto detto sopra, si può sempre ricondurre ad avere $a_0 \neq 0$, ovvero a $p(0) \neq 0$.

L'equazione in avanti (16.42) si riscrive nella forma

$$(\tilde{p}(\sigma)y)(t) = (\tilde{q}(\sigma)u)(t) \quad (16.44)$$

con $\tilde{p}(\sigma) = \sum_{i=0}^n \tilde{a}_i \sigma^i$, $\tilde{q}(\sigma) = \sum_{i=0}^m \tilde{b}_i \sigma^i$, e la causalità equivale a $\text{deg } \tilde{p} \geq \text{deg } \tilde{q}$.

Osservazione Le equazioni lineari alle differenze presentano notevoli analogie con le equazioni differenziali lineari studiate nel capitolo 4. In particolare, la soluzione generale è somma di una soluzione particolare dell'equazione non omogenea e della soluzione generale dell'equazione omogenea associata

$$\tilde{p}(\sigma)y = 0 = p(\sigma^{-1})y.$$

Inoltre, la soluzione si determina univocamente quando di siano fissate le condizioni iniziali (16.39). Alcune difformità fra i due ambiti vanno tuttavia tenute presenti.

- l'ordine dell'equazione alle differenze non è sempre connesso al grado del polinomio $p(\sigma)$ (o $\tilde{p}(\sigma^{-1})$), dato che l'equazione rimane invariata moltiplicando i polinomi p e q per una potenza di σ .

Del resto, come si è visto, le condizioni iniziali da assegnare (16.39) sono in numero di $N - \nu$, e tale numero non cambia se si passa da $p(\sigma^{-1})$ a $\sigma^k p(\sigma^{-1})$. Nel caso

di un'equazione differenziale, invece, sostituire a $p(D)$ l'operatore $D^k p(D)$, $k > 0$ modifica la struttura dell'insieme delle soluzioni: l'ordine cresce e le condizioni iniziali da assegnare non sono più le stesse.

- Se nel primo membro dell'equazione (16.37) è diverso da zero un solo coefficiente $a_i = a_\nu$, l'equazione alle differenze si riduce a

$$a_\nu \sigma^{-\nu} y = q(\sigma^{-1})u,$$

ed ha un'unica soluzione.

16.6 Equazione omogenea alle differenze

Consideriamo l'equazione omogenea all'indietro

$$0 = (p(\sigma^{-1})y)(t) = a_n y(t) + a_{n-1} y(t-1) + \cdots + a_0 y(t-n) \quad (16.45)$$

con $a_0 \neq 0$ e $a_n \neq 0$, e la equivalente equazione in avanti

$$0 = (\sigma^n p(\sigma^{-1})y)(t) = (\tilde{p}(\sigma)y)(t) = a_n y(t+n) + a_{n-1} y(t+n-1) + \cdots + a_0 y(t) \quad (16.46)$$

e proponiamoci di studiare la struttura dell'insieme delle soluzioni.

Proposizione 16.6.1 *Le soluzioni di (16.46) $\tilde{p}(\sigma)y = 0$ formano uno spazio vettoriale $\mathcal{N}(\tilde{p}(\sigma))$ di dimensione n . Ogni soluzione, eccetto la soluzione nulla, è una successione il cui supporto è illimitato per tempi sia positivi che negativi*

PROVA È ovvio che le soluzioni formano uno spazio vettoriale. La mappa ψ che associa ad una soluzione y i valori che essa assume negli istanti $0, 1, \dots, n-1$

$$\psi : \mathcal{N}(\tilde{p}) \rightarrow \mathbb{R}^n : y \mapsto [y(0) \quad y(1) \quad \cdots \quad y(n-1)]^T$$

è lineare, suriettiva (infatti è possibile fissare arbitrariamente i valori di una successione d'uscita in n istanti consecutivi e completarla ad una soluzione dell'equazione omogenea) e iniettiva, perché i valori di una successione di uscita in n istanti consecutivi la determinano in modo univoco. Perciò $\mathcal{N}(\tilde{p})$ è isomorfo a \mathbb{R}^n . È anche chiaro che se una soluzione avesse un ultimo elemento diverso da zero, ovvero se fosse $y(t_0) \neq 0$ e $y(t) = 0$ per ogni $t > t_0$, si otterrebbe

$$(\tilde{p}(\sigma)y)(t_0) = a_n y(t_0+n) + a_{n-1} y(t_0+n-1) + \cdots + a_0 y(t_0) \neq 0$$

ovvero y non apparterebbe a \mathcal{N} . Ad una contraddizione analoga si perviene se si ipotizza che una soluzione y abbia un primo elemento non nullo. ■

Un sistema fondamentale di soluzioni è una n -upla $y_1(\cdot), y_2(\cdot), \dots, y_n(\cdot)$ di successioni linearmente indipendenti, ciascuna delle quali risolve l'equazione omogenea.

Corollario 16.6.2 Le successioni $y_1(\cdot), y_2(\cdot), \dots, y_n(\cdot)$ formano un sistema fondamentale di soluzioni per (16.46) se, per qualche t_0 , i vettori

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} y_1(t_0) \\ y_1(t_0 + 1) \\ \vdots \\ y_1(t_0 + n - 1) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} y_2(t_0) \\ y_2(t_0 + 1) \\ \vdots \\ y_2(t_0 + n - 1) \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad \mathbf{x}_n = \begin{bmatrix} y_n(t_0) \\ y_n(t_0 + 1) \\ \vdots \\ y_n(t_0 + n - 1) \end{bmatrix} \quad (16.47)$$

sono linearmente indipendenti.

PROVA Se i vettori (16.47) sono linearmente indipendenti, lo sono a maggior ragione le successioni $y_1(\cdot), y_2(\cdot), \dots, y_n(\cdot)$, di cui i vettori sono restrizione all'intervallo $[t_0, t_0 + n)$. Viceversa, se i vettori (16.47) sono dipendenti, ovvero se $\sum_i \alpha_i \mathbf{x}_i = \mathbf{0}$ con combinatori α_i non tutti nulli, si ha

$$\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i y_i \right)(t_0) = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i y_i \right)(t_0 + 1) = \dots = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i y_i \right)(t_0 + n - 1) = 0. \quad (16.48)$$

Ma allora la successione $\sum_{i=1}^n \alpha_i y_i$ è la successione nulla, come si vede imponendo che per essa valgano le (16.48) e che essa soddisfi l'equazione omogenea alle differenze (16.46) a sinistra di t_0 e a destra di $t_0 + n - 1$. ■

- **ESERCIZIO 16.6.1** Sia y_1, y_2, \dots, y_n un sistema fondamentale di soluzioni di (16.46) e sia $X = [\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2 \quad \dots \quad \mathbf{x}_n]$ la matrice invertibile ottenuta giustappoendo i vettori (16.47). Si verifichi che la soluzione \tilde{y} dell'equazione (16.46) che soddisfa una assegnata n -upla di condizioni iniziali

$$\mathbf{x} := \begin{bmatrix} \tilde{y}(t_0) \\ \tilde{y}(t_0 + 1) \\ \vdots \\ \tilde{y}(t_0 + n - 1) \end{bmatrix}$$

si ottiene combinando linearmente le successioni del sistema fondamentale nella forma $\tilde{y} = \sum_{i=1}^n \beta_i y_i$, dove i combinatori β_i si ottengono da

$$\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} = X^{-1} \mathbf{x}$$

Per quanto riguarda l'effettiva costruzione di un sistema fondamentale di soluzioni, si può procedere come nel caso dell'equazione differenziale:

1. si associa all'operatore alle differenze $\tilde{p}(\sigma) = \sum_{i=1}^n a_i \sigma^i$ il polinomio $\tilde{p}(z) = \sum_{i=1}^n a_i z^i$;
2. si fattorizza sul corpo reale il polinomio $\tilde{p}(z)$ nella forma

$$\tilde{p}(z) = \tilde{p}_1(z)^{\nu_1} \tilde{p}_2(z)^{\nu_2} \cdot \tilde{p}_k(z)^{\nu_k}$$

dove \tilde{p}_i sono polinomi di primo o di secondo grado a coefficienti reali, irriducibili in $\mathbb{R}[z]$ e primi fra loro;

3. si considerano i corrispondenti operatori alle differenze $\tilde{p}_i(\sigma)^{\nu_i}$ e, per ciascuna equazione

$$\tilde{p}_i(\sigma)^{\nu_i} y = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (16.49)$$

si ricerca un sistema fondamentale di soluzioni

$$\begin{cases} \{y_{i,1}, y_{i,2}, \dots, y_{i,\nu_i}\} & \text{se } \deg \tilde{p}_i = 1 \\ \{y_{i,1}, y_{i,2}, \dots, y_{i,2\nu_i}\} & \text{se } \deg \tilde{p}_i = 2 \end{cases} \quad (16.50)$$

4. si dimostra che i sistemi fondamentali (16.50) sono fra loro indipendenti.

Le combinazioni lineari delle successioni $y_{i,j}$ formano allora uno spazio vettoriale di dimensione n , pari al grado di \tilde{p} , e l'insieme $\{y_{i,j}\}$ costituito da tutte le successioni di (16.50) è un sistema fondamentale di soluzioni per l'equazione (16.46) $\tilde{p}(\sigma)y = 0$ e anche, ovviamente, per la (16.45).

Ci soffermiamo qui soltanto sul punto 3, costruendo i sistemi fondamentali di soluzioni per operatori del tipo $(\sigma - \alpha)^\nu$ e $(\sigma^2 + a\sigma + b)^\nu$. Le considerazioni e le eventuali dimostrazioni relative agli altri punti non sono concettualmente diverse da quelle svolte nel capitolo 4 per le equazioni differenziali e possono essere ripetute sulla traccia di quelle.

Proposizione 16.6.3 *Se $0 \neq \alpha \in \mathbb{R}$, il nucleo dell'operatore $(\sigma - \alpha)^\nu$, ovvero lo spazio delle soluzioni dell'equazione*

$$((\sigma - \alpha)^\nu y)(t) = 0$$

ha per base le successioni

$$\{\alpha^t\}_{t \in \mathbb{Z}}, \quad \left\{ \binom{t}{1} \alpha^t \right\}_{t \in \mathbb{Z}}, \quad \dots, \quad \left\{ \binom{t}{\nu-1} \alpha^t \right\}_{t \in \mathbb{Z}} \quad (16.51)$$

con

$$\begin{aligned} \binom{t}{j} &:= \frac{t(t-1)\cdots(t-j+1)}{j!}, & \forall t \in \mathbb{Z}, \quad \forall j > 0 \\ \binom{t}{0} &:= 1, & \forall t \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

PROVA Se $y(t) = \alpha^t$, allora

$$((\sigma - \alpha)y)(t) = y(t+1) - \alpha y(t) = \alpha^{t+1} - \alpha^{t+1} = 0$$

Se $y(t) = \binom{t}{k} \alpha^t$, $k > 0$, allora

$$((\sigma - \alpha)y)(t) = \binom{t+1}{k} \alpha^{t+1} - \binom{t}{k} \alpha^{t+1} = \left[\binom{t+1}{k} - \binom{t}{k} \right] \alpha^{t+1} = \alpha \left[\binom{t}{k-1} \right] \alpha^t$$

Perciò l'operatore $(\sigma - \alpha)^\nu$, applicato alle successioni (16.51), produce la successione identicamente nulla.

Rimane da verificare l'indipendenza lineare delle successioni (16.51). Supponiamo allora di avere, per ogni $t \in \mathbb{Z}$,

$$0 = \sum_{i=0}^{\nu-1} c_i \binom{t}{i} \alpha^t = \alpha^t \sum_{i=0}^{\nu-1} c_i \binom{t}{i}$$

Ciò implica

$$0 = \sum_{i=0}^{\nu-1} c_i \binom{t}{i} = \sum_{i=0}^{\nu-1} \frac{c_i}{i!} t(t-1) \cdots (t-i+1), \quad \forall t \in \mathbb{Z} \quad (16.52)$$

e se qualcuno dei coefficienti c_i non è nullo $\sum_{i=0}^{\nu-1} c_i \binom{t}{i}$ è una funzione polinomiale in t , non nulla ma dotata di infiniti zeri distinti: un assurdo. ■

Consideriamo ora un polinomio del secondo grado con zeri complessi

$$z^2 + a_1 z + a_0 = (z - \omega_n e^{j\phi})(z - \omega_n e^{-j\phi}) = z^2 - 2(\cos \phi) \omega_n z + \omega_n^2 = z^2 + 2\delta \omega_n z + \omega_n^2$$

con

$$0 < \phi < \pi, \quad \delta = -\cos \phi, \quad |\delta| < 1.$$

Proposizione 16.6.4 *Il nucleo dell'operatore alle differenze $(\sigma^2 + 2\delta\omega_n\sigma + \omega_n^2)^\nu$, $|\delta| < 1$, ovvero lo spazio delle soluzioni dell'equazione omogenea alle differenze*

$$(\sigma^2 + 2\delta\omega_n\sigma + \omega_n^2)^\nu y = 0 \quad (16.53)$$

ha per base le successioni

$$\left\{ \binom{t}{k} \omega_n^t \cos(t\phi) \right\}_{t \in \mathbb{Z}}, \quad \left\{ \binom{t}{k} \omega_n^t \sin(t\phi) \right\}_{t \in \mathbb{Z}}, \quad k = 0, 1, \dots, \nu - 1 \quad (16.54)$$

PROVA Sul campo complesso, l'equazione alle differenze si può riscrivere come

$$(\sigma - \omega_n e^{j\phi})^\nu (\sigma - \omega_n e^{-j\phi})^\nu y = 0 \quad (16.55)$$

e dalla dimostrazione della proposizione precedente (che vale anche sul campo complesso) è chiaro che le successioni

$$\left\{ \binom{t}{k} \omega_n^t e^{j\phi t} \right\}_{t \in \mathbb{Z}}, \quad \left\{ \binom{t}{k} \omega_n^t e^{-j\phi t} \right\}_{t \in \mathbb{Z}}, \quad k = 0, 1, \dots, \nu - 1 \quad (16.56)$$

risolvono la (16.55) e quindi la (16.53). Allora sono soluzioni di (16.53) le successioni

$$\begin{aligned} \left\{ \binom{t}{k} \omega_n^t \frac{e^{j\phi t} + e^{-j\phi t}}{2} \right\}_{t \in \mathbb{Z}} &= \left\{ \binom{t}{k} \omega_n^t \cos(\phi t) \right\}_{t \in \mathbb{Z}}, & k = 0, 1, \dots, \nu - 1 \\ \left\{ \binom{t}{k} \omega_n^t \frac{e^{j\phi t} - e^{-j\phi t}}{2j} \right\}_{t \in \mathbb{Z}} &= \left\{ \binom{t}{k} \omega_n^t \sin(\phi t) \right\}_{t \in \mathbb{Z}}, & k = 0, 1, \dots, \nu - 1 \end{aligned}$$

che si ottengono combinando linearmente su \mathbb{C} le successioni (16.56). Per verificare che le (16.54) sono indipendenti su \mathbb{R} , si supponga che, per ogni $t \in \mathbb{Z}$, si abbia

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=0}^{\nu-1} c_k \binom{t}{k} \omega_n^t \cos(t\phi) + \sum_{k=0}^{\nu-1} d_k \binom{t}{k} \omega_n^t \sin(t\phi) \\ &= \omega_n^t \left[\sum_{k=0}^{\nu-1} c_k \binom{t}{k} \cos(t\phi) + \sum_{k=0}^{\nu-1} d_k \binom{t}{k} \sin(t\phi) \right] \\ &= \omega_n^t \left[f(t) \cos(t\phi) + g(t) \sin(t\phi) \right]. \end{aligned} \quad (16.57)$$

dove le funzioni polinomiali in t

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\nu-1} c_k \binom{t}{k}, \quad g(t) = \sum_{k=0}^{\nu-1} d_k \binom{t}{k}$$

possono annullarsi per infiniti valori di t solo se sono nulli i coefficienti c_k e d_k , $k = 0, 1, \dots, \nu - 1$. Poiché $\omega_n \neq 0$, da (16.57) segue

$$0 = f(t) \cos(t\phi) + g(t) \sin(t\phi), \quad \forall t \in \mathbb{Z} \quad (16.58)$$

- Se $\phi = \pi/2$,

per t dispari si annulla $\cos(t\phi)$, ma non si annulla $\sin(t\phi)$, quindi deve risultare $g(2h+1) = 0, \forall h \in \mathbb{Z}$ e la funzione polinomiale g è nulla; per t pari si annulla $\sin(t\phi)$, ma non si annulla $\cos(t\phi)$, quindi deve risultare $f(2h) = 0, \forall h \in \mathbb{Z}$ e la funzione polinomiale f è nulla. Conseguentemente $c_k = d_k = 0, k = 0, 1, \dots, \nu - 1$.

- Se $\phi \neq \pi/2$,

esistono infiniti valori di t in corrispondenza ai quali $\cos(t\phi)$ e $\sin(t\phi)$ hanno lo stesso segno e infiniti altri in corrispondenza ai quali hanno segno discorde. Poiché un polinomio non nullo in $\mathbb{R}[t]$ assume segno definito quando $t \rightarrow +\infty$, la (16.58) non può essere soddisfatta, per $t \rightarrow +\infty$, salvo se f e g sono funzioni polinomiali nulle e quindi $c_k = d_k = 0, k = 0, 1, \dots, \nu - 1$. ■

Le (16.51) e le (16.54) forniscono i sistemi fondamentali di soluzioni corrispondenti a

$$(\sigma - \alpha)^\nu \quad \text{e} \quad (\sigma^2 + 2\delta\omega_n\sigma + \omega_n^2)^\nu$$

quindi anche agli operatori

$$(1 - \sigma^{-1}\alpha)^\nu \quad \text{e} \quad (1 + 2\delta\omega_n\sigma^{-1} + \omega_n^2\sigma^{-2})^\nu$$

o ancora a

$$(\sigma^{-1} - \alpha^{-1})^\nu \quad \text{e} \quad (\sigma^{-2} + \frac{2\delta}{\omega_n}\sigma^{-1} + \frac{1}{\omega_n^2})^\nu$$

Una volta fattorizzato $\tilde{p}(\sigma)$ o $p(\sigma^{-1})$ in potenze di fattori del primo e del secondo grado a coefficienti reali, un sistema fondamentale di soluzioni si ottiene dall'unione insiemistica dei sistemi così trovati.

Concludiamo il paragrafo accennando al problema di costruire un sistema fondamentale di soluzioni applicando iteratamente l'operatore di shift a una soluzione. Più precisamente, vogliamo stabilire sotto quali condizioni, data una soluzione \bar{y} dell'equazione

$$\tilde{p}(\sigma)y = (a_0 + a_1\sigma + \dots + a_{n-1}\sigma^{n-1} + \sigma^n)y = 0, \quad a_0 \neq 0, \quad (16.59)$$

n traslate successive di \bar{y} , ovvero

$$\sigma^\nu \bar{y}, \sigma^{\nu+1} \bar{y}, \dots, \sigma^{\nu+n-1} \bar{y} \quad (16.60)$$

costituiscono un sistema fondamentale di soluzioni.

Premettiamo il seguente lemma.

Lemma 16.6.5 *Sia y una soluzione dell'equazione omogenea $\tilde{p}(\sigma)y = (a_0 + a_1\sigma + \dots + a_{n-1}\sigma^{n-1} + \sigma^n)y = 0$, $a_0 \neq 0$, e sia*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

Allora A ha inversa

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{a_1}{a_0} & -\frac{a_2}{a_0} & -\frac{a_2}{a_0} & \dots & -\frac{1}{a_0} \\ 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (16.61)$$

e per ogni n -upla \mathbf{x} di campioni consecutivi estratta da y

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} y(k) \\ y(k+1) \\ \vdots \\ y(k+n-1) \end{bmatrix} \Rightarrow A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} y(k+1) \\ y(k+2) \\ \vdots \\ y(k+n) \end{bmatrix}, \quad A^{-1}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} y(k-1) \\ y(k) \\ \vdots \\ y(k+n-2) \end{bmatrix} \quad (16.62)$$

PROVA È immediata, ricordando che

$$y(k+n) = -a_0y(k) - a_1y(k+1) - \dots - a_{n-1}y(k+n-1)$$

e notando che $\tilde{p}(\sigma)y = 0$ implica $\left(1 + \frac{a_1}{a_0}\sigma + \frac{a_2}{a_0}\sigma^2 + \dots + \frac{1}{a_0}\sigma^n\right)y = 0$ e quindi

$$y(k-1) = -\frac{a_1}{a_0}y(k) - \frac{a_2}{a_0}y(k+1) - \dots - \frac{1}{a_0}y(k+n-1) \quad \blacksquare$$

Dal corollario 16.6.2 e dalla invertibilità di F seguono la proposizione 16.6.6 e il successivo corollario, la cui prova è lasciata come esercizio.

Proposizione 16.6.6 Sia y la soluzione dell'equazione $\tilde{p}(\sigma)y = (a_0 + a_1\sigma + \dots + a_{n-1}\sigma^{n-1} + \sigma^n)y = 0$, $a_0 \neq 0$, corrispondente alla condizione iniziale

$$\begin{bmatrix} y(-n) \\ y(-n+1) \\ \vdots \\ y(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} =: \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n \quad (16.63)$$

Si equivalgono i seguenti fatti

- i) $y, \sigma y, \dots, \sigma^{n-1}y$ costituiscono un sistema fondamentale di soluzioni;
- ii) per ogni ν intero, $\sigma^\nu y, \sigma^{\nu+1}y, \dots, \sigma^{\nu+n-1}y$ costituiscono un sistema fondamentale di soluzioni;
- iii) $y, \sigma^{-1}y, \dots, \sigma^{-n+1}y$ costituiscono un sistema fondamentale di soluzioni;
- iv) la matrice $[\mathbf{b} \quad A\mathbf{b} \quad \dots \quad A^{n-1}\mathbf{b}]$ ha rango n ;
- v) la matrice $[\mathbf{b} \quad A^{-1}\mathbf{b} \quad \dots \quad A^{-n+1}\mathbf{b}]$ ha rango n . ■

Corollario 16.6.7 Sia $\{h(t)\}_{t \in \mathbb{Z}}$ la soluzione dell'equazione omogenea $\tilde{p}(\sigma)y = (a_0 + a_1\sigma + \dots + a_{n-1}\sigma^{n-1} + \sigma^n)y = 0$, $a_0 \neq 0$, corrispondente alla condizione

$$\begin{bmatrix} h(-n) \\ h(-n+1) \\ \vdots \\ h(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{a_0} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad (16.64)$$

Allora $h, \sigma^{-1}h, \sigma^{-2}h, \dots, \sigma^{-n+1}h$ costituiscono un sistema fondamentale di soluzioni. ■

16.7 Soluzione dell'equazione non omogenea alle differenze

Consideriamo l'equazione non omogenea

$$p(\sigma^{-1})y = (a_n + a_{n-1}\sigma^{-1} + a_{n-2}\sigma^{-2} + \dots + a_0\sigma^{-n})y = v, \quad \text{con } a_n = 1, a_0 \neq 0, \quad (16.65)$$

dove v è una successione con supporto in $[b, +\infty)$, e ricerchiamo una soluzione y il cui supporto abbia le medesime caratteristiche del supporto di v .

Se $\mathcal{F}_0 h$ è la proiezione su $[0, +\infty)$ della soluzione h dell'equazione omogenea che abbiamo determinato nel corollario 16.6.7, vogliamo verificare che

$$y_f = (\mathcal{F}_0 h) \star v \quad (16.66)$$

risolve la (16.65) e soddisfa la condizione sul supporto.

Infatti, tenendo conto di (16.64), si ha

$$y_f(t) = \sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} (\mathcal{F}_0 h)(t-\tau)v(\tau) = \sum_{\tau=-\infty}^t h(t-\tau)v(\tau)$$

$$\begin{aligned}
 y_f(t-1) &= \sum_{\tau=-\infty}^{t-1} h(t-1-\tau)v(\tau) = \sum_{\tau=-\infty}^t h(t-1-\tau)v(\tau) \\
 &\dots \quad \dots \\
 y_f(t-n+1) &= \sum_{\tau=-\infty}^{t-n-1} h(t-n+1-\tau)v(\tau) = \sum_{\tau=-\infty}^t h(t-n+1-\tau)v(\tau) \\
 y_f(t-n) &= \sum_{\tau=-\infty}^{t-n} h(t-n-\tau)v(\tau) = \sum_{\tau=-\infty}^t h(t-n-\tau)v(\tau) - h(-n)v(t) \\
 &= \sum_{\tau=-\infty}^t h(t-n-\tau)v(\tau) + \frac{v(t)}{a_0} \tag{16.67}
 \end{aligned}$$

Moltiplicando nell'ordine per $a_n = 1$, a_{n-1} , a_{n-2} , \dots , a_1 , a_0 e sommando membro a membro, otteniamo per ogni $t \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
 &y_f(t) + a_{n-1}y_f(t-1) + \dots + a_1y_f(t-n+1) + a_0y_f(t-n) \\
 &= (p(\sigma^{-1})y_f)(t) = v(t) + \sum_{\tau=-\infty}^t \left[\sum_{i=0}^n a_i h(t-i-\tau) \right] v(\tau) = v(t)
 \end{aligned}$$

È poi chiaro che, avendo $\mathcal{F}_0 h$ supporto in $[0, +\infty)$, il segnale y_f non ha inizio prima di v e che $\mathcal{F}_0 h$ svolge un ruolo analogo a quello della funzione di Green nel caso continuo.

Se $t_0 \leq b$ e sono assegnati i valori della soluzione \bar{y} di (16.65) in n istanti precedenti t_0

$$\begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{y}(t_0 - n) \\ \bar{y}(t_0 - n + 1) \\ \vdots \\ \bar{y}(t_0 - 1) \end{bmatrix} \tag{16.68}$$

allora la soluzione \bar{y} è data da

$$\bar{y} = y_f + y_{\text{hom}} \tag{16.69}$$

dove y_{hom} risolve l'equazione omogenea $p(\sigma^{-1})y = 0$ con le condizioni

$$\begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{\text{hom}}(t_0 - n) \\ y_{\text{hom}}(t_0 - n + 1) \\ \vdots \\ y_{\text{hom}}(t_0 - 1) \end{bmatrix}$$

Esempio 16.7.1 Se è nota sull'intervallo $[0, n-1]$ la soluzione $\mathbf{x}_0 = [h(0) \ h(1) \ \dots \ h(n-1)]^T$ dell'equazione omogenea, definita nel corollario 16.6.7, se ne possono ricavare i vettori

$$\mathbf{x}_1 = A\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} h(1) \\ h(2) \\ \vdots \\ h(n) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = A^2\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} h(2) \\ h(3) \\ \vdots \\ h(n+1) \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad \mathbf{x}_{n-1} = A^{n-1}\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} h(n-1) \\ h(n) \\ \vdots \\ h(2n-2) \end{bmatrix} \tag{16.70}$$

che rappresentano i valori assunti sull'intervallo $[0, n-1]$ dalle altre successioni del sistema fondamentale di soluzioni $h, \sigma h, \dots, \sigma^{n-1}h$. I vettori $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}$ sono linearmente indipendenti.

Vogliamo determinare la soluzione \bar{y} dell'equazione $p(\sigma^{-1})\bar{y} = v$ che soddisfi la condizione (16.68), esprimendone la componente omogenea della soluzione mediante il sistema fondamentale $h, \sigma h, \dots, \sigma^{n-1}h$.

A tale scopo, determiniamo il vettore $\mathbf{m} = [m_0 \ m_1 \ \dots \ m_{n-1}]^T \in \mathbb{R}^n$ che soddisfa l'equazione

$$[\mathbf{x}_0 \ \mathbf{x}_1 \ \dots \ \mathbf{x}_{n-1}] \mathbf{m} = \begin{bmatrix} \bar{y}(t_0 - n) \\ \bar{y}(t_0 - n + 1) \\ \vdots \\ \bar{y}(t_0 - 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{bmatrix}.$$

Tenuto conto del legame fra i vettori \mathbf{x}_i , $i = 0, 1, \dots, n-1$ e il sistema fondamentale, è chiaro che la successione $\hat{y} = \sum_{i=0}^{n-1} \delta_i(\sigma^i h)$ soddisfa sull'intervallo $[0, n-1]$ la condizione

$$\begin{bmatrix} \hat{y}(0) \\ \hat{y}(1) \\ \vdots \\ \hat{y}(n-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{n-1} m_i(\sigma^i h)(0) \\ \sum_{i=0}^{n-1} m_i(\sigma^i h)(1) \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^{n-1} m_i(\sigma^i h)(n-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(0) & h(1) & \dots & h(n-1) \\ h(1) & h(2) & \dots & h(n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h(n-1) & h(n) & \dots & h(2n-2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_0 \\ m_1 \\ \vdots \\ m_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{bmatrix}$$

Essendo $\hat{y}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i(\sigma^i h)(t) = \gamma_{t+1}$, per $t = 0, 1, \dots, n-1$, i medesimi valori γ_i sono ottenuti sull'intervallo $[t_0 - n, t_0 - 1]$ dalla successione $\sum_{i=0}^{n-1} m_i(\sigma^{i+n-t_0} h)$. Risulta infatti

$$\sum_{i=0}^{n-1} m_i(\sigma^{i+n-t_0} h)(t) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i(\sigma^i h)(t+n-t_0) = \gamma_{t+1}, \quad t = t_0 - n, t_0 - n + 1, \dots, t_0 - 1$$

Perciò la componente omogenea della soluzione \bar{y} è esprimibile nella forma

$$y_{\text{hom}}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i(\sigma^i h)(t - t_0 + n) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i h(t - t_0 + n + i) \quad (16.71)$$

La soluzione dell'equazione (16.65) si può ottenere più rapidamente ricorrendo alle serie formali e alle loro proprietà. Indicando con $Y(z) = \sum_t y(t)z^{-t}$ la serie incognita in $\mathbb{R}((z^{-1}))$ e con $V(z) = \sum_{t=b}^{+\infty} v(t)z^{-t}$ la serie corrispondente alla successione v , la (16.65) si riscrive nella forma

$$(1 + a_{n-1}z^{-1} + a_{n-2}z^{-2} + \dots + a_0z^{-n})Y(z) = V(z). \quad (16.72)$$

Tale relazione è verificata da una e una sola serie nel campo $\mathbb{R}((z^{-1}))$, e precisamente da

$$Y_f(z) = (1 + a_{n-1}z^{-1} + a_{n-2}z^{-2} + \dots + a_0z^{-n})^{-1}V(z) \quad (16.73)$$

In particolare, se $V(z) = 1$, ossia se v è l'impulso di Kronecker, $Y_f(z) = (1 + a_{n-1}z^{-1} + a_{n-2}z^{-2} + \dots + a_0z^{-n})^{-1}$ è la serie corrispondente alla successione $\mathcal{F}_0 h$.

Se l'equazione da risolvere è

$$\sum_{i=0}^n a_{n-i}y(t-i) = \sum_{i=0}^m b_{m-i}v(t-i), \quad \text{con } a_n = 1 \quad (16.74)$$

procedendo come in (16.72) si riscrive (16.74) nella forma

$$(1 + a_{n-1}z^{-1} + \dots + a_0z^{-n})Y(z) = (b_m + b_{m-1}z^{-1} + \dots + b_0z^{-m})V(z) \quad (16.75)$$

Poiché la successione v ha supporto compatto a sinistra, ossia $U(z) \in \mathbb{R}((z^{-1}))$, si ottiene come unica soluzione in $\mathbb{R}((z^{-1}))$ la serie

$$\begin{aligned} Y_f(z) &= \frac{b_m + b_{m-1}z^{-1} + \dots + b_0z^{-m}}{1 + a_{n-1}z^{-1} + \dots + a_0z^{-n}} V(z) \\ &= (b_m + b_{m-1}z^{-1} + \dots + b_0z^{-m})(1 + a_{n-1}z^{-1} + \dots + a_0z^{-n})^{-1} V(z) \end{aligned} \quad (16.76)$$

che corrisponde, nel dominio del tempo, alla successione

$$y_f = \left[\mathcal{F}_0 h \star \sum_{i=0}^m b_{m-i}(\sigma^{-i}\kappa) \right] \star v = w \star v \quad (16.77)$$

La successione

$$w = \mathcal{F}_0 h \star \sum_{i=0}^m b_{m-i}(\sigma^{-i}\kappa)$$

è la risposta impulsiva del sistema, corrispondente a un “ingresso” $v = \kappa$ e la serie razionale

$$W(z) = \frac{b_m + b_{m-1}z^{-1} + \dots + b_0z^{-m}}{1 + a_{n-1}z^{-1} + \dots + a_0z^{-n}} \quad (16.78)$$

è la *funzione di trasferimento* del sistema, che fornisce, nel dominio delle serie formali, il legame ingresso uscita a partire da condizioni iniziali (i.e. prima dell’inizio di v) nulle. Moltiplicando in (16.78) numeratore e denominatore di $W(z)$ per z^N , con $N = \max\{m, n\}$ si esprime $W(z)$ come rapporto di polinomi in $\mathbb{R}[z]$, con grado del denominatore maggiore o eguale a quello del numeratore

$$W(z) = \frac{b_m z^N + b_{m-1} z^{N-1} + \dots + b_0 z^{N-m}}{z^N + a_{n-1} z^{N-1} + \dots + a_0 z^{N-n}} \quad (16.79)$$

16.8 Trasformata 3

Si consideri una successione indicata sui naturali $\{v(t)\}_{t \in \mathbb{N}}$ e la serie formale ad essa associata

$$V(z) = \sum_{t=0}^{+\infty} v(t) z^{-t} \quad (16.80)$$

Se z non viene più interpretata come una indeterminata, ma come una variabile complessa, si ottiene una serie di potenze nel senso abituale dell’Analisi, che può convergere per opportuni valori della variabile.

È noto da corsi precedenti che, ove la (16.80) converga in qualche punto z_0 del piano complesso, essa converge per ogni $z \in \mathbb{C}$ con $|z| > |z_0|$ e da ciò segue l’esistenza di una circonferenza di raggio R (detto “raggio di convergenza”), tale che la serie

- converge assolutamente in tutti i punti esterni alla circonferenza
- non converge nei punti interni
- può avere sulla circonferenza un comportamento variabile da punto a punto.

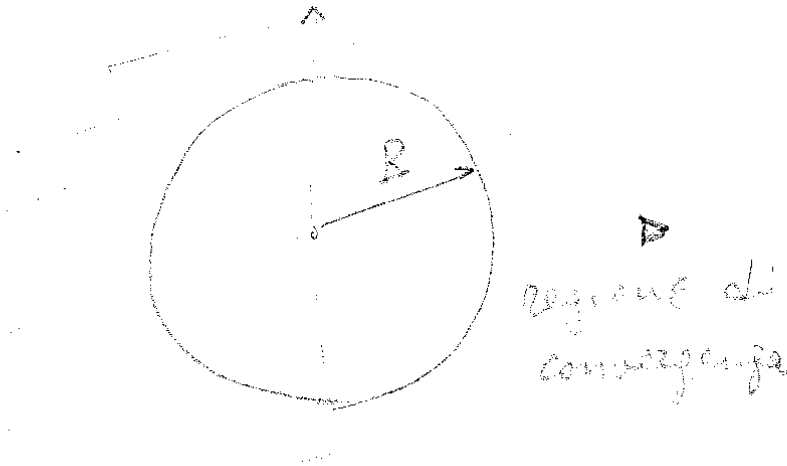


Figura 16.8.1

Quando $|z| > R$, $V(z)$ si interpreta allora come somma della serie (16.80), ovvero come funzione analitica della variabile complessa z mentre per $|z| \leq R$ è spesso possibile estendere la definizione della funzione, prolungandola analiticamente a partire dalla regione di analiticità. È opportuno sottolineare che in questo modo abbiamo attribuito alla notazione $V(z)$ due significati:

- quello di serie formale, in cui z gioca il ruolo di indeterminata (essenzialmente z^t è un “segna-posto”),
- quello di funzione della variabile complessa z , per la quale nella regione di convergenza vale lo sviluppo in serie (16.80), e che si dirà la trasformata \mathfrak{z} della successione v .

Molte delle cose viste per la trasformata di Laplace si riportano alla trasformata \mathfrak{z} . In particolare

Proposizione 16.8.1 *Se v ha trasformata $V(z)$ per $|z| > R_v$ e se w ha trasformata $W(z)$ per $|z| > R_w$, allora per $|z| > \max\{R_v, R_w\}$ è trasformabile $v \star w$ e la trasformata è $V(z)W(z)$*

CENNO DELLA PROVA La convoluzione di v e w ha per valori i coefficienti del prodotto formale della serie di $V(z)$ e della serie di $W(z)$. Ma il prodotto alla Cauchy di due serie assolutamente convergenti è assolutamente convergente ed è una serie che ha per somma il prodotto delle somme delle serie. ■

Proposizione 16.8.2 [TEOREMA DEL VALORE INIZIALE] *Se $V(z)$ è la \mathfrak{z} -trasformata di v , con regione di convergenza $|z| > R_v$ non vuota, si ha*

$$v(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} V(z) \quad (16.81)$$

PROVA Nello sviluppo

$$V(z) = v(0) + z^{-1}(v(1) + v(2)z^{-1} + v(3)z^{-2} + \dots) = v(0) + z^{-1}S(z),$$

si ha $|S(z)| \leq \sum_{t=1}^{\infty} |v(t)|(2R_v)^{-t+1} := K$, per ogni z complesso e soddisfacente $|z| \geq 2R_v$. Pertanto $z^{-1}S(z)$ è infinitesimo quando z tende a infinito e $V(z)$ tende a $v(0)$. ■

Proposizione 16.8.3 [TEOREMA DEL VALORE FINALE] *Se $V(z)$ è analitica per $|z| \geq 1$ eccetto, eventualmente, per un polo semplice in $z = 1$, allora esiste il limite di $(z - 1)V(z)$ per $z \rightarrow 1$ e si ha*

$$\lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)V(z) = \lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) \quad (16.82)$$

PROVA Si consideri la successione $w(t) = v(t + 1) - v(t)$ per $t \geq 0$. La sua \mathfrak{z} -trasformata

$$\begin{aligned} \sum_{t=0}^{\infty} v(t+1)z^{-t} - \sum_{t=0}^{\infty} v(t)z^{-t} &= z \sum_{t=0}^{\infty} v(t+1)z^{-(t+1)} - \sum_{t=0}^{\infty} v(t)z^{-t} \\ &= z[V(z) - v(0)] - V(z) = (z - 1)V(z) - zv(0) \end{aligned} \quad (16.83)$$

è analitica per $|z| \geq 1$, incluso il punto $z = 1$, dove la moltiplicazione per $z - 1$ elimina l'eventuale singolarità polare. Abbiamo così

$$(z - 1)V(z) - zv(0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{t=0}^N [v(t+1) - v(t)]z^{-t}$$

Quando $z \rightarrow 1$ entrambi i membri, di sinistra e di destra, ammettono limite, e poiché la serie di destra è assolutamente convergente per $|z| \geq 1$, il limite della sua somma quando $z \rightarrow 1$ è il valore della somma in 1. Perciò abbiamo

$$\lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)V(z) - v(0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{t=0}^N [v(t+1) - v(t)] = \lim_{N \rightarrow \infty} v(N+1) - v(0)$$

e, infine,

$$\lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)V(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} v(N+1) = \lim_{N \rightarrow \infty} v(N) \quad \blacksquare$$

Si lascia come esercizio la dimostrazione della seguente

Proposizione 16.8.4 *Se $F(z)$ è la \mathfrak{z} -trasformata della successione $f(t)$ nella regione $|z| > R$, allora*

- $\frac{dF}{dz}$ è analitica per $|z| > R$;
- la serie ottenuta derivando termine a termine $\sum_{t=0}^{\infty} f(t)z^{-t}$ converge alla funzione $\frac{dF}{dz}$ nella medesima regione;
- la funzione $-z \frac{dF}{dz}$ è la \mathfrak{z} -trasformata della successione $\{tf(t)\}_{t \in \mathbb{N}}$. ■

Una funzione razionale propria $F(z) \in \mathbb{R}(z)$ può essere sviluppata in frazioni parziali e lo sviluppo sul campo reale consiste nella somma di una costante e di alcuni termini dei seguenti tipi

$$\frac{c}{(z - \alpha)^\nu}, \quad c, \alpha \in \mathbb{R}, \quad \nu \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

$$\frac{c + zd}{(z^2 + 2\delta\omega_n z + \omega_n^2)^\nu} \quad c, d, \delta, \omega_n \in \mathbb{R}, |\delta| < 1, \quad \nu \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \quad (16.84)$$

Lo sviluppo in serie di $F(z)$ in un intorno del punto all'infinito del piano complesso che non comprenda poli di $F(z)$ converge e $F(z)$ ed è la trasformata della successione dei coefficienti $\{f(t)\}_{t \in \mathbb{N}}$ della serie stessa

$$F(z) = \sum_{t=0}^{\infty} f(t)z^{-t}, \quad |z| > R$$

Lo stesso può dirsi per lo sviluppo in serie di ciascuna frazione parziale (16.84), e per ciascuna la regione di convergenza dello sviluppo in serie include almeno la regione $|z| > R$. È chiaro che la conoscenza dello sviluppo in serie delle (16.84) consente di antitrasformare ogni funzione razionale propria per semplice addizione delle (successioni che rappresentano le) antitrasformate delle frazioni parziali che la compongono. Concluderemo pertanto questo paragrafo determinando la struttura delle \mathfrak{z} -antitrasformate delle funzioni razionali elementari (16.84).

$$\text{a)} \quad \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}} = \sum_{t=0}^{\infty} \alpha^t z^{-t} = \frac{z}{z - \alpha} \quad (16.85)$$

Formalmente è già stato provato nell'esercizio 16.3.2. La regione di convergenza, dovendo risultare $|\alpha z^{-1}| < 1$, è la regione $|z| > |\alpha|$.

b) Proviamo⁵, per induzione su ν , che

$$\frac{(\alpha z^{-1})^{\nu-1}}{(1 - \alpha z^{-1})^\nu} = \frac{z \alpha^{\nu-1}}{(z - \alpha)^\nu} = \sum_{t=0}^{\infty} \binom{t}{\nu-1} \alpha^t z^{-t}. \quad (16.86)$$

La (16.86) è vera per $\nu = 1$ (si veda il punto (a)). Se vale per $\nu = \bar{\nu}$, proviamo che è vera per $\nu = \bar{\nu} + 1$. Infatti si ha

$$\begin{aligned} \frac{(\alpha z^{-1})^{\bar{\nu}}}{(1 - \alpha z^{-1})^{\bar{\nu}+1}} &= \frac{\alpha z^{-1}}{1 - \alpha z^{-1}} \frac{(\alpha z^{-1})^{\bar{\nu}-1}}{(1 - \alpha z^{-1})^{\bar{\nu}}} \\ &= \left[\sum_{h=0}^{+\infty} \alpha^{h+1} z^{-h-1} \right] \left[\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{k}{\bar{\nu}-1} \alpha^k z^{-k} \right] \\ &= \sum_{t=0}^{+\infty} \left[\sum_{h+k=t} \binom{k}{\bar{\nu}-1} \alpha^{k+h-1} z^{-(k+h+1)} \right] \\ &= \sum_{t=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^t \binom{k}{\bar{\nu}-1} \alpha^{t-1} z^{-t-1} = \sum_{t=0}^{+\infty} \binom{t+1}{\bar{\nu}} \alpha^{t-1} z^{-t-1} = \sum_{t=0}^{+\infty} \binom{t}{\bar{\nu}} \alpha^t z^{-t} \end{aligned}$$

⁵Nelle formule a seguire, quando è $p < q$ si assume, per definizione, $\binom{p}{q} = 0$.

Nell'ultima eguaglianza si è sfruttato il fatto che $\binom{0}{\bar{\nu}} = 0$ e nel penultimo l'identità combinatoria

$$\sum_{k=0}^t \binom{k}{\bar{\nu}-1} = \binom{t+1}{\bar{\nu}} \quad (16.87)$$

- ESERCIZIO 16.8.1 Si dimostri l'identità (16.87).

$$\begin{aligned} \# \text{ Soluzione: } & [\binom{0}{\nu-1} + \dots + \binom{\nu-2}{\nu-1}] + [\binom{\nu-1}{\nu-1} + \binom{\nu}{\nu-1}] + \binom{\nu+1}{\nu-1} + \dots + \binom{t}{\nu-1} \\ & = [\binom{\nu}{\nu} + \binom{\nu}{\nu-1}] + \binom{\nu+1}{\nu-1} + \dots + \binom{t}{\nu-1} = [\binom{\nu+1}{\nu} + \binom{\nu+1}{\nu-1}] + \binom{\nu+2}{\nu-1} + \dots + \binom{t}{\nu-1} \\ & = [\binom{\nu+2}{\nu} + \binom{\nu+2}{\nu-1}] + \binom{\nu+3}{\nu-1} + \dots + \binom{t}{\nu-1} = \dots = \binom{t}{\nu} + \binom{t}{\nu-1} = \binom{t+1}{\nu} \end{aligned}$$

c) Se nella (16.85) il numero $\alpha = \omega_n e^{j\phi}$ è un numero complesso, si ha, per $|z| > \omega_n$

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - \omega_n e^{j\phi} z^{-1}} + \frac{1}{1 - \omega_n e^{-j\phi} z^{-1}} &= \sum_{t=0}^{\infty} 2\omega_n^t \frac{e^{jt\phi} + e^{-jt\phi}}{2} z^{-t} \\ \frac{1 - z^{-1}\omega_n \cos \phi}{1 - 2z^{-1}\omega_n \cos \phi + \omega_n^2 z^{-2}} &= \sum_{t=0}^{\infty} \omega_n^t \cos(t\phi) z^{-t} \end{aligned} \quad (16.88)$$

e analogamente, per sottrazione degli addendi

$$\frac{z^{-1}\omega_n \sin \phi}{1 - 2z^{-1}\omega_n \cos \phi + \omega_n^2 z^{-2}} = \sum_{t=0}^{\infty} \omega_n^t \sin(t\phi) z^{-t} \quad (16.89)$$

Formule analoghe si ottengono per lo sviluppo in frazioni parziali nell'indeterminata z (anziché z^{-1}). Su ciò non insistiamo, rinviando per il caso dei poli complessi multipli ai testi sulla \mathfrak{z} -trasformata.

Vale solo la pena di notare che, quando nella (16.85) è $|\alpha| > 1$, la successione ha modulo divergente, mentre lo ha convergente a zero se $|\alpha| < 1$ e costante se $|\alpha| = 1$.

In (16.86), la successione ha modulo divergente se $|\alpha| > 1$ e converge a zero se $|\alpha| < 1$ (si applichi la regola di De l'Hospital). Se $|\alpha| = 1$ e $\nu > 1$, la successione ha modulo divergente.

Infine, in (16.88) e (16.89) la condizione $|\omega_n| < 1$ implica la convergenza a zero della successione; per $|\omega_n| = 1$ la successione è limitata, mentre non è limitata se $|\omega_n| > 1$.

Possiamo concludere che le successioni antitrasformate delle funzioni razionali elementari che costituiscono lo sviluppo in frazioni parziali convergono se e solo se gli addendi elementari dello sviluppo sono relativi a poli (per la variabile z) con modulo minore di 1.

16.9 Stabilità nel dominio z

Il teorema 16.4.4 fornisce una condizione necessaria e sufficiente per la stabilità BIBO di un sistema lineare causale invariante a tempo discreto: la sua risposta impulsiva w deve essere una successione in ℓ_+^1 .

La \mathfrak{z} -trasformata di una successione $w \in \ell_+^1$ converge almeno per $|z| \geq 1$, essendo

$$\sum_t |w(t)z^{-t}| \leq \sum_t |w(t)| < \infty.$$

Quindi la funzione di trasferimento $W(z)$ di un sistema stabile è analitica per $|z| > 1$ e limitata per $|z| \geq 1$, ossia è una funzione H^∞ .

Supponiamo ora che $W(z)$ sia razionale, ossia che w sia la risposta impulsiva di un sistema discreto associato ad una equazione alle differenze. In questo caso, la stabilità BIBO implica che $W(z)$ sia priva di poli con modulo maggiore di o eguale a 1. Allora, essendo tali poli in numero finito, esiste un $\epsilon > 0$ tale che $W(z)$ è analitica per $|z| > 1 - \epsilon$.

Viceversa, se $\sum_t w(t)z^{-t} = W(z)$ è analitica per $|z| > 1 - \epsilon$, allora $\sum_t |w(t)|$ converge, quindi w è una successione di ℓ_+^1 e il sistema è BIBO stabile. Possiamo quindi concludere con il seguente

Teorema 16.9.1 *Condizione necessaria e sufficiente affinché la funzione razionale propria $W(z)$ sia funzione di trasferimento di un sistema discreto BIBO stabile è che $W(z)$ sia priva di poli per $|z| \geq 1$.* ■

La verifica della stabilità si riconduce a vedere se il denominatore di $W(z)$, espressa in forma irriducibile, è privo di zeri con modulo maggiore o eguale a 1.

Ciò può essere fatto

a) considerando la *trasformazione bilineare* del piano complesso esteso \mathbb{C}_e in se stesso, data da

$$b: \mathbb{C}_e \rightarrow \mathbb{C}_e: s \mapsto \frac{s+1}{s-1} = z$$

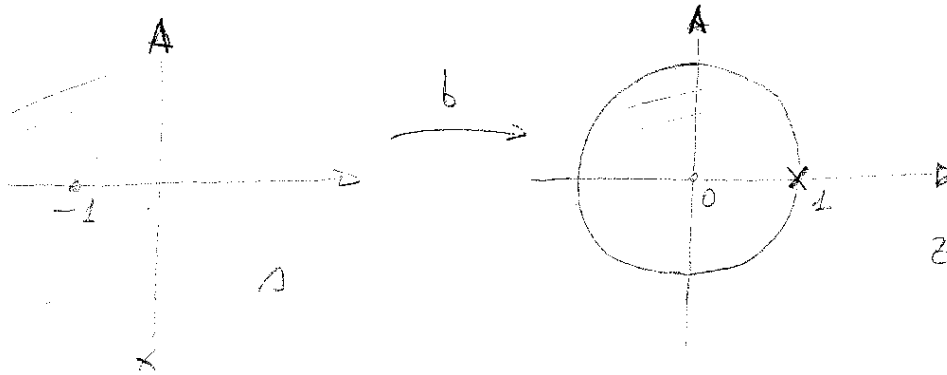


Figura 16.9.1

La mappa b è una biiezione, che porta il punto 1 del piano s nel punto all'infinito del piano z e il punto all'infinito del piano s nel punto 1 del piano z . L'asse immaginario del piano s dà luogo alla circonferenza unitaria, i punti del semipiano sinistro aperto (quelli cioè con $\Re(s) < 0$) vengono mappati nei punti interni del disco unitario $\{z: |z| < 1\}$ e quelli del semipiano destro aperto nei punti esterni al disco unitario.

Se $p: \mathbb{C}_e \rightarrow \mathbb{C}_e: z \mapsto p(z)$ è una funzione polinomiale di grado n , con zeri z_1, z_2, \dots, z_n , consideriamo la funzione

$$p \circ b: s \mapsto p(b(s)) = p\left(\frac{s+1}{s-1}\right) = \frac{g(s)}{(s-1)^n} \quad (16.91)$$

Si tratta di una funzione razionale in s , nulla in corrispondenza a quei valori di s (incluso eventualmente il punto all'infinito) che b mappa nei punti z_1, z_2, \dots, z_n . Perché z_1, z_2, \dots, z_n siano interni al disco unitario occorre e basta che

- gli zeri in s della funzione razionale appartengano al semipiano sinistro aperto;
- fra essi non figuri il punto all'infinito del piano s (che b mappa nel punto $z = 1$), ovvero che $g(s)/(s-1)^n$ non sia strettamente propria. Si noti che eventuali fattori $(s-1)^\nu$ presenti in $g(s)$ si cancellano con il denominatore e quindi la funzione razionale non può avere zeri in $s = 1$. Ciò è naturale, perché b mappa il punto $s = 1$ nel punto $z = \infty$, e per $z \rightarrow \infty$ il polinomio $p(z)$ non si annulla.

Dalla discussione precedente segue che, per verificare che $p(z)$ abbia tutti i suoi zeri con modulo minore di 1,

- si porta $p\left(\frac{s+1}{s-1}\right)$ in forma irriducibile $\frac{r(s)}{t(s)}$;
- si verifica che $\deg r = \deg t$;
- si verifica che $r(s)$ sia strettamente hurwitziano (p.es. ricorrendo alla tabella di Routh).

Esempio 16.9.1 Se $p(z) = z^3 - \frac{3}{2}z^2 + \frac{1}{2}z$ la funzione razionale

$$p\left(\frac{s+1}{s-1}\right) = \frac{s^2 + 4s + 3}{(s-1)^3}$$

è strettamente propria, quindi $p(z)$ non ha tuttigli zeri nel disco unitario aperto. Infatti, è immediato che $p(z)$ fattorizza come $z(z-1)(z-\frac{1}{2})$.

Esempio 16.9.2 Se $p(z) = z^3 + \frac{7}{2}z^2 + \frac{7}{2}z + 1$, la funzione razionale

$$p\left(\frac{s+1}{s-1}\right) = \frac{9s^3 - s}{(s-1)^3}$$

è in forma irriducibile e non è strettamente propria. Il polinomio $r(s) = 9s^3 - s$ non è strettamente hurwitziano, quindi $p(z)$ ha alcuni zeri a modulo maggiore o eguale a 1. Non è difficile verificare che $p(z)$ fattorizza come $(z+1)(z+2)(z+\frac{1}{2})$.

b) ricorrendo al *criterio di stabilità di Jury*, che può essere visto come l'analogo discreto del criteri di Routh, studiato nel capitolo 9.

Dato il polinomio

$$p_0(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0, \quad a_n > 0 \quad (16.92)$$

se ne considera il *polinomio reciproco*

$$p_0^*(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n = z^n p_0(z^{-1}) \quad (16.93)$$

e si formano le prime due righe della tabella di Jury

$$\begin{array}{ccccccc} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \end{array}$$

Come secondo passo, si moltiplica il polinomio p_0^* per $-a_0/a_n$, lo si somma al primo e si moltiplica il risultato per z^{-1} , ottenendo

$$p_1(z) := z^{-1} \left(p_0(z) - \frac{a_0}{a_n} p_0^* \right) = b_{n-1} z^{n-1} + b_{n-2} z^{n-2} + \cdots + b_1 z + b_0 \quad (16.94)$$

di grado “formale” $n - 1$ (il coefficiente b_{n-1} può essere nullo) e il reciproco

$$p_1^*(z) = b_0 z^{n-1} + b_1 z^{n-2} + \cdots + b_{n-2} z + b_{n-1} \quad (16.95)$$

Si aggiungono ora alla tabella due righe, formate con i coefficienti di p_1 e di p_1^* :

$$\begin{array}{ccccccc} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\ \hline b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \cdots & b_2 & b_0 & \\ b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-2} & b_{n-1} & \end{array}$$

La terza riga si ottiene perciò sommando alla prima la seconda moltiplicata per $-a_0/a_n$.

Se $b_{n-1} = 0$ il procedimento si arresta. Altrimenti prosegue su p_1 e p_1^* (o sulla terza e quarta riga della tabella) come fatto per p_0 e p_0^* (sulla prima e seconda riga della tabella): la quinta riga si ottiene sommando alla terza riga la quarta moltiplicata per $-b_0/b_{n-1}$ e la sesta scrivendo i termini della quinta in ordine inverso.

$$\begin{array}{ccccccc} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\ \hline b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \cdots & b_2 & b_0 & \\ b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-2} & b_{n-1} & \\ \hline c_{n-2} & c_{n-3} & c_{n-4} & \cdots & c_0 & & \\ c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-2} & & \end{array}$$

Il criterio di Jury stabilisce che $p_0(z)$ ha tutte radici a modulo minore di 1 (o, come si suol dire, è un polinomio di Schur) se e solo se i primi termini delle righe dispari della tabella $a_n, b_{n-1}, c_{n-2}, \dots$ hanno tutti il segno di a_n e quindi sono tutti positivi. Per la dimostrazione, si rinvia alla monografia [Ju].

Esempio 16.9.3 Si consideri il polinomio del secondo ordine

$$p(z) = z^2 + a_1 z + a_0 \quad (16.96)$$

La tabella di Jury è

$$\begin{array}{ccc} 1 & a_1 & a_0 \\ a_0 & a_1 & 1 \\ \hline 1 - a_0^2 & a_1(1 - a_0) & \text{condizione } 1 - a_0^2 > 0 \\ a_1(1 - a_0) & 1 - a_0^2 & \\ \hline 1 - a_0^2 - \frac{a_1^2(1 - a_0)}{1 + a_0} & & \text{condizione } 1 - a_0^2 - \frac{a_1^2(1 - a_0)}{1 + a_0} > 0 \end{array}$$

La seconda condizione si può riscrivere come

$$\frac{(1 - a_0)(1 + a_0)^2 - (1 - a_0)a_1^2}{1 + a_0} = \frac{(1 - a_0)(1 + a_0 - a_1)(1 + a_0 + a_1)}{1 + a_0} > 0$$

e quindi

$$(1 - a_0^2)(1 + a_0 - a_1)(1 + a_0 + a_1) > 0$$

o ancora, quando sia soddisfatta la prima condizione $(1 - a_0)^2 > 0$, come

$$(1 + a_0 - a_1)(1 + a_0 + a_1) > 0.$$

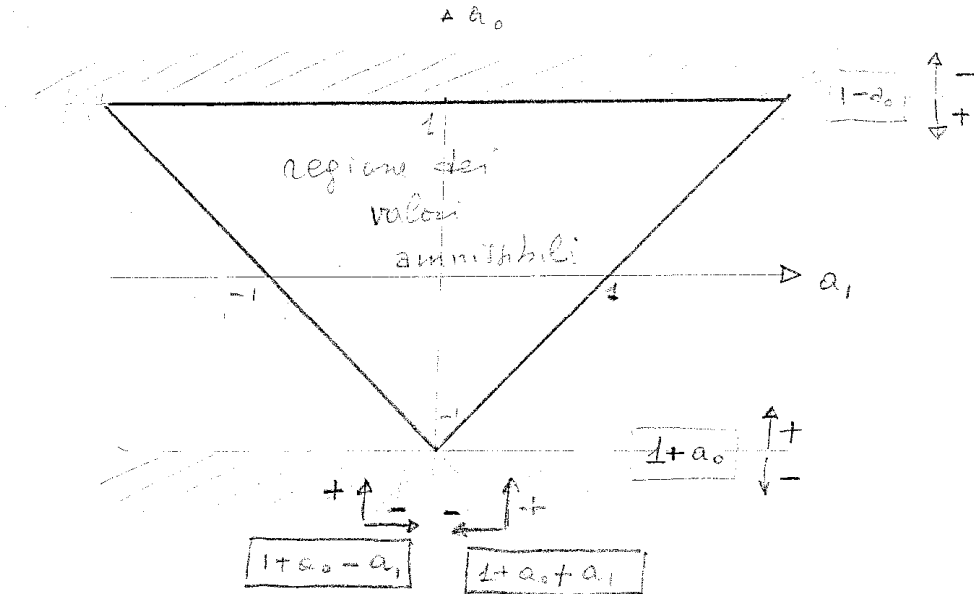


Figura 16.9.2

Nello spazio dei parametri a_0, a_1 la condizione $(1 + a_0)(1 - a_0) > 0$ è soddisfatta da tutti e soli i punti della fascia $a_0^2 < 1$.

La condizione $(1 - a_0^2)(1 + a_0 - a_1)(1 + a_0 + a_1) > 0$ è soddisfatta dai punti interni all'angolo con vertice $(a_1 a_0) = (-1, 0)$, apertura $\pi/2$ e bisettrice comprendente il semiasse $a_0 > 0$.

La regione dei valori ammissibili per la coppia (a_1, a_0) è allora costituita dai punti interni al triangolo di figura 16.9.1.

- **ESERCIZIO 16.9.1 [RISPOSTA FREQUENZIALE]** Si supponga che il sistema a tempo discreto con funzione di trasferimento $W(z)$ sia BIBO stabile. Si determini il comportamento asintotico dell'uscita $y(\cdot)$ corrispondente a un ingresso sinusoidale

$$u(t) = A \sin(\omega_0 t + \phi)$$

con $t \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{R}_+$

‡ *Soluzione.* Sulla traccia del procedimento seguito nel caso continuo, si pone $u(t) = \Im m \left(A e^{j(\omega_0 t + \phi)} \right)$ e $W(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} w(k) z^{-k}$, dove $\{w(k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ è la risposta impulsiva del sistema. Si ha allora

$$y(t) = \sum_{k=0}^t w(k) u(t-k) = A \Im m \sum_{k=0}^t w(k) e^{j(\omega_0(t-k) + \phi)} = A \Im m \left[e^{j(\omega_0 t + \phi)} \sum_{k=0}^t w(k) e^{-j\omega_0 k} \right] \quad (16.97)$$

e d'altra parte

$$W(e^{j\omega_0}) = \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^t w(k) e^{-j\omega_0 k}.$$

Quindi, quando t tende a infinito,

$$\left| A e^{j(\omega_0 t + \phi)} W(e^{j\omega_0}) - A e^{j(\omega_0 t + \phi)} \sum_{k=0}^t w(k) e^{-j\omega_0 k} \right| \leq A \left| W(e^{j\omega_0}) - \sum_{k=0}^t w(k) e^{-j\omega_0 k} \right| \rightarrow 0 \quad (16.98)$$

Tenuto conto di (16.97) e di (16.98), l'uscita $y(t)$ al divergere di t tende a

$$\Im \left[A e^{j(\omega_0 t + \phi)} W(e^{j\omega_0}) \right] = A |W(e^{j\omega_0})| \sin(\omega_0 t + \phi + \angle W(e^{j\omega_0})) \quad (16.99)$$

- ESERCIZIO 16.9.2 La risposta frequenziale $W(e^{j\omega})$ è periodica in ω , di periodo 2π . Si interpreti questo fatto sulla traccia della discussione svolta nel paragrafo 9.3 per i sistemi a tempo continuo.

16.10 Connessioni fra segnali a tempo continuo e a tempo discreto

Vogliamo esaminare in questo paragrafo alcune relazioni che intercorrono fra

- un segnale a tempo continuo $u(\cdot)$, eventualmente trasformabile secondo Laplace o Fourier, con Laplace trasformata $U(s)$ e Fourier trasformata $U(j\omega)$;
- la successione di impulsi di Dirac

$$p(u) := \sum_k u(k\Delta) (\sigma_{-k\Delta} \delta)$$

e le sue eventuali trasformate di Laplace e di Fourier;

- la successione “numerica”

$$\{v(k)\}_{k \in \mathbb{Z}} := \{u(k\Delta)\}_{k \in \mathbb{Z}}$$

e la sua eventuale \mathfrak{z} -trasformata $V(z)$.

I risultati che otterremo saranno impiegati nel paragrafo successivo per rappresentare e studiare i sistemi a segnali campionati.

Cominciamo ed esaminare le connessioni fra i punti (ii) e (iii).

Proposizione 16.10.1 [SEGNALI A TEMPO DISCRETO E SEQUENZE IMPULSIVE] *Si considerino la successione*

$$\{v(k)\}_{k \in \mathbb{N}}$$

e, la distribuzione, somma di impulsi di Dirac di passo Δ

$$\Gamma = \sum_{k=0}^{+\infty} v(k) (\sigma_{-k\Delta} \delta) \quad (16.100)$$

Se la successione $\{v(k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ è \mathfrak{z} -trasformabile, con raggio di convergenza R e trasformata $V(z)$, allora

i) la distribuzione $e^{-ct}\Gamma$ è temperata per $c > \frac{\ln R}{\Delta}$, ma non per $c < \frac{\ln R}{\Delta}$;

ii) Γ ammette Laplace-trasformata con ascissa di convergenza $\frac{\ln R}{\Delta}$

$$\mathcal{L}(\Gamma) = \sum_{k=0}^{+\infty} v(k) (e^{s\Delta})^{-k} = V(e^{s\Delta}) \quad (16.101)$$

Se $\{v(k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ non è \mathfrak{z} -trasformabile, allora la distribuzione $e^{-ct}\Gamma$ non è temperata per nessun valore di c e Γ non è Laplace-trasformabile.

PROVA Ricordiamo preliminarmente dall'esempio 5.2.8 che la (16.100) fornisce una distribuzione di \mathcal{D}' qualunque sia la successione dei coefficienti $\{v(k)\}_{k \in \mathbb{N}}$. Infatti, grazie al fatto che le funzioni di test hanno supporto compatto, la distribuzione Γ è definita per ogni $\phi \in \mathcal{D}$ da

$$\langle \Gamma, \phi \rangle = \lim_{M \rightarrow +\infty} \left\langle \sum_{k=0}^M v(k) (\sigma_{-\Delta k} \delta), \phi \right\rangle = \lim_{M \rightarrow +\infty} \langle \Gamma_M, \phi \rangle$$

con $\Gamma_M := \sum_{k=0}^M v(k) (\sigma_{-\Delta k} \delta)$.

La (16.100) definisce una distribuzione temperata (ossia un elemento di \mathcal{S}') se esiste ed è finito il limite $\lim_{M \rightarrow +\infty} \langle \Gamma_M, \psi \rangle$, per ogni funzione $\psi \in \mathcal{S}$. Ora, se $c > \frac{\ln R}{\Delta}$ e ψ è una funzione di \mathcal{S} (ossia se ψ è rapidamente decrescente), si ha

$$\begin{aligned} \langle e^{-ct}\Gamma_M, \psi \rangle &= \left\langle \sum_{k=0}^M v(k) (\sigma_{-\Delta k} \delta), e^{-ct}\psi \right\rangle = \sum_{k=0}^M v(k) \langle \sigma_{-\Delta k} \delta, e^{-ct}\psi \rangle \\ &= \sum_{k=0}^M v(k) \langle \delta, (\sigma_{\Delta k} e^{-ct}\psi(\cdot)) \rangle = \sum_{k=0}^M v(k) e^{-c\Delta k} \psi(\Delta k) \end{aligned} \quad (16.102)$$

Essendo $e^{c\Delta} > R$, il modulo di (16.102) è maggiorato da $\max_{t \in \mathbb{R}} |\psi(t)| \sum_{k=0}^{\infty} |v(k) e^{-c\Delta k}| < \infty$, qualunque sia M . Quindi per ogni $\psi \in \mathcal{S}$ esiste finito il limite

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \langle \Gamma_M, \psi \rangle = \lim_{M \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^M v(k) e^{-c\Delta k} \psi(\Delta k) \quad (16.103)$$

Ciò implica, per i risultati sulla trasformata di Laplace delle distribuzioni visti nel capitolo 6, che

- la trasformata di Laplace $\mathcal{L}(\Gamma)$ esiste almeno per $\Re s > \frac{\ln R}{\Delta}$,
- per le proprietà di convergenza riportate nel paragrafo 6.1, la distribuzione Γ ha (16.101) per trasformata di Laplace, ovvero il limite per M tendente a infinito della trasformata di Γ_M ,

$$\mathcal{L}(\Gamma_M) = \sum_{k=0}^M v(k) e^{-s\Delta k} \quad (16.104)$$

- la trasformata $\mathcal{L}(\Gamma)$ si ottiene dalla \mathfrak{z} -trasformata $V(z)$ della successione $\{v(k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ sostituendo formalmente alla variabile z la variabile $e^{s\Delta}$, ovvero $\mathcal{L}(\Gamma) = V(e^{s\Delta})$.

D'altra parte, se $c > \frac{\ln R}{\Delta}$, si può provare che $e^{-ct}\Gamma$ non è una distribuzione temperata. A tale scopo, costruiamo una funzione $\psi \in \mathcal{S}$ tale che non esista il $\lim_{M \rightarrow +\infty} \langle e^{-ct}\Gamma_M, \psi \rangle$. Sia x un numero positivo tale che sia $c + x < \frac{\ln R}{\Delta}$ e sia

$$\psi = \sum_{\nu=0}^{\infty} (\operatorname{sgn} v(\nu)) e^{-\nu\Delta x} (\sigma_{-\nu\Delta}\phi)$$

dove ϕ è qualsiasi funzione di test soddisfacente $\operatorname{supp} \phi \subseteq [-\frac{1}{2}\Delta, \frac{1}{2}\Delta]$ e $\phi(0) = 1$. Chiaramente ψ appartiene a \mathcal{S} , poiché la sua ampiezza tende a zero esponenzialmente quando t tende a infinito.

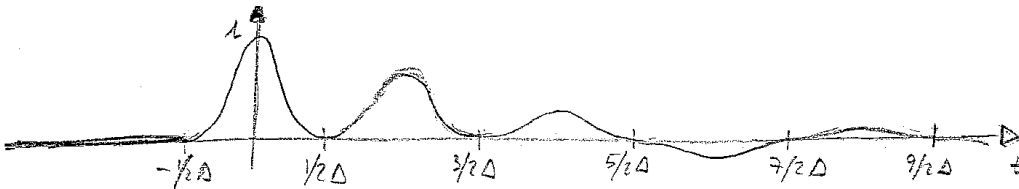


Figura 16.10.1

Abbiamo allora

$$\begin{aligned} \langle e^{-ct}\Gamma_M, \psi \rangle &= \left\langle \sum_{k=0}^M v(k) (\sigma_{-k\Delta}\delta), \sum_{\nu=0}^{\infty} (\operatorname{sgn} v(\nu)) e^{-\nu\Delta x} e^{-ct} (\sigma_{-\nu\Delta}\phi) \right\rangle \\ &= \sum_{k=0}^M v(k) \left\langle \delta, \sum_{\nu=0}^{\infty} (\operatorname{sgn} v(\nu)) e^{-\nu\Delta x} e^{-ct} (\sigma_{-(\nu-k)\Delta}\phi) \right\rangle \\ &= \sum_{k=0}^M v(k) (\operatorname{sgn} v(k)) e^{-k\Delta(x+c)} \phi(0) = \sum_{k=0}^M |v(k)| \left(e^{\Delta(x+c)} \right)^{-k} \end{aligned}$$

che diverge al divergere di k . Infine, se $\{v(k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ non ammette \mathfrak{z} -trasformata, ossia se la serie $\sum_k v(k)z^{-k}$ non converge per $|z| > R$, qualunque sia R , il ragionamento precedente dimostra che $e^{-ct}\Gamma$ non è temperata per nessun valore di c , e quindi la distribuzione Γ non ammette trasformata di Laplace. ■

Supponiamo ora che la successione $\{v(k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ provenga dal campionamento con passo Δ di un segnale $u(\cdot)$ a tempo continuo e nullo per tempi negativi. Allora la distribuzione Γ della proposizione 16.10.1 coincide con la distribuzione impulsiva

$$p(u) = \sum_{k=0}^{+\infty} u(k\Delta) (\sigma_{-k\Delta}\delta)$$

e, nell'ipotesi che $u(\cdot)$ ammetta Laplace-trasformata $U(s) = \mathcal{L}(u)$, è naturale cercare di connettere la sua trasformata $U(s)$ con la trasformata $\mathcal{L}(p(u))$ della sequenza di impulsi. A tale scopo, premettiamo alcuni lemmi preparatori.

Lemma 16.10.2 [INTEGRALE DI DIRICHLET] *Sia $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione localmente sommabile, a supporto compatto, e sia t_0 un punto in cui*

- i) esistono i limiti destro e sinistro $u(t_0+)$ e $u(t_0-)$
 ii) i rapporti incrementali destro e sinistro

$$\frac{u(t_0 + \theta) - u(t_0+)}{\theta}, \quad \frac{u(t_0 - \theta) - u(t_0-)}{-\theta}, \quad \theta > 0$$

si mantengono limitati per θ abbastanza piccolo.

Allora

$$\lim_{\lambda \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{\pi} \int u(t) \frac{\sin(\lambda(t - t_0))}{t - t_0} dt = \frac{u(t_0+) - u(t_0-)}{2} \quad (16.105)$$

Per la dimostrazione, si veda, p.es., [DM] pp. 447 e segg. Qui ci limitiamo ad osservare che le condizioni (i) e (ii) dell'enunciato sono ovviamente soddisfatte se u è continua e derivabile, oppure se è continua in t_0 e a variazione limitata nell'intorno di t_0 e che in entrambi i casi il secondo membro di (16.105) vale $u(t_0)$.

Definizione 16.10.3 [NUCLEO DI DIRICHLET] Per ogni intero non negativo N , il nucleo di Dirichlet di ordine N è la funzione

$$D_N(t) = \sum_{k=-N}^N e^{jkt}$$

ovvero, ricorrendo alle formule di Eulero, la funzione

$$D_N(t) = \begin{cases} \frac{\sin[(2N+1)t/2]}{\sin(t/2)} & \text{per } t \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ 2N+1 & \text{per } t = 2k\pi \end{cases} \quad (16.106)$$

Il lemma seguente consente di rappresentare la sequenza di impulsi di Dirac $p(u)$ modulata dai valori campionari di una funzione u a tempo continuo come limite di una successione di funzioni a tempo continuo.

Lemma 16.10.4 Sia $u(\cdot) \in L^{\text{loc}}$ una funzione continua e derivabile negli istanti $k\Delta$, $k \in \mathbb{Z}$ e a variazione limitata in un loro intorno.

La successione di distribuzioni regolari $\{\Gamma_N\}$ definite da

$$\Gamma_N = \frac{1}{\Delta} \sum_{-N}^N u(t) e^{jk \frac{2\pi}{\Delta} t}, \quad N \in \mathbb{N}, \quad \Delta > 0 \quad (16.107)$$

converge (debolmente) in \mathcal{D}' alla distribuzione singolare

$$p(u) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u(k\Delta) (\sigma_{-k\Delta} \delta) \quad (16.108)$$

PROVA Consideriamo un'arbitraria funzione di test $\phi \in \mathcal{D}$ e valutiamo Γ_N in ϕ :

$$\langle \Gamma_N, \phi \rangle = \frac{1}{\Delta} \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \phi(t) \sum_{k=-N}^N e^{jk \frac{2\pi}{\Delta} t} dt = \frac{1}{\Delta} \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \phi(t) \frac{\sin[(2N+1)\pi t/\Delta]}{\sin[\pi t/\Delta]} dt \quad (16.109)$$

Tenuto conto che il supporto di $u\phi$ è limitato e che il nucleo di Dirichlet $D_N(\frac{2\pi t}{\Delta})$ è una funzione periodica di t , con periodo Δ , la (16.109) si riscrive come

$$\langle \Gamma_N, \phi \rangle = \frac{1}{\Delta} \sum_{\nu} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin[(2N+1)\pi t/\Delta]}{\sin[\pi t/\Delta]} u(t+\nu\Delta)\phi(t+\nu\Delta) dt \quad (16.110)$$

dove la sommatoria è estesa solo a un insieme finito di valori di ν .

Cambiando variabile di integrazione, riscriviamo gli integrali in (16.110) e passiamo al limite quando N diverge:

$$\begin{aligned} & \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \frac{\sin[(2N+1)\pi t/\Delta]}{\pi t/\Delta} \left[\frac{\pi t/\Delta}{\sin[\pi t/\Delta]} u(t+\nu\Delta)\phi(t+\nu\Delta) \right] dt \\ = & \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin(2N+1)x}{x} \left[\frac{x}{\sin x} u\left(\frac{\Delta x}{\pi} + \nu\Delta\right)\phi\left(\frac{\Delta x}{\pi} + \nu\Delta\right) \right] dx \end{aligned} \quad (16.111)$$

Applichiamo ora il lemma 16.10.2 sull'integrale di Dirichlet: tenuto conto che $\sin x/x$ vale 1 per $x=0$ ed è analitica intorno ad $x=0$, e quindi che il fattore

$$\frac{x}{\sin x} u\left(\frac{\Delta x}{\pi} + \nu\Delta\right)\phi\left(\frac{\Delta x}{\pi} + \nu\Delta\right)$$

vale $u(\nu\Delta)\phi(\nu\Delta)$ per $x=0$ ed è analitico intorno ad $x=0$ possiamo concludere che ciascuno degli addendi in (16.110) converge, al divergere di N , a $u(\nu\Delta)\phi(\nu\Delta)$, e che

$$\langle \Gamma_N, \phi \rangle \rightarrow \sum_{\nu} u(\nu\Delta)\phi(\nu\Delta) \quad (16.112)$$

dove la sommatoria è diversa da zero solo nei punti $\nu\Delta$ che appartengono al supporto (limitato) di $u\phi$.

D'altra parte, si ha

$$\langle p(u), \phi \rangle = \left\langle \sum_{\nu} u(\nu\Delta)(\sigma_{-\nu\Delta}\delta), \phi \right\rangle = \sum_{\nu} u(\nu\Delta)\phi(\nu\Delta)$$

e quindi la successione di distribuzioni regolari Γ_N converge debolmente alla distribuzione $p(u)$ in \mathcal{D}' . ■

Se $u(\cdot) \in L_+^{\text{loc}}$ soddisfa le ipotesi del lemma 16.10.4 ed è trasformabile secondo Laplace, con trasformata $U(s)$, anche la funzione definita da $\Gamma_N = \frac{1}{\Delta} \sum_{-N}^N u(t)e^{jk\frac{2\pi}{\Delta}t}$ è trasformabile secondo Laplace

$$\mathcal{L}(\Gamma_N) = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=-N}^N U\left(s + jk\frac{2\pi}{\Delta}\right). \quad (16.113)$$

Al divergere di N , a (16.113) è applicabile allora il teorema di convergenza del paragrafo 6.1 purché, per un'opportuna scelta di c , la successione di distribuzioni regolari $e^{-ct}\Gamma_N$ converga debolmente in \mathcal{S}' :

$$e^{-ct}\Gamma_N \rightarrow e^{-ct}\Gamma \quad \text{in } \mathcal{S}' \quad (16.114)$$

Quando è verificata la (16.114), esiste la trasformata di Laplace distribuzionale della distribuzione Γ ed essa coincide con il limite della (16.113) per $N \rightarrow \infty$.

Una situazione in cui vale la (16.114) è oggetto della seguente proposizione, che ci limitiamo ad enunciare.

Proposizione 16.10.5 [TRASFORMATE DI UN SEGNALE CONTINUO E DI UNA SEQUENZA IMPULSIVA] *Se $u(\cdot) \in L_+^{\text{loc}}$ è continua e derivabile negli istanti di campionamento $k\Delta$, $k \in \mathbb{Z}$ e se esiste $c \in \mathbb{R}$ tale per cui*

$$e^{-ck\Delta}u(k\Delta) \in \ell_+^\infty \quad \text{e} \quad e^{-ct}u(t) \in L_+^\infty$$

allora la funzione $u(\cdot)$ ha Laplace trasformata $U(s)$, le distribuzioni

$$\Gamma_N = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=-N}^N u(t)e^{jk\frac{2\pi}{\Delta}t} \quad \text{e} \quad \Gamma = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(t)e^{jk\frac{2\pi}{\Delta}t}$$

soddisfano (16.114) e si ha

$$U^*(s) := \mathcal{L}(p(u)) = \mathcal{L}\left(\sum_{k=0}^{\infty} u(k\Delta)(\sigma_{-k\Delta}\delta)\right) = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} U\left(s + j\frac{2\pi k}{\Delta}\right) = \mathcal{L}(\Gamma) \quad \blacksquare \quad (16.115)$$

Quando sussistono le condizioni perché (16.115) converga sull'asse immaginario, si ha

$$U^*(j\omega) := \mathcal{F}(p(u)) = \mathcal{F}\left(\sum_{k=0}^{\infty} u(k\Delta)(\sigma_{-k\Delta}\delta)\right) = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} U\left(j\omega + j\frac{2\pi k}{\Delta}\right), \quad (16.116)$$

che esprime il legame fra lo spettro del segnale impulsivo $p(u)$ e quello del segnale a tempo continuo u . Si vede immediatamente che $U^*(j\omega)$ è una funzione periodica di ω , con periodo $2\pi/\Delta$.

Osservazione La possibilità di ricostruire lo spettro di $u(\cdot)$ da quello della successione impulsiva $p(u)$ è realizzabile quando si sappia che lo spettro di $u(\cdot)$ si estende soltanto a $[-\pi/\Delta, \pi/\Delta]$. In questo caso, infatti, $U^*(j\omega)$ è la giustapposizione di infinite copie traslate di $U(j\omega)$, priva di sovrapposizioni, e $U(j\omega)$ si recupera da $U^*(j\omega)$ semplicemente restringendone il dominio a $[-\pi/\Delta, \pi/\Delta]$, ovvero filtrando $U^*(j\omega)$ con un passabasso ideale a maschera rettangolare e taglio in π/Δ .

In assenza di tale restrizione sullo spettro di $u(\cdot)$, esistono infiniti spettri diversi che, combinandosi come nella (16.116), riproducono lo spettro periodico $U^*(j\omega)$.

Si noti inoltre che un segnale $u(\cdot)$ il cui spettro abbia supporto limitato deve avere durata infinita sia per tempi positivi che per tempi negativi [Pa]. Di conseguenza, un segnale $u(\cdot) \in L_+^{\text{loc}}$ non può mai soddisfare esattamente la condizione di avere uno spettro limitato, e la ricostruzione del suo spettro da quello di $p(u)$ ha carattere approssimato.

Come ultimo risultato, riportiamo un classico teorema di Shannon, che dimostra come, sotto opportune condizioni sulla spettro del segnale continuo $u(\cdot)$, sia possibile ricostruire l'intero andamento del segnale a tempo continuo a partire dalla successione $\{u(k\Delta)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ dei suoi valori istantanei negli istanti di campionamento $k\Delta$. Si noti che la ricostruzione "esatta" richiede che

- $u(\cdot)$ abbia spettro limitato (e quindi supporto non limitato anche per tempi negativi),
- l'intervallo di campionamento Δ sia sufficientemente piccolo,

Proposizione 16.10.6 [TEOREMA DEL CAMPIONAMENTO] Sia $u(\cdot)$ un segnale L^2 con Fourier trasformata $U(j\omega) = 0$ per $|\omega| \geq \Omega$. Allora

- $u(\cdot)$ è una funzione continua⁶;
- $u(\cdot)$ è completamente determinato dai suoi valori negli istanti

$$k \frac{\pi}{\Omega} = k\Delta, \quad (16.117)$$

avendosi, per ogni $t \in \mathbb{R}$,

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u(k\Delta) \frac{\sin\left(\pi\left(\frac{t}{\Delta} - k\right)\right)}{\pi\left(\frac{t}{\Delta} - k\right)} \quad (16.118)$$

PROVA (i) La trasformata di Fourier di una funzione L^2 è (cfr. [Fo]) una funzione L^2 , e una funzione L^2 con supporto limitato è anche una funzione L^1 . Quindi $U(j\omega)$ è sommabile e si può applicare la formula di inversione

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t} U(j\omega) d\omega. \quad (16.119)$$

La continuità è allora conseguenza della diseuguaglianza

$$|u(t + \Delta t) - u(t)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| (e^{j\omega(t+\Delta t)} - e^{j\omega t}) U(j\omega) \right| d\omega \quad (16.120)$$

e del teorema di convergenza dominata dell'integrale di Lebesgue.

(ii) Si sviluppa in serie di Fourier sull'intervallo $[-\Omega, +\Omega]$ la funzione $U(j\omega)$

$$U(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_{-k} e^{-jk \frac{\pi\omega}{\Omega}}, \quad |\omega| < \Omega$$

dove i coefficienti c_{-k} sono dati da

$$c_{-k} = \frac{1}{2\Omega} \int_{-\Omega}^{\Omega} U(j\omega) e^{jk \frac{\pi\omega}{\Omega}} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} \frac{\pi}{\Omega} U(j\omega) e^{j\omega \frac{k\pi}{\Omega}} d\omega = \frac{\pi}{\Omega} u\left(\frac{k\pi}{\Omega}\right) \quad (16.121)$$

In (16.121) si sono cambiati gli estremi di integrazione utilizzando il fatto che $U(j\omega)$ è nulla fuori dell'intervallo $[\Omega, \Omega]$ e si è applicata la formula di inversione dell'integrale di Fourier. Si ha allora⁷

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} U(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{\Omega} u\left(\frac{k\pi}{\Omega}\right) e^{-jk \frac{\pi\omega}{\Omega}} \right] d\omega$$

⁶Più correttamente, la classe di equivalenza dei segnali con trasformata $U(j\omega)$ contiene una (e necessariamente una sola) funzione continua, ed è tale funzione che viene campionata e ricostruita

⁷L'integrazione termine a termine in (16.122) è lecita perché la serie di Fourier di $U(j\omega)$ converge nello spazio di Hilbert $L^2(-\Omega, \Omega)$, e in tale spazio stiamo eseguendo essenzialmente il prodotto interno di $e^{j\omega}$ con la serie. La continuità del prodotto interno consente allora di scambiare somma e integrazione.

$$= \frac{1}{2\Omega} \sum_{k=-\infty}^{\infty} u\left(\frac{k\pi}{\Omega}\right) \int_{-\Omega}^{\Omega} e^{j\omega(t-\frac{k\pi}{\Omega})} d\omega = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u\left(\frac{k\pi}{\Omega}\right) \frac{\sin(\Omega t - k\pi)}{\Omega t - k\pi} \quad (16.122)$$

■

16.11 Campionamento e ricostruzione di un segnale continuo

Nel contesto dei controlli e delle comunicazioni, il processo di *campionamento* consiste essenzialmente nel sostituire ad un segnale a tempo continuo

$$y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto y(t) \quad (16.123)$$

una successione di numeri reali

$$\{y(t_k)\}, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (16.124)$$

costituita dai valori assunti da $y(\cdot)$ negli istanti t_k di campionamento.

La successione, opportunamente digitalizzata, è elaborata dal calcolatore, che fornisce in uscita una nuova sequenza di numeri. Questa viene poi convertita in un segnale a tempo continuo tramite un convertitore Discreto/Continuo, con un'operazione che viene detta "ricostruzione del segnale".

I modelli matematici sviluppati finora per i segnali a tempo discreto e per la loro elaborazione si attagliano, per così dire, al "punto di vista del calcolatore": le variabili che rappresentano il segnale misurato e quello di controllo sono considerate solo negli istanti di campionamento e la funzione di trasferimento $W(z)$ rappresenta l'algoritmo che il calcolatore implementa sulla sequenza numerica di ingresso per produrre quella di uscita. Quando invece interessa chiarire la dinamica del processo o, come si suol dire, quando si adotta il "punto di vista del processo", è necessario tener conto del comportamento anche negli istanti compresi fra quelli di campionamento e fornire un modello matematico adeguato per i segnali a tempo continuo fisicamente presenti nei vari punti del sistema.

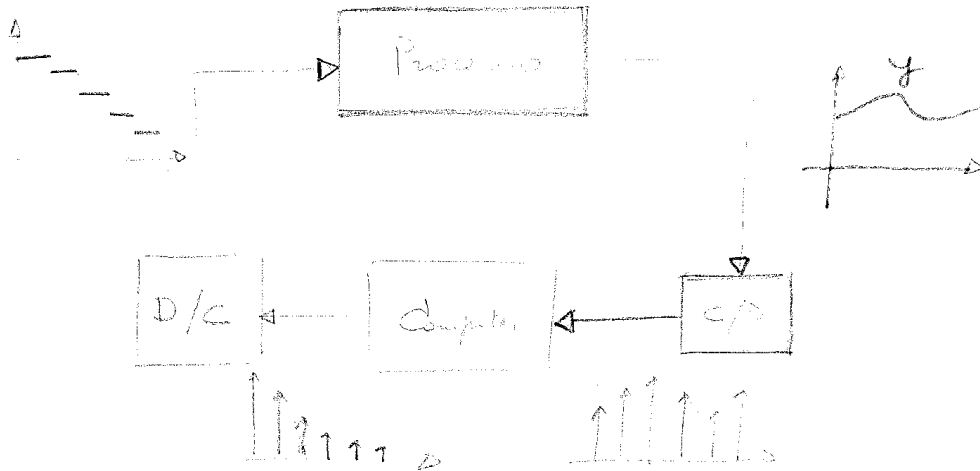


Figura 16.11.1

Nel caso generale, il passo di campionamento $t_{k+1} - t_k$ può dipendere da k . Noi, tuttavia, faremo l'ipotesi semplificativa che esso sia costante, ovvero che sia

$$t_{k+1} - t_k = \Delta, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

e supporremo (ciò non è restrittivo, eventualmente traslando l'asse dei tempi) che sia $t_0 = 0$, in modo da avere

$$t_k = k\Delta, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Dal punto di vista realizzativo, gli eventi di campionamento, gli accessi e le uscite del calcolatore, nonché gli eventi di cambiamento del livello in uscita dal ricostruttore del segnale continuo, sono sincronizzati dal clock del calcolatore.

In condizioni ideali, possiamo pensare che l'uscita "fisica" del sistema C/D consista in una successione di impulsi di Dirac (in realtà, si tratterà di funzioni che approssimano la distribuzione di Dirac) con supporto negli istanti Δ e modulata in ampiezza dalla funzione $y(\cdot)$. Quindi

$$p(y) = \sum_k y(k\Delta)(\sigma_{k\Delta}\delta). \quad (16.125)$$

Si noti che la mappa $p : y \mapsto p(y)$ che associa al segnale continuo y la successione impulsiva (16.125) è una mappa lineare, ma non è tempo-invariante, avendosi

$$\left(\sigma_\xi p(y)\right)(t) = \sum_k y(k\Delta)(\sigma_{\xi+k\Delta}\delta) = \sum_k y(k\Delta)\delta(t - \xi - k\Delta)$$

che non coincide con

$$\left(p(\sigma_\xi y)\right)(t) = \sum_k y(k\Delta - \xi)\delta(t - k\Delta).$$

Quindi la p non è rappresentabile con un operatore di convoluzione.

Sulla (16.125), assimilata dal punto di vista del contenuto informativo alla successione numerica $\{y(k\Delta)\}$, il calcolatore opera come sistema a tempo discreto, producendo in uscita una successione $\{u(k\Delta)\}$, anch'essa costituita fisicamente da una distribuzione di impulsi di Dirac modulati in ampiezza

$$\sum_k u(k\Delta)(\sigma_{k\Delta}\delta) \quad (16.126)$$

Il passaggio dalla (16.126) al segnale "a scala"

$$g(u) = \sum_k u(k\Delta)\left(\sigma_{-k\Delta}\delta^{(-1)} - \sigma_{-(k+1)\Delta}\delta^{(-1)}\right) \quad (16.127)$$

è realizzato da un "circuitto di tenuta" (holder) che integra l'impulso $u(k\Delta)\delta(t - k\delta)$ sull'intervallo $k\Delta, (k+1)\Delta$ ed è reinizializzato sullo zero alla fine dell'intervallo. La mappa che associa a $p(u)$ il segnale $g(u)$ è tempo invariante e lineare. Infatti, da

$$\sigma_{-k\Delta}\delta^{(-1)} = \delta^{(-1)} \star \sigma_{-k\Delta}\delta$$

$$\sigma_{-(k+1)\Delta}\delta^{(-1)} = \sigma_{-\Delta}\delta^{(-1)} \star \sigma_{-k\Delta}\delta$$

si trae

$$g(u) = \left(\delta^{(-1)} - \sigma_{-\Delta}\delta^{(-1)}\right) \star p(u) \quad (16.128)$$

e pertanto la mappa $p(u) \mapsto g(u)$ ha carattere convolutorio, con nucleo di convoluzione la funzione “rettangolare” $\delta^{(-1)} - \sigma_{-\Delta}\delta^{(-1)}$ riportata in fig. 16.11.2.

In termini di funzioni di trasferimento, l’holder è descritto dalla funzione non razionale

$$H(s) = \frac{1 - e^{-s\Delta}}{s} \quad (16.129)$$

Esempio 16.11.1 Si consideri un circuito “sample and hold”, costituito da un campionatore con istanti di campionamenti $k\Delta$, $k \in \mathbb{Z}$ e da un holder a passo Δ , posti in serie a un processo lineare e invariante con funzione di trasferimento $W(s)$, La funzione di trasferimento del sistema “a valle” del campionatore (si veda la figura 16.11.3) è

$$H(s)W(s) = \frac{1 - e^{-s\Delta}}{s}W(s) \quad (16.130)$$

mentre la Laplace trasformata del segnale $p(u)$ è

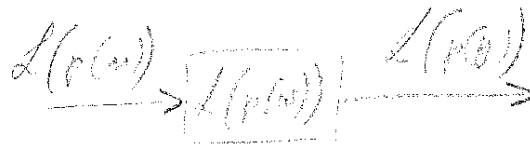
$$U^*(s) = \sum_k e^{-sk\Delta}u(k\Delta) \quad (16.131)$$

Quindi l’uscita y ha trasformata

$$Y(s) = H(s)W(s)U^*(s) \quad (16.132)$$

Si noti che non è possibile fattorizzare $Y(s)$ nel prodotto di una funzione di trasferimento per la trasformata $U(s)$ di $u(\cdot)$, ossia non è possibile rappresentare il legame fra $U(s)$ e $Y(s)$ mediante una funzione di trasferimento. Ciò a causa della non-invarianza del campionamento.

Consideriamo ora un sistema lineare con funzione di trasferimento $W(s)$, pilotato da una sequenza impulsiva modulata di $u(\cdot)$ e la cui uscita y viene campionata in $p(y)$.



Se $w(\cdot)$ è la risposta impulsiva del sistema, si ha

$$\begin{aligned} y(k\Delta) &= (w \star p(u))(k\Delta) = \left(\sum_h u(h\Delta)(w \star \sigma_{-h\Delta}\delta)\right)(k\Delta) \\ &= \sum_h u(h\Delta)(\sigma_{-h\Delta}w)(k\Delta) = \sum_h u(h\Delta)w(k\Delta - h\Delta) \end{aligned} \quad (16.133)$$

La (16.133) può essere interpretata in vari modi, fra loro equivalenti.

- a) La successione $\{y(k\Delta)\}$ è la convoluzione discreta della successione campionata $\{u(k\Delta)\}$ con la successione $\{w(k\Delta)\}$ ottenuta campionando negli istanti $k\Delta$ la risposta impulsiva del sistema a tempo continuo.

$$\begin{aligned}
\text{b) } Y^*(s) &:= \mathcal{L}(p(y)) = \sum_k y(k\Delta) e^{-sk\Delta} = \sum_k \left(\sum_h u(h\Delta) w(k\Delta - h\Delta) \right) e^{-sk\Delta} \\
&= \sum_k \sum_h u(h\Delta) e^{-sh\Delta} w(k\Delta - h\Delta) e^{-s(k\Delta - h\Delta)} \\
&= \left(\sum_k w(k\Delta) e^{-sk\Delta} \right) \left(\sum_h u(h\Delta) e^{-sh\Delta} \right) \\
&= \mathcal{L}(p(w)) \mathcal{L}(p(u)) = W^*(s) U^*(s) \tag{16.134}
\end{aligned}$$

Alle Laplace trasformate, $p(y)$ può essere vista come l'uscita di un sistema lineare tempo-invariante con funzione di trasferimento $\mathcal{L}(p(w))$ e sollecitato dall'ingresso $p(u)$.

c) con passaggi analoghi a quelli per ottenere (16.134), si ricava

$$Y(z) = \sum_k y(k\Delta) z^{-k} = \left(\sum_\ell w(\ell\Delta) z^{-\ell} \right) \left(\sum_h u(h\Delta) z^{-h} \right) \tag{16.135}$$

ovvero la successione $\{y(k\Delta)\}$ ha per z -trasformata il prodotto delle z -trasformate di $\{w(\ell\Delta)\}$ e di $\{u(k\Delta)\}$.

Osservazione L'operazione che abbiamo indicato con $*$ e che associa alla Laplace trasformata di un segnale continuo la trasformata di Laplace della sequenza a modulazione impulsiva, ha la proprietà

$$(U^*W)^* = U^*W^* \tag{16.136}$$

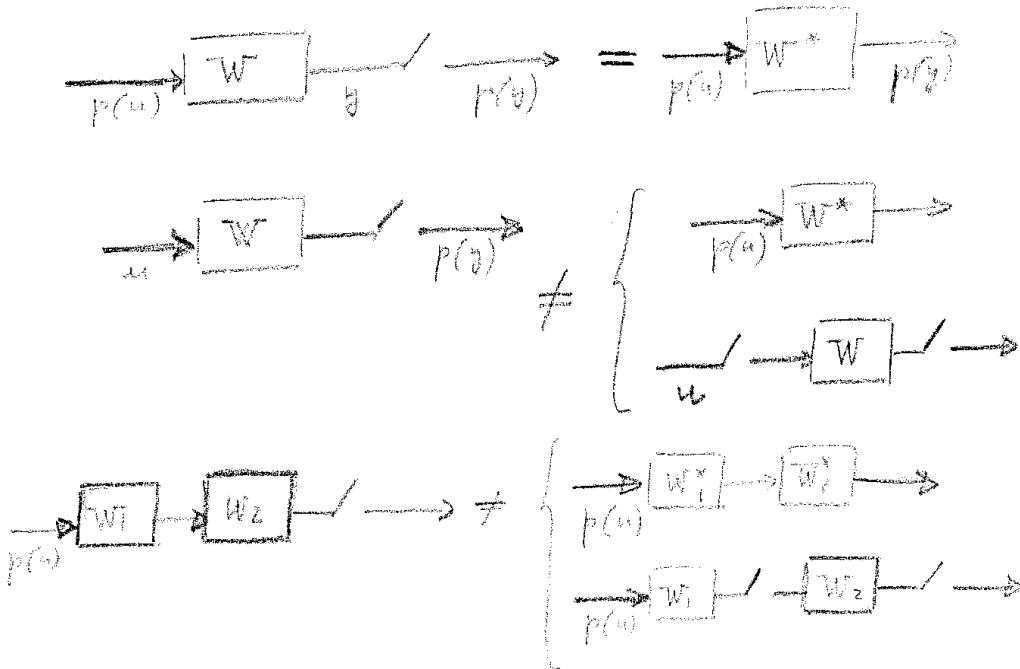
In generale, però, risulta

$$(UW)^* \neq U^*W^* \tag{16.137}$$

e anche

$$(U^*W_1W_2)^* \neq U^*W_1^*W_2^* \tag{16.138}$$

Le rappresentazioni a blocchi nelle figure che seguono schematizzano la situazione dei vari casi.



16.12 Il formalismo dei sistemi a segnali campionati

Per trattare un sistema a segnali campionati, si può seguire la procedura seguente, che porta a rappresentarlo mediante un diagramma a blocchi.

- i) ogni convertitore C/D è rappresentato da un campionatore ideale che modula in ampiezza una successione di impulsi di Dirac;
- ii) ogni convertitore D/C è rappresentato da un circuito di tenuta (holder) con funzione di trasferimento

$$H(s) = \frac{1 - e^{-s\Delta}}{s};$$

- iii) i blocchi lineari a tempo continuo sono caratterizzati dalle rispettive funzioni di trasferimento (i.e.dalle Laplace trasformate delle risposte impulsive);
- iv) le operazioni lineari eseguite dal calcolatore sono assimilate a mappe ingresso/uscita di un sistema a tempo discreto, quindi descritte alle z -trasformate da qualche funzione $C(z)$ della variabile complessa z , cosicché nel dominio s il legame fra le successioni di impulsi in ingresso e in uscita dal calcolatore è fornito da una funzione di trasferimento $C(e^{s\Delta})$;
- v) si usano le abituali regole di riduzione degli schemi a blocchi, tenendo conto di (16.134) e della proposizione 16.10.5

Esempio 16.12.1 Si consieri la configurazione di figura 16.12.1, che rappresenta un sistema controllato da un calcolatore

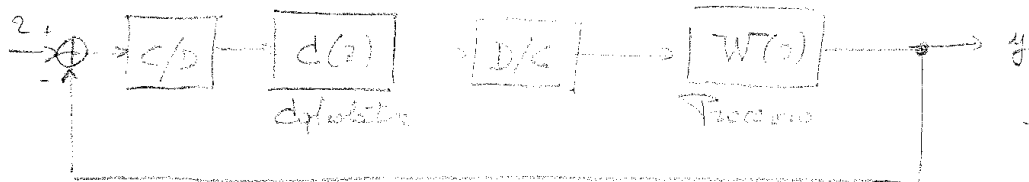


Figura 16.12.1

Il processo da controllare è lineare con funzione di trasferimento $W(s)$ e l'algorithmo implementato dal calcolatore è rappresentato da una funzione di trasferimento $C(z)$.

- Il convertitore C/D è rappresentato da un campionatore ideale.
- Il calcolatore è visto come un sistema con funzione di trasferimento $C(e^{s\Delta})$, che trasforma la sequenza impulsiva di ingresso nella sequenza impulsiva di uscita.
- Il convertitore D/C è rappresentato da un holder, con funzione di trasferimento $(1 - e^{s\Delta})/s$.

Si ottiene allora il diagramma di figura 16.12.2.

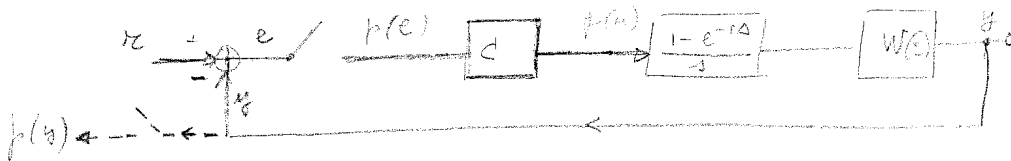


Figura 16.12.2

La “parte analogica” è costituita dall’holder e dal processo, e ha funzione di trasferimento

$$F(s) = \frac{1}{s}(1 - e^{s\Delta})W(s) \quad (16.139)$$

Denotando con $U^*(s)$ la trasformata di $p(u)$, abbiamo

$$Y(s) = F(s)U^*(s) \quad (16.140)$$

che esprime alle Laplace trasformate il legame fra il segnale impulsivo $p(u)$ in uscita dal calcolatore e il segnale continuo y corrispondentemente prodotto dal processo.

Applicando i risultati del paragrafo precedente, possiamo anche esprimere il legame fra il segnale $p(u)$ e il campionato $p(y)$ di y :

$$Y^*(s) = F^*(s)U^*(s) \quad (16.141)$$

dove

$$F^*(s) = \sum_h F(s + j\frac{2\pi h}{\Delta}) \quad (16.142)$$

è la trasformata della sequenza impulsiva modulata dalla risposta impulsiva del blocco $F(s)$

Si noti che la (16.141) può anche essere riespressa alle z -trasformate, pensando ai segnali discreti associati alle successioni impulsive:

$$\begin{aligned} \sum_k y(k\Delta)z^{-k} &= [F^*(s)]_{s=(\ln z)/\Delta} \sum_k u(k\Delta)z^{-k} \\ \tilde{Y}(z) &= \tilde{F}(z)\tilde{U}(z) \end{aligned}$$

Se $\tilde{E}(z)$ denota la z -trasformata della successione di errore in ingresso al calcolatore, il legame fra le z -trasformate di $\tilde{E}(z)$ e $\tilde{Y}(z)$ è dato da

$$\tilde{Y}(z) + C(z)\tilde{F}(z)\tilde{E}(z)$$

- **ESERCIZIO 16.12.1** Nello schema di figura 16.12.3 si verifichi che, alle z -trasformate, il legame fra $\{r(k\Delta)\}$ e $\{y(k\delta)\}$ è dato da

$$\tilde{Y}(z) = \frac{C(c)\tilde{F}(z)}{1 + C(z)\tilde{F}(z)}\tilde{R}(z)$$

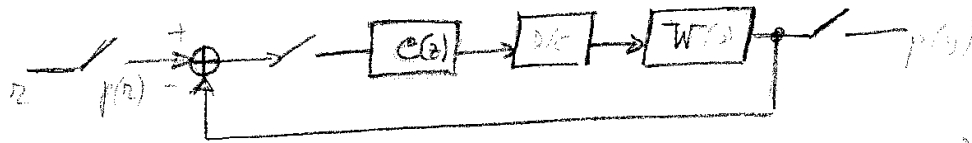


Figura 16.12.3

Esempio 16.12.2 [MULTIPLEXER] Nel sistema di figura 16.12.4 vengono misurati due segnali analogici y_1 e y_2 , che vengono riportati in ingresso al calcolatore insieme con un segnale di controllo u_c . I tre segnali fungono da ingresso a un “multiplexer”, che li rileva sequenzialmente, e in forma digitalizzata, sono inviati all’ingresso del calcolatore.

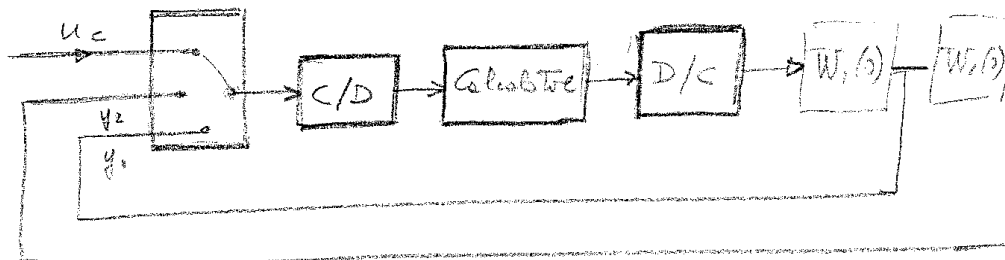


Figura 16.12.4

Siano Δ è il passo di campionamento, $\{u_c(k\Delta)\}$, $\{y_1(k\Delta)\}$ e $\{y_2(k\Delta)\}$ le sequenze campionate corrispondenti ai segnali continui u_c, y_1, y_2 , $\{u(k\Delta)\}$ la successione in uscita dal calcolatore e ipotizziamo che l'algoritmo realizzato dal calcolatore sia lineare nelle sequenze d'ingresso. Abbiamo allora

$$U(z) = C_c(z)U_c(z) + C_1(z)Y_1(z) + C_2(z)Y_2(z)$$

dove si è posto

$$U(z) = \sum u(k\Delta)z^{-k}, \quad U_c(z) = \sum u_c(k\Delta)z^{-k}, \quad Y_i(z) = \sum y_i(k\Delta)z^{-k}, \quad i = 1, 2$$

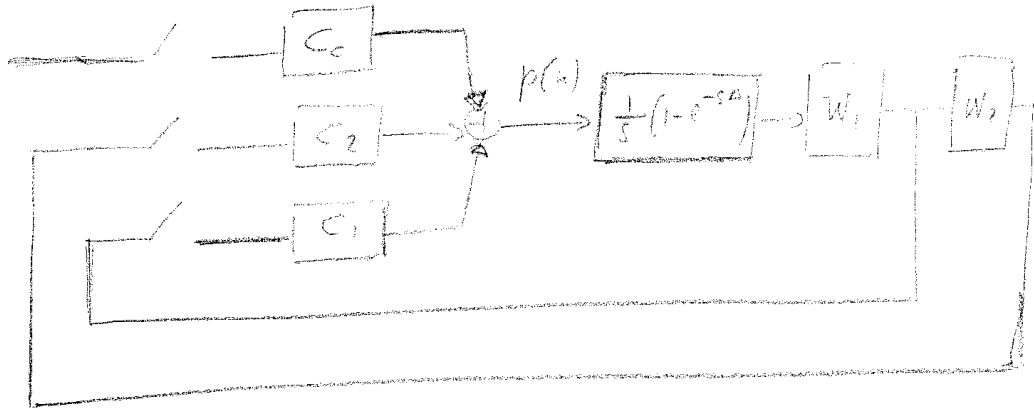


Figura 16.12.5

Ponendo

$$F_1(s) = W_1(s) \frac{1 - e^{-s\Delta}}{s}, \quad F_2(s) = F_1(s)W_2(s)$$

e denotando con $Y^*(s)$ la trasformata di Laplace della sequenza impulsiva $p(u)$, si ha

$$Y_1(s) = F_1(s)U^*(s), \quad Y_2(s) = F_2(s)U^*(s)$$

e quindi

$$\mathcal{L}(p(y_1)) = Y_1^*(s) = F_1^*(s)U^*(s), \quad \mathcal{L}(p(y_2)) = Y_2^*(s) = F_2^*(s)U^*(s)$$

Per approfondimenti, si veda [AW] pp 285 e segg.

16.13 Riferimenti bibliografici

- [AW] Astrom, Wittenmark :“ Computer controlled systems”, Prentice-Hall,
- [Ca] J.Cadzwow “Discrete time systems” Prentice-Hall 1973
- [DM] G.De Marco “Analisi II”, Decibel-Zanichelli
- [Du] R.Dudley “Real analysis and probability”
- [Fo] G.B.Folland “Fourier analysis and its applications”, Wadsworth, 1992
- [Fr] B.Friedland “Advanced control system design” prentice Hall, 1996
- [MM] G.Marchesini, L.Mariani “Elementi di teoria dei sistemi di controllo a segnali campionati”, CLEUP, 1965
- [Pa] A.Papoulis “The Fourier integral and its applications”, McGraw Hill, 1962
- [ZD] Zadeh, Desoer “Linear system theory” (capitolo 10), McGraw Hill, 1963