

INDICE

| | |
|---|------------|
| 1. INTRODUZIONE | 1 |
| 1.1 La costruzione di modelli matematici | 1 |
| 1.2 Classificazione dei modelli | 7 |
| 1.3 Rappresentazioni esterne ed interne | 15 |
| 1.4 Modelli di stato | 18 |
| 1.5 Modelli di stato lineari e invarianti | 23 |
| 1.6 Linearizzazione | 28 |
| 1.7 Sistemi lineari algebricamente equivalenti | 35 |
| 1.8 Problemi di analisi e di sintesi | 37 |
| 2. DINAMICA DEI SISTEMI LINEARI E SUE RAPPRESENTAZIONI | 41 |
| 2.1 Evoluzione nel dominio del tempo dei sistemi discreti | 41 |
| 2.2 Segnali e operazioni sui segnali a tempo discreto | 44 |
| 2.2.1 Serie formali di potenze | 44 |
| 2.2.2 Operazioni lineari sui segnali discreti: modelli MA, AR, ARMA | 50 |
| 2.3 Rappresentazione in z di evoluzione libera e forzata | 56 |
| 2.3.1 Matrice di trasferimento | 56 |
| 2.3.2 Ricorrenza e movimento libero | 58 |
| 2.3.3 Struttura ricorsiva del movimento forzato | 60 |
| 2.4 Analisi modale dei sistemi lineari discreti | 61 |
| 2.4.1 Potenze della matrice F | 61 |
| 2.4.2 I modi e la loro struttura | 63 |
| 2.4.3 Eccitazione dei modi | 69 |
| 2.5 Sistemi continui | 71 |
| 2.5.1 Evoluzione libera | 71 |
| 2.5.2 Proprietà delle matrici esponenziali | 75 |
| 2.5.3 Evoluzione forzata e movimento in condizioni generiche | 80 |
| 2.6 Rappresentazione in s di evoluzione libera e forzata | 83 |
| 2.6.1 Matrice di trasferimento | 83 |
| 2.6.2 Relazioni di ricorrenza | 84 |
| 2.7 Analisi modale dei sistemi lineari continui | 86 |
| 2.8 Carattere di convergenza dei modi | 92 |
| 2.9 Geometria delle traiettorie in evoluzione libera | 95 |
| 2.10 Modi dominanti | 99 |
| 2.11 Sensibilità degli autovalori alle perturbazioni | 103 |
| 3. ANALISI DELLA STABILITÀ | 109 |
| 3.1 Equilibrio e stabilità dell'equilibrio nei sistemi autonomi | 110 |
| 3.2 Stabilità dei sistemi lineari | 115 |
| 3.3 Stabilità dei sistemi continui: il metodo diretto di Lyapunov | 117 |
| 3.3.1 Funzioni definite positive | 118 |
| 3.3.2 Criterio di stabilità | 120 |

| | | |
|-----------|--|------------|
| 3.3.3 | Stabilità “in grande” | 125 |
| 3.3.4 | Criteri di instabilità | 126 |
| 3.4 | Stabilità dei sistemi discreti: il metodo diretto di Lyapunov | 129 |
| 3.4.1 | Criterio di stabilità | 129 |
| 3.4.2 | Criterio di instabilità | 131 |
| 3.5 | Equazioni di Lyapunov | 132 |
| 3.5.1 | Equazione per i sistemi lineari continui | 133 |
| 3.5.2 | Equazione per i sistemi lineari discreti | 135 |
| 3.5.3 | Considerazioni conclusive | 139 |
| 3.6 | Analisi della stabilità con il metodo di linearizzazione | 141 |
| 3.7 | Sistemi unidimensionali: casi critici per la linearizzazione | 151 |
| 4. | ANALISI DELLA STABILITÀ: ALCUNI APPROFONDIMENTI | 155 |
| 4.1 | Insiemi invarianti e insiemi limite | 155 |
| 4.2 | Principio di invarianza di LaSalle e criterio di Krasowskii | 161 |
| 4.3 | Traiettorie periodiche di un sistema autonomo continuo | 166 |
| 4.3.1 | Insiemi limite di traiettorie piane | 166 |
| 4.3.2 | Indice di una curva chiusa piana e applicazioni | 168 |
| 4.3.3 | Stabilità delle traiettorie chiuse | 171 |
| 4.4 | Traiettorie periodiche di un sistema autonomo discreto | 173 |
| 4.4.1 | Stati periodici | 173 |
| 4.4.2 | Traiettorie periodiche in sistemi unidimensionali | 175 |
| 4.5 | Proprietà dell’equilibrio nei sistemi unidimensionali | 183 |
| 4.6 | Mappe di Lyapunov e di Sylvester | 188 |
| 5. | RAGGIUNGIBILITÀ E CONTROLLABILITÀ | 197 |
| 5.1 | Raggiungibilità dei sistemi lineari discreti | 197 |
| 5.2 | Controllabilità dei sistemi lineari discreti | 203 |
| 5.3 | Raggiungibilità e controllabilità dei sistemi lineari e continui | 208 |
| 5.4 | Ingressi di controllo e matrici gramiane | 212 |
| 5.5 | Controllo e matrici gramiane su orizzonte infinito | 218 |
| 5.6 | Controllo del movimento su un sottospazio | 221 |
| 5.7 | Rappresentazione dei sistemi non raggiungibili | 223 |
| 5.7 | Ulteriori criteri di raggiungibilità | 227 |
| 6. | RETROAZIONE DALLO STATO | 233 |
| 6.1 | Equazioni di stato dei sistemi retroazionati | 233 |
| 6.2 | Invarianti e forme canoniche | 237 |
| 6.3 | Forma canonica di controllo | 240 |
| 6.4 | Allocazione degli autovalori: caso $m = 1$ | 243 |
| 6.5 | Allocazione degli autovalori: caso $m > 1$ | 249 |
| 6.6 | Invarianti di controllo e teorema di Rosenbrock | 254 |
| 6.7 | Forme canoniche e allocazione degli autovalori: caso $m > 1$ | 259 |
| 6.8 | Stabilizzazione mediante reazione dallo stato | 264 |

| | |
|---|------------|
| 7. OSSERVABILITÀ E STIMA DELLO STATO | 267 |
| 7.1 Osservabilità dei sistemi lineari e discreti | 267 |
| 7.2 Ricostruibilità dei sistemi lineari discreti | 275 |
| 7.3 Osservabilità e ricostruibilità dei sistemi lineari e continui | 277 |
| 7.4 Dualità | 281 |
| 7.5 Decomposizione canonica | 285 |
| 7.6 Stimatori asintotici dello stato | 287 |
| 7.6.1 <i>Stimatori di ordine intero</i> | 287 |
| 7.6.2 <i>Stimatori di ordine ridotto</i> | 290 |
| 7.7 Sintesi del regolatore | 294 |
| 8. ELEMENTI DI TEORIA DELLA REALIZZAZIONE | 301 |
| 8.1 Realizzazione di mappe lineari ingresso-uscita | 301 |
| 8.2 Realizzazioni minime | 306 |
| 8.3 Relazioni fra stabilità interna e stabilità esterna | 310 |
| 8.4 Risposta impulsiva, stabilità BIBO ed energia dei segnali | 317 |
| 8.4.1 <i>Mappe lineari ingresso-uscita e stabilità BIBO</i> | 317 |
| 8.4.2 <i>Energia dei segnali e norma delle matrici di trasferimento</i> | 321 |
| 8.5 Risposta impulsiva: realizzazione con l'algoritmo di Ho | 326 |
| 8.5.1 <i>Ricorrenza</i> | 326 |
| 8.5.2 <i>Matrici di Hankel</i> | 328 |
| 8.5.3 <i>Algoritmo di Ho</i> | 335 |
| 8.6 Realizzazioni parziali | 337 |
| 8.7 Realizzazioni bilanciate | 349 |
| 8.8 Riduzione del modello | 353 |
| 8.8.1 <i>troncamento bilanciato: proprietà strutturali</i> | 353 |
| 8.8.2 <i>Errore nei modelli di ordine ridotto</i> | 355 |
| 8.8.3 <i>Norma di Hankel (cenni)</i> | 361 |
| 9. CONNESSIONE DI SISTEMI | 367 |
| 9.1 Connessioni elementari di sistemi strettamente propri | 367 |
| 9.1.1 <i>Collegamento in parallelo</i> | 367 |
| 9.1.2 <i>Collegamento in serie</i> | 369 |
| 9.1.3 <i>Collegamento in retroazione</i> | 372 |
| 9.2 Connessione di sistemi non strettamente propri | 375 |
| 9.3 Connessione fra sistemi discreti e sistemi continui | 378 |
| 10. ELEMENTI DI TEORIA DEL CONTROLLO OTTIMO | 385 |
| 10.1 Introduzione | 385 |
| 10.2 Controllo ottimo su intervallo finito dei sistemi lineari discreti | 391 |
| 10.2.1 <i>Impostazione del problema</i> | 391 |
| 10.2.2 <i>Minimizzazione dell'indice</i> | 393 |
| 10.2.3 <i>Complementi</i> | 397 |

| | | |
|------------|---|------------|
| 10.3 | Controllo ottimo su intervallo infinito dei sistemi lineari discreti | 401 |
| 10.3.1 | <i>Considerazioni preliminari</i> | 401 |
| 10.3.2 | <i>Soluzione del problema ed equazione algebrica di Riccati</i> | 403 |
| 10.3.3 | <i>Matrice M_∞ definita positiva e osservabilità</i> | 410 |
| 10.3.4 | <i>Alcuni esempi e nuove questioni</i> | 411 |
| 10.5 | Controllo ottimo e stabilizzazione dei sistemi lineari discreti | 414 |
| 10.6 | Controllo ottimo su intervallo finito dei sistemi lineari continui | 423 |
| 10.6.1 | <i>Minimizzazione dell'indice</i> | 424 |
| 10.6.2 | <i>L'equazione differenziale di Riccati</i> | 426 |
| 10.7 | Controllo ottimo su intervallo infinito dei sistemi lineari continui | 430 |
| 10.8 | Cenni sul principio del massimo | 434 |
| 10.8.1 | <i>Impostazione variazionale</i> | 435 |
| 10.8.2 | <i>Principio del massimo</i> | 439 |
| 11. | RAPPRESENTAZIONE DEI SISTEMI DISCRETI POSITIVI | 443 |
| 11.1 | Rappresentazione dei sistemi lineari discreti positivi | 443 |
| 11.1.1 | <i>Definizioni e notazioni per le matrici non negative</i> | 444 |
| 11.1.2 | <i>Rappresentazioni booleane e grafi di influenza</i> | 444 |
| 11.2 | Matrici non negative: proprietà combinatorie | 449 |
| 11.2.1 | <i>Matrici di permutazione e matrici monomie</i> | 449 |
| 11.2.2 | <i>Classificazione delle matrici non negative</i> | 451 |
| 11.3 | Catene cicliche | 458 |
| 11.4 | Proprietà spettrali : teorema di Perron | 463 |
| 11.4.1 | <i>Spettro delle matrici strettamente positive</i> | 463 |
| 11.4.2 | <i>Spettro delle matrici primitive</i> | 468 |
| 11.5 | Proprietà spettrali: la teoria di Frobenius | 470 |
| 11.5.1 | <i>Spettro delle matrici irriducibili</i> | 470 |
| 11.5.2 | <i>Forma ciclica di Frobenius</i> | 476 |
| 11.5.3 | <i>Ulteriori proprietà dell'autovalore massimale</i> | 479 |
| 11.6 | Proprietà spettrali di matrici non negative generiche | 484 |
| 11.7 | M-matrici | 490 |
| 12. | STRUTTURA DEI SISTEMI DISCRETI POSITIVI | 499 |
| 12.1 | Stabilità asintotica dei sistemi discreti positivi | 499 |
| 12.2 | Statica comparativa | 502 |
| 12.3 | Sistemi compartimentali | 506 |
| 12.4 | Raggiungibilità | 512 |
| 12.4.1 | <i>Coni di raggiungibilità in k passi</i> | 513 |
| 12.4.2 | <i>Solidità e stazionarietà dei coni di raggiungibilità in k passi</i> | 518 |
| 12.4.3 | <i>Il cono di raggiungibilità C^R</i> | 520 |
| 12.5 | Raggiungibilità completa e controllabilità | 523 |
| 12.5.1 | <i>Raggiungibilità completa positiva</i> | 523 |
| 12.5.2 | <i>Controllabilità</i> | 524 |
| 12.6 | Osservabilità dei sistemi discreti positivi | 526 |

| | | |
|------------|---|------------|
| 12.7 | Realizzazione dei sistemi discreti positivi | 531 |
| 13. | CATENE DI MARKOV | 541 |
| 13.1 | Definizioni e concetti introduttivi | 541 |
| 13.2 | Catene di Markov regolari | 545 |
| 13.3 | Catene di Markov irriducibili | 549 |
| 13.4 | Eventi e variabili casuali in una catena irriducibile | 553 |
| | 13.4.1 <i>Traiettorie</i> 553 | |
| | 13.4.2 <i>Reversibilità</i> 556 | |
| | 13.4.3 <i>Tempi di attesa</i> 559 | |
| 13.5 | Classificazione degli stati e classi di comunicazione | 563 |
| | 13.5.1 <i>Accessibilità e comunicazione</i> 563 | |
| | 13.5.2 <i>Classi di comunicazione ergodiche</i> 564 | |
| 13.6 | Catene con classi transitorie | 568 |
| 13.7 | Cenno ai modelli genetici | 574 |
| A. | RICHIAMI E COMPLEMENTI DI ALGEBRA LINEARE | 581 |
| A.1 | Generalità sugli spazi vettoriali | 581 |
| A.2 | Trasformazioni lineari e rappresentazioni matriciali | 587 |
| | A.2.1 <i>Rappresentazione mediante matrici</i> 588 | |
| | A.2.2 <i>Sottospazi invarianti per una trasformazione</i> 590 | |
| | A.2.3 <i>Proprietà del nucleo e dell'immagine di una trasformazione</i> 592 | |
| | A.2.4 <i>Complemento di Schur e inversione di una matrice</i> 594 | |
| A.3 | Spazi quoziente | 595 |
| A.4 | Autovalori e autovettori | 599 |
| A.5 | Polinomi associati ad una trasformazione lineare | 601 |
| A.6 | Polinomi associati ad un vettore | 607 |
| A.7 | Autospazi generalizzati e catene di Jordan | 609 |
| A.8 | Base e forma canonica di Jordan | 613 |
| A.9 | Forma reale di Jordan | 617 |
| A.10 | Forma canonica razionale | 621 |
| A.11 | Norme di vettori, di matrici e di operatori | 625 |
| A.12 | Spazi a prodotto interno | 630 |
| A.13 | Trasformazione aggiunta | 639 |
| A.14 | Matrici speciali | 644 |
| | A.14.1 <i>Matrici di permutazione</i> 644 | |
| | A.14.2 <i>Matrici di Marc Kac</i> 646 | |
| | A.14.3 <i>Matrici circolanti e matrice di Fourier</i> 647 | |
| A.15 | Riferimenti bibliografici | 650 |
| B. | CONI IN \mathbb{R}^n | 651 |
| B.1 | Proprietà generali | 651 |
| B.2 | Punti interni di un cono | 654 |
| B.3 | Teorema di separazione e coni duali | 658 |

| | |
|---|-----|
| B.4 Coni poliedrici e coni finitamente generati | 663 |
| B.5 Disequazioni lineari ed alternative | 667 |