

1. INTRODUZIONE

Scopo di queste lezioni è di illustrare brevemente alcune tematiche relative ai sistemi dinamici su insiemi di tempi parzialmente ordinati.

Le motivazioni finora addotte per lo studio di tali sistemi, e in particolare dei sistemi 2-D, sono quelle di fornire un supporto teorico al l'analisi e alla realizzazione di filtri multidimensionali.

Lo sviluppo della modellistica matematica nel campo della ecologia richiede in molti casi l'adozione di modelli dinamici in cui l'evoluzione delle variabili in gioco può essere analizzata secondo uno schema d'ordine parziale.

Gli esempi seguenti vogliono far intravedere come entrino in gioco diverse strutture d'ordine a seconda del problema che si considera.

Esempio 1

Consideriamo una popolazione al tempo t ripartita secondo r classi di età $n_1(t), \dots, n_r(t)$. L'evoluzione della popolazione può essere schematizzata come segue:

- al tempo $t+1$ il numero di appartenenti alla prima classe n_1 proviene per generazione da un certo numero di classi che sono in grado di generare al tempo t e da un flusso migratorio $m_1(t)$
- al tempo $t+1$ il numero di appartenenti alle classi $n_2, \dots, n_r$ dipende dagli appartenenti al tempo t alle classi $n_1, \dots, n_{r-1}$ (rispettivamente) che sono sopravvissuti e dai flussi migratori $m_2(t), \dots, m_r(t)$.

(°) Lavoro svolto col contributo CNR-GNASII

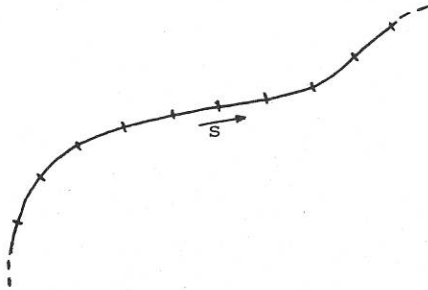
(°°) Istituto di Elettrotecnica ed Elettronica, Università di Padova, via Gradenigo 6/A, Padova.

Assumiamo come stato $x(t)$ del processo al tempo t la r -pla $(n_1(t), \dots, n_r(t))$ e come ingressi in t i flussi migratori $m_1(t), \dots, m_2(t)$. Allora lo stato al tempo $t+1$ dipende unicamente dallo stato e dall'ingresso al tempo t .

Supposto il flusso migratorio nullo, se prendiamo quindi due stati $x(t)$ e $x(\tau)$ in due istanti t e τ si ha che $x(t)$ è determinato da $x(\tau)$ se $t > \tau$ o viceversa.

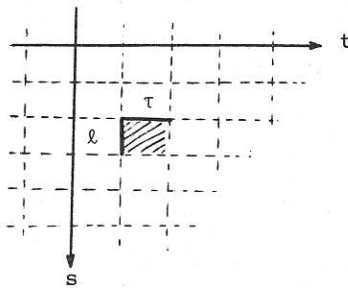
Esempio 2

Consideriamo uno schema estremamente semplificato di inquinamento di un fiume, pensato spazialmente unidimensionale con



portata, velocità, costanti su tutte le sezioni.

Si suddivide il fiume in tratti di lunghezza ℓ e si discretizzi il tempo in intervalli di durata τ in modo tale che i valori delle grandezze di interesse in ciascuna cella $\ell \times \tau$ non si discostino molto dal loro valore medio nella cella stessa.



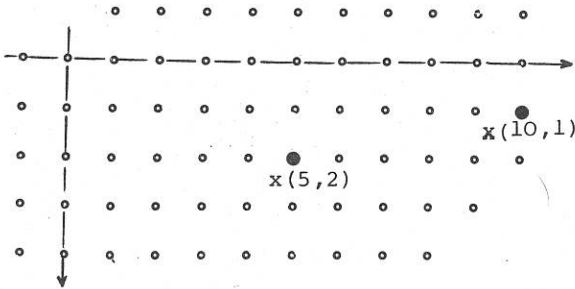
Le grandezze in gioco risultano quindi funzione di due variabili t ed s a valori interi che rappresentano il tempo

e lo spazio.

Si supponga inoltre che l e τ siano scelti in modo che la velocità del fiume sia l/τ .

Associamo ad ogni coppia (t,s) il vettore $x(t,s)$ con componenti $x_i(t,s)$ i valori in (t,s) delle grandezze caratterizzanti la dinamica del processo. Nelle ipotesi suddette il vettore $x(t,s)$ non può dipendere da $x(t',s')$ con $t' > t$ e/o $s' > s$ ma è determinato univocamente dai valori $x(t'',s'')$ con $t'' \leq t$ e $s'' \leq s$ e $(t'',s'') \neq (t,s)$.

Si può osservare che esistono delle coppie di vettori $x(t,s)$ e $x(t',s')$ che non sono correlate causalmente (es. $x(5,2)$ e $x(10,1)$).



Esempio 3

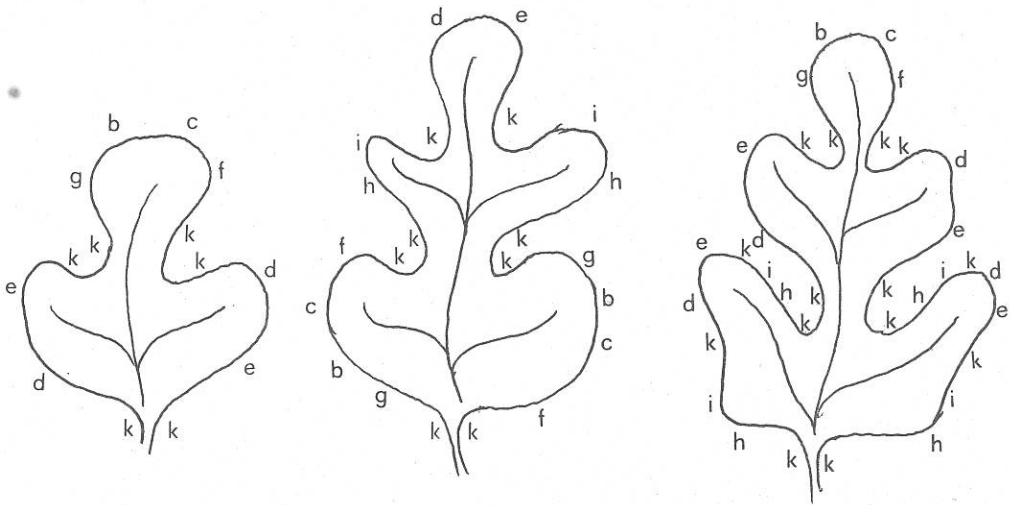
Si consideri il seguente modello semplificato dello sviluppo di una foglia (Lindenmayer).

- alfabeto: $\{a,b,c,d,e,f,g,h,i,k\}$
- legge di produzione:
 - $a \rightarrow bc$, $b \rightarrow kd$, $c \rightarrow ek$, $d \rightarrow gb$
 - $e \rightarrow cf$, $f \rightarrow ih$, $g \rightarrow hi$, $h \rightarrow de$
 - $i \rightarrow k$, $k \rightarrow k$
- assioma di partenza: a .

Le stringhe di simboli dell'alfabeto sono interpretate come cellule lungo il contorno della foglia: alcuni corrispondono a lobi ed altri ad incavi fra i lobi.

Il sistema produce le seguenti sequenze

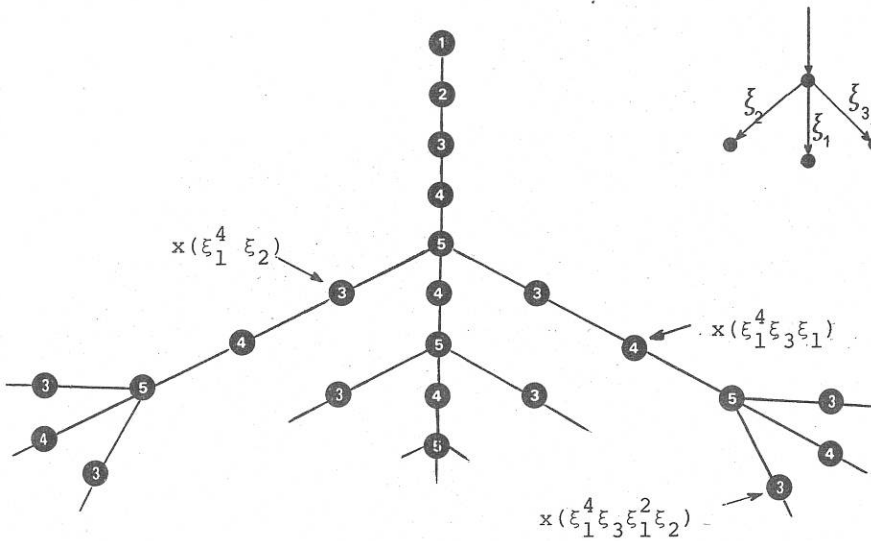
a → stato 1
 b c → stato 2
 k d e k → stato 3
 k g b c f k → stato 4
 k h i k d e k i h k → stato 5
kdek kgbcfk kdek
 kgbcfk khikdekihkh kgbcfk
 khikdekihkh kdek kgbcfk kdek khikdekihkh



Le successioni dopo la quinta sono ottenibili mediante operazioni di concatenazione sulle prime cinque, alle quali associamo gli stati 1,2,3,4,5.

L'evoluzione degli stati. è rappresentata dal seguente albero, nel quale ciascun vertice è individuato da un elemento del monoide libero generato dall'alfabeto $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$.

Si noti che lo stato $x(\xi_1^4 \xi_3 \xi_1^2 \xi_2)$ dipende dallo stato $x(\xi_1^4 \xi_3 \xi_1)$ e non viceversa e che lo stato $x(\xi_1^4 \xi_2)$ non dipende da nessuno degli altri nè viceversa. La dipendenza di uno stato da un altro è legata al fatto che il "tempo" associato allo albero non ha un ordine totale ma un "istante" è successivo ad un altro se la parola che rappresenta il primo istante contiene come tratto iniziale la parola che rappresenta il secondo.



In tutti e tre gli esempi se uno stato x' dipende da uno stato x in generale x non dipende da x' e se x'' dipende da x' e x' dipende da x , allora x'' dipende da x .

La differenza sostanziale fra l'esempio 1 e gli esempi 2 e 3 è che negli esempi 2 e 3 esistono coppie di stati fra i quali non esiste alcuna relazione di dipendenza. Il fatto che due stati siano o non siano fra loro confrontabili è legato alla confrontabilità o meno dei "tempi" rispettivi in rispetto all'ordine parziale in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ e nel sottoinsieme del monoide $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}^*$ associato all'albero.

Le seguenti definizioni richiamano i concetti di ordine parziale e totale.

Definizione - Un insieme parzialmente ordinato è una coppia $(S, \geq)$ ove S è in insieme non vuoto e la relazione $\geq$ soddisfa le seguenti proprietà:

- $a \geq a$
- $a \geq b, b \geq a \Rightarrow a = b$
- $a \geq b, b \geq c \Rightarrow a \geq c$

Definizione - Un insieme è totalmente ordinato se è parzial

mente ordinato e se per ogni coppia a, b , o $a \geq b$ o $b \geq a$.

Esempi

- $\mathbb{Z}$ è totalmente ordinato
- $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ è parzialmente ordinato dalla relazione $(a,b) \geq (c,d)$ se e solo se $a \geq c$ e $b \geq d$
- $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}^*$ è parzialmente ordinato dalla relazione $w \geq u$ se e solo se $w = ut$.

Si accennerà nel seguito a due tipi di modelli dinamici definiti su insiemi di tempo parzialmente ordinati, che costituiscono la più semplice generalizzazione dei modelli dinamici lineari a tempo discreto.

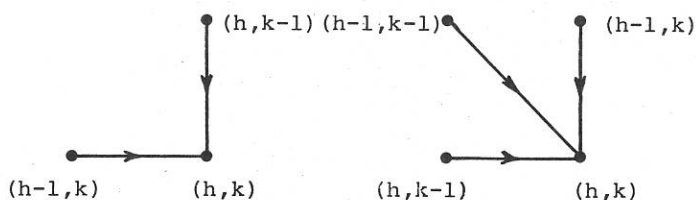
2. SISTEMI 2-D

2.1 Dinamica dell'evoluzione di stato

L'insieme T dei tempi è $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ con l'ordine parziale prodotto dei due ordini in $\mathbb{Z}$. Ad ogni punto (h,k) in T è associato uno stato locale $x(h,k) \in \mathbb{R}^n$ che determina univocamente la uscita y in (h,k) .

L'aggiornamento dello stato locale è dato da una relazione ricorsiva lineare che coinvolge, in modo diverso a seconda del modello adottato, stati e ingressi negli istanti precedenti ad (h,k) .

Si possono fondamentalmente individuare due tipi di equazioni di aggiornamento di stato a seconda che per il calcolo di $x(h,k)$ in esse compaiano gli stati in $(h-1,k)$ e $(h,k-1)$ oppure gli stati in $(h-1,k)$, $(h,k-1)$, $(h-1,k-1)$



Si hanno così le due equazioni di aggiornamento di stato locale:

modello 1:

$$\begin{aligned}x(h+1, k+1) &= A_1 x(h, k+1) + A_2 x(h+1, k) + B_1 u(h, k+1) + B_2 u(h+1, k) \\ y(h, k) &= Cx(h, k)\end{aligned}$$

modello 2:

$$\begin{aligned}x(h+1, k+1) &= A_1 x(h, k+1) + A_2 x(h+1, k) + A_0 x(h, k) + Bu(h, k) \\ y(h, k) &= Cx(h, k)\end{aligned}$$

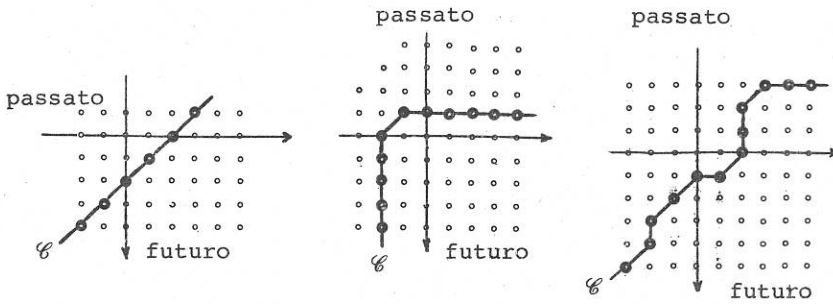
E' chiaro che lo stato locale che compare nelle relazioni precedenti non gode della proprietà di separazione, nel senso che un singolo stato locale non è sufficiente per collocare gli stati locali ad esso successivi rispetto all'ordine parziale. Ciò comporta, fra l'altro, che per poter calcolare l'evoluzione di stato e quindi dell'uscita, è necessario conoscere gli stati locali su un opportuno sottoinsieme infinito di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ (che chiameremo "insieme di separazione").

Facendo riferimento al sistema 2-D rappresentato dal modello 1, il concetto di insieme di separazione può essere formalizzato sulla base della seguente definizione:

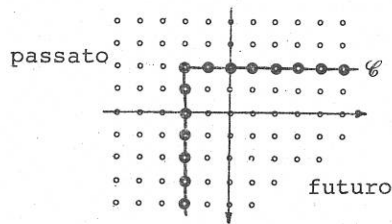
Definizione - Un insieme di separazione $\mathcal{C} \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ soddisfa le seguenti proprietà:

- $\mathcal{C}$ non è vuoto
- $h > i, k > j \Rightarrow (h, k)$ e (i, j) non possono essere entrambi in $\mathcal{C}$
- $(h, k) \in \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{C}$ interseca $\{(h-1, k), (h, k+1), (h-1, k+1)\}$, $\mathcal{C}$ interseca $\{(h+1, k), (h, k-1), (h+1, k-1)\}$, $\mathcal{C} \not\supset \{(h+1, k), (h, k+1)\}$
- se $(h, k) \geq (r, s)$ con $(r, s) \in \mathcal{C}$, allora $(h, k) \geq (i, j)$ vale solo per un numero finito di punti (i, j) in $\mathcal{C}$.

Esempi di insieme di separazione sono i seguenti:



Nel seguito si farà di solito riferimento al modello 1. Qualora si utilizzi il modello 2, si considererà un insieme di separazione del tipo riportato in figura.



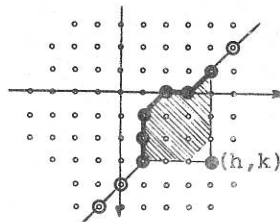
Se $\mathcal{C}$ è un insieme di separazione l'insieme

$$\mathcal{X}_{\mathcal{C}} = \{x(h,k), (h,k) \in \mathcal{C}\}$$

è detto stato globale relativo a $\mathcal{C}$.

Esso gode delle seguenti proprietà:

- (i) $\mathcal{X}_{\mathcal{C}}$ ha dimensioni infinite su $\mathbb{R}$ in quanto somma diretta di infiniti vettori di $\mathbb{R}^n$
- (ii) $\mathcal{X}_{\mathcal{C}}$ gode della proprietà di separazione
- (iii) il calcolo dello stato locale in un punto $(h,k) \geq (i,j)$ per qualche $(i,j) \in \mathcal{C}$ (i.e. (h,k) è nel "futuro" di $\mathcal{C}$) richiede la conoscenza di un numero finito di stati locali in $\mathcal{X}_{\mathcal{C}}$ e di un numero finito di valori della funzione di ingresso.



Le equazioni 1 costituiscono la mappa di aggiornamento dello stato di un passo. Supponiamo ingresso nullo. Il valore di x in (h,k) nel futuro di $\mathcal{C}$ si calcola a partire dagli stati locali su $\mathcal{C}$, ed è la somma dei contributi degli stati locali $x(i,j)$ di $\mathcal{X}_{\mathcal{C}}$ con $(i,j) < (h,k)$.

Il calcolo di tali contributi si effettua considerando ogni cammino dal punto (i,j) al punto (h,k) come una successione ordinata di tratti orizzontali e verticali, ed associando a ciascun tratto orizzontale la matrice A_1 e a ciascun tratto verticale la matrice A_2 . Ad ogni cammino percorso da (i,j) a (h,k) corrisponde così in modo univoco una matrice costituita dal prodotto delle matrici relative ai lati incontrati successivamente.

La matrice somma delle matrici corrispondenti a tutti i cammini da (i,j) a (h,k) applicata ad $x(i,j)$ fornisce il contributo di $x(i,j)$. Per l'invarianza del sistema tale matrice dipende solo dalle differenze $h-i$ e $k-j$ ed è indicata con $A_1^{h-i} A_2^{k-j}$.

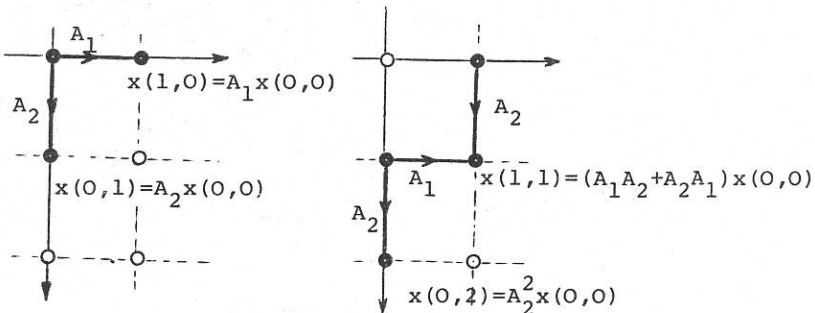
Le matrici $A_1^r A_2^s$ sono calcolabili ricorsivamente con le seguenti relazioni:

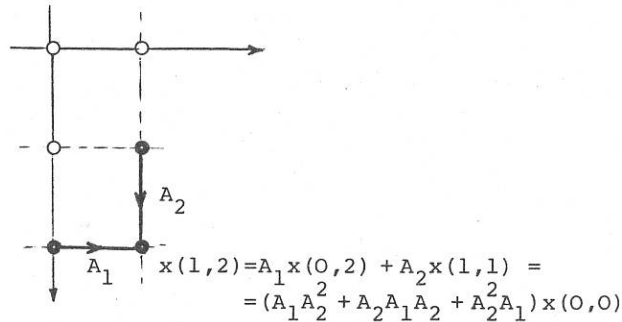
$$A_1^r A_2^0 A_2 = A_1^r$$

$$A_1^0 A_2^s A_2 = A_2^s$$

$$A_1^r A_2^s A_2 = A_1 (A_1^{r-1} A_2^s A_2) + A_2 (A_1^r A_2^{s-1} A_2)$$

Esempio di calcolo della trasformazione per $(h,k)=(1,2)$ e $(i,j)=(0,0)$



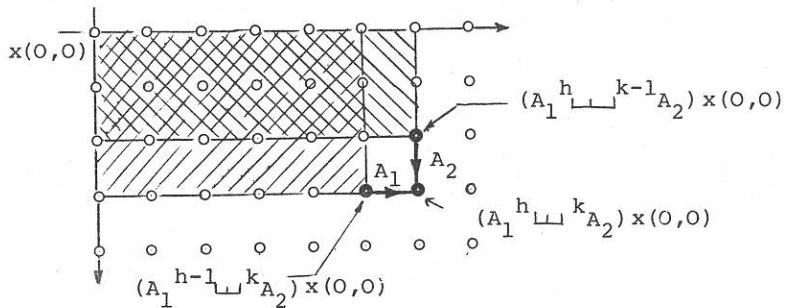


In generale

$$x(h,k) = (A_1 \text{---}^h \text{---}^k A_2) x(0,0)$$

ove:

$$A_1 \text{---}^h \text{---}^k A_2 = A_1 (A_1 \text{---}^{h-1} \text{---}^k A_2) + A_2 (A_1 \text{---}^h \text{---}^{k-1} A_2)$$



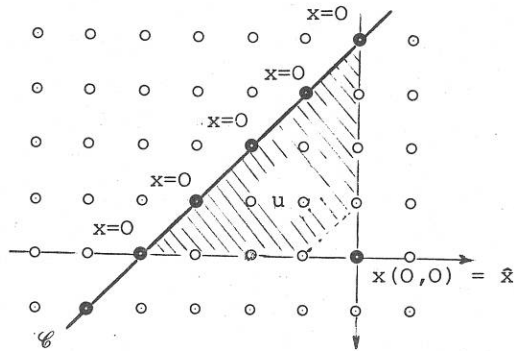
2.2 Proprietà strutturali

1 - Raggiungibilità

Definizione. Uno stato $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ è raggiungibile se a partire da uno stato globale zero esistono un ingresso u e un punto (i,j) tali che $x(i,j) = \hat{x}$

Data l'invarianza del sistema, ci si può riferire alla raggiungibilità in $(i,j) = (0,0)$ nel senso che $\hat{x}$ è raggiungibile in $(0,0)$ se per qualche insieme di separazione $\mathcal{C}$ contenente $(0,0)$ nel suo futuro, e su cui si assume stato globale

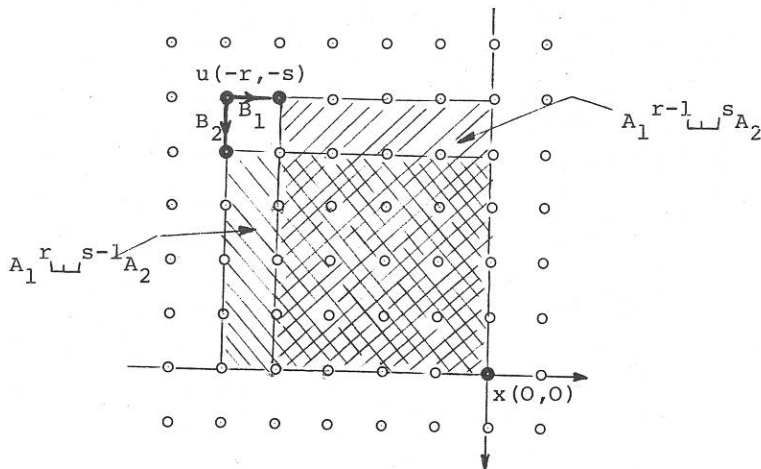
nullo esiste un ingresso che dà luogo a $x(0,0)=\hat{x}$.



Dall'equazione del modello 1, tenuto conto del significato delle matrici $A_1^{r-1} A_2$, abbiamo che l'ingresso in $(-r,-s)$ contribuisce allo stato locale in $(0,0)$ secondo la:

$$(A_1^{r-1} A_2^{s-1} B_2 + A_1^{r-1} A_2^{s-1} B_1) u(-r,-s)$$

(con la convenzione che $A_1^{i-1} A_2^{j-1} = 0$ se i o j sono negativi).



Lo spazio degli stati locali raggiungibili è quindi generato dalle colonne della matrice:

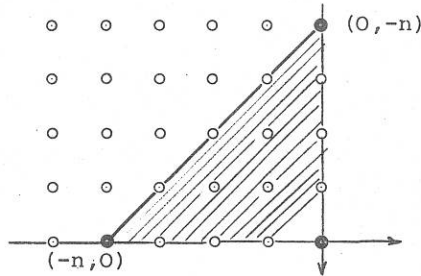
$$\mathcal{R}_\infty = [B_1 | B_2 | \dots | A_1^{r-1} \underline{\quad}^s A_2 \quad B_1 + A_1^r \underline{\quad}^{s-1} A_2 \quad B_2 | \dots]$$

Poichè le matrici $A_1^i \underline{\quad}^j A_2$ con $i+j \geq n$ sono linearmente dipendenti dalle matrici $A_1^i \underline{\quad}^j A_2$ con $i+j < n$, lo spazio generato dalle colonne di $\mathcal{R}_\infty$ è quello generato dalle colonne della matrice

$$\mathcal{R} = [B_1 | B_2 \dots | A_1^{r-1} \underline{\quad}^s A_2 \quad B_1 + A_1^r \underline{\quad}^{s-1} A_2 B_2]_{r+s \leq n}$$

chiamata matrice di raggiungibilità.

Come conseguenza di questo fatto gli stati raggiungibili sono raggiungibili con ingressi il cui supporto è contenuto nel triangolo tratteggiato in figura

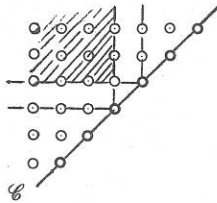


Lo spazio di raggiungibilità è definito come

$$X_R = \text{span } \mathcal{R}$$

e il sistema è localmente raggiungibile se $X = X_R$.

Osservazione Il fatto che lo stato locale sia raggiungibile non implica che sia raggiungibile lo stato globale. Ciò è dovuto all'interferenza esistente in generale fra gli ingressi che generano due stati locali adiacenti in uno stato globale (vedi figura).



2 - Osservabilità

Definizione. Uno stato $\hat{x}$ è indistinguibile dallo stato zero se assunto $x(0,0)=x$ e nulli tutti gli altri stati di uno stato globale il cui insieme di separazione contiene $(0,0)$, l'uscita corrispondente è nulla quando l'ingresso è nullo.

Usando le equazioni 1 e le matrici $A_1^r \text{---} A_2^s$ il valore dell'uscita in (r,s) è dato da

$$y(r,s) = C(A_1^r \text{---} A_2^s) x(0,0)$$

Quindi $\hat{x}$ è indistinguibile dallo stato zero se appartiene al lo spazio nullo della matrice:

$$\mathcal{O}_\infty = \begin{bmatrix} C \\ \vdots \\ C(A_1^r \text{---} A_2^s) \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Sfruttando le proprietà di dipendenza lineare nella famiglia di matrici $A_1^r \text{---} A_2^s$ si prova che lo spazio nullo di $\mathcal{O}_\infty$ coincide con quello di

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ \vdots \\ \vdots \\ C(A_1^r \text{---} A_2^s) \end{bmatrix}_{r+s < n}$$

Lo spazio di non osservabilità è quindi

$$X_{N,0} = \mathcal{N}(\mathcal{O})$$

e il sistema è detto localmente osservabile se $\mathcal{O}$ ha rango pieno.

Osservazione L'osservabilità dello stato locale non implica in generale quello dello stato globale. I motivi sono analoghi a quelli richiamati a proposito della raggiungibilità.

3 - Stabilità

Dati due punti (i,j) e (r,s) in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, la distanza fra essi è definita da:

$$d((i,j), (r,s)) = |i-r| + |j-s|$$

Da ciò segue la definizione della distanza fra un insieme di separazione $\mathcal{C}$ ed un punto (i,j) :

$$d((i,j), \mathcal{C}) = \min_{(r,s) \in \mathcal{C}} d((i,j), (r,s))$$

Si ponga inoltre

$$||x_{\mathcal{C}}|| = \sup_{x \in \mathcal{C}} ||x||$$

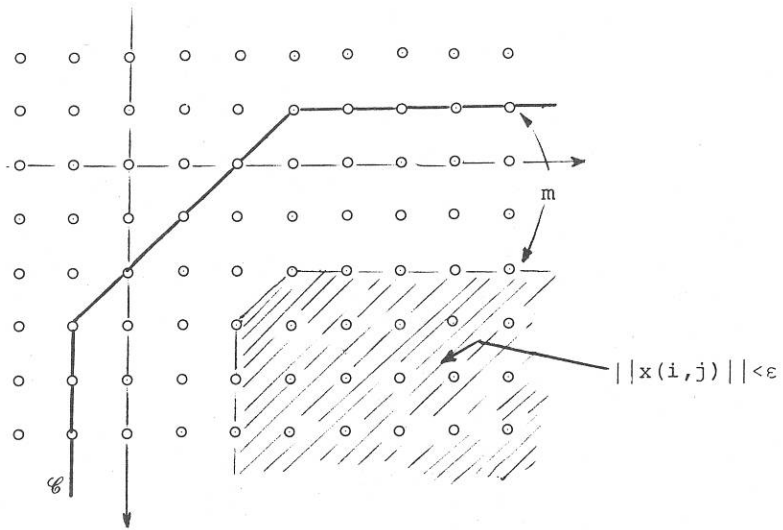
dove con $||x||$ si è indicata la norma euclidea di x .

Definizione Sia $\mathcal{C}$ un insieme di separazione e si supponga $u=0$. Il sistema 1 è stabile (internamente) rispetto a $\mathcal{C}$ se dato $\varepsilon > 0$ per ogni $x_{\mathcal{C}}$ con $||x_{\mathcal{C}}|| < \infty$ esiste un intero positivo m tale che

$$||x(i,j)|| < \varepsilon$$

quando (i,j) è nel futuro di $\mathcal{C}$ e

$$d((i,j), \mathcal{C}) > m.$$



Osservazione Si può dimostrare che la stabilità di un sistema non dipende dal particolare insieme di separazione $\mathcal{C}$ sul quale si considera lo stato globale. Si parlerà quindi di stabilità senza far riferimento a $\mathcal{C}$.

Per i sistemi lineari discreti con equazione di aggiornamento di stato del tipo:

$$x(h+1) = A x(h) + Bu(h)$$

la condizione di stabilità (asintotica) è equivalente a ciascuna delle seguenti condizioni

- i) il polinomio $\det(I - Az)$ è privo di zeri nel cerchio unitario $|z| < 1$
- ii) la serie $\sum_{i=0}^{\infty} (A^i)^T (A^i)$ converge
- iii) l'equazione di Ljapunov

$$X = I + A^T X A$$

ha soluzione definita positiva.

Si noti che la somma della serie $\sum_{i=0}^{\infty} (A_1^i)^T A_1^i$ non è altro che la soluzione dell'equazione di Ljapunov in iii).

Per i sistemi 2-D con modello 1 si hanno delle condizioni di stabilità alcune delle quali possono essere viste come estensioni del caso unidimensionale

Per le condizioni i) e ii) si ha infatti:

- i) il sistema 2D di tipo 1 è stabile se e solo se il polinomio $\det(I - A_1 z_1 - A_2 z_2)$ è privo di zeri nel poldisco chiuso

$$\mathcal{D}_1 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}, |z_1| \leq 1, |z_2| \leq 1\}$$

- ii) la serie $\sum_{r,s} (A_1^r \underline{\quad}^s A_2)^T (A_1^r \underline{\quad}^s A_2)$ converge.

Per la condizione iii), non si ha ancora una corrispondente in dimensione finita dell'equazione di Ljapunov. Si hanno peraltro sia un'equazione di Ljapunov in direzione infinita che un'equazione di Ljapunov dipendente da un parametro reale.

Equazione di Ljapunov dipendente da un parametro reale

Applicando il criterio di Huang (un polinomio $q \in \mathbb{R}[z_1, z_2]$ non ha zeri in $\mathcal{D}_1$ se e solo se i) $q(z_1, 0) \neq 0$ per $|z_1| \leq 1$, ii) $q(z_1, z_2) \neq 0$ $|z_1|=1$ e $|z_2| \leq 1$) al polinomio $\det(I - A_1 z_1 - A_2 z_2)$ si prova che il sistema è stabile se e solo se la matrice $A_1 + e^{j\omega} A_2$ è stabile per ogni ω reale.

Si ha immediatamente un'equazione di Ljapunov per $A_1 + e^{j\omega} A_2$:

$$X(\omega) = I + (A_1 + e^{-j\omega} A_2)^T X(\omega) (A_1 + e^{j\omega} A_2)$$

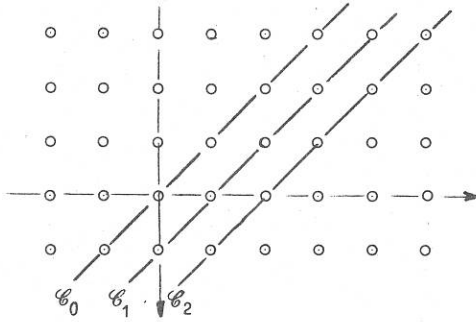
Quindi il sistema è stabile se e solo se l'equazione precedente ha soluzione (hermitiana) definita positiva per ogni ω reale.

Equazione di Ljapunov in dimensione infinita

Si consideri una successione bilatera di matrici $\{Q_k\}$, $k \in \mathbb{Z}$. La matrice di Toeplitz a blocchi T_Q associata alla successione è la matrice infinita:

$$T_Q = \begin{bmatrix} \diagup & \diagdown & \diagup & \diagdown & \diagup & \diagdown & \diagup & \diagdown \\ & Q_0 & Q_1 & Q_2 & & & & \\ \diagdown & & \diagup & \diagdown & \diagup & \diagdown & \diagup & \diagdown \\ & Q_{-1} & Q_0 & Q_1 & Q_2 & & & \\ \diagup & & \diagdown & \diagup & \diagdown & \diagup & \diagdown & \diagup \\ & Q_{-2} & Q_{-1} & Q_0 & Q_1 & & & \\ \diagdown & & \diagup & \diagdown & \diagup & \diagdown & \diagup & \diagdown \end{bmatrix}$$

Per ogni intero i assumiamo come insieme di separazione $\mathcal{C}_i$ l'insieme $\{(h,k) : h+k=i\}$



Dato lo stato globale $X_{\mathcal{C}_i}$, lo stato $X_{\mathcal{C}_{i+1}}$ in condizioni di evoluzione libera è espresso dalla

$$X_{\mathcal{C}_{i+1}} = \mathcal{A} X_{\mathcal{C}_i}$$

ove gli stati $X_{\mathcal{C}_i}$ e $X_{\mathcal{C}_{i+1}}$ sono rappresentati da vettori colonna di dimensione infinita ed $\mathcal{A}$ è la matrice di Toeplitz a blocchi

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \diagup & \diagdown & \diagup & \diagdown & \diagup & \diagdown & \diagup & \diagdown \\ & A_1 & A_2 & 0 & & & & \\ \diagdown & & \diagup & \diagdown & \diagup & \diagdown & \diagup & \diagdown \\ & 0 & A_1 & A_2 & 0 & & & \\ \diagup & & \diagdown & \diagup & \diagdown & \diagup & \diagdown & \diagup \\ & & 0 & A_1 & A_2 & & & \\ \diagdown & & \diagup & \diagdown & \diagup & \diagdown & \diagup & \diagdown \end{bmatrix}$$

associata alla successione

$$Q_k \begin{cases} = A_1 & k = 0 \\ = A_2 & k = 1 \\ = 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Consideriamo ora l'espressione:

$$\mathcal{P} = \mathcal{I} + \mathcal{A}^* \mathcal{P} \mathcal{A}$$

ove $\mathcal{I}$ è la matrice identità infinita e

$$\mathcal{A}^* = \begin{bmatrix} & A_2^T & A_1^T & 0 & & \\ & & & & & \\ 0 & A_2^T & A_1^T & 0 & & \\ & & & & & \\ & 0 & A_2^T & A_1^T & 0 & \\ & & & & & \end{bmatrix}$$

Il sistema 2D è stabile se e solo se l'equazione ha come soluzione una matrice di Toeplitz a blocchi T_P associata alla successione $\{P_k\}$, che soddisfa le seguenti condizioni:

- i) $\{P_k\}$ è in $\ell^2(\mathbb{R}^{n \times n})$
- ii) T_P induce in $\ell^2(\mathbb{C}^n)$ un prodotto interno definito positivo, ovvero

$$\begin{bmatrix} \dots & v_{-1}^T & v_0^T & v_1^T & \dots \end{bmatrix} T_P \begin{bmatrix} \vdots \\ v_{-1} \\ v_0 \\ v_1 \\ \vdots \end{bmatrix} > 0$$

per ogni $\{v_k\}$ in $\ell^2(\mathbb{C}^n)$.

Osservazione 1 Se il sistema è stabile le matrici P_k sono i coefficienti di Fourier della matrice $P(\omega)$ che è funzione periodica di ω .

In particolare P_0 è somma della serie

$$\sum_{r,s} (A_1^T \text{---}^r \text{---}^s A_2^T) (A_1 \text{---}^r \text{---}^s A_2) .$$

Osservazione 2 La forma quadratica $\mathcal{V}(\mathcal{X}_{\mathcal{C}_i}) = \mathcal{X}_{\mathcal{C}_i}^T T_P \mathcal{X}_{\mathcal{C}_i}$ definita sullo spazio $\ell^2(\mathbb{R}^n)$ può essere pensato come una funzione di Ljapunov e la relazione

$$\begin{aligned}\mathcal{X}_{\mathcal{C}_i}^T T_P \mathcal{X}_{\mathcal{C}_i} &= \mathcal{X}_{\mathcal{C}_i}^T \mathcal{X}_{\mathcal{C}_i} + (\mathcal{X}_{\mathcal{C}_i}^T \mathcal{A}^*)_{T_P} (\mathcal{A} \mathcal{X}_{\mathcal{C}_i}) = \\ &= \mathcal{X}_{\mathcal{C}_i}^T \mathcal{X}_{\mathcal{C}_i} + \mathcal{X}_{\mathcal{C}_{i+1}}^T T_P \mathcal{X}_{\mathcal{C}_{i+1}}\end{aligned}$$

mostra che tale funzione decresce passando da un insieme di separazione $\mathcal{C}_i$ al "successivo" $\mathcal{C}_{i+1}$.

2.3 Legame ingresso-uscita e stabilità BIBO

Alle successioni $\{u(h,k)\}$, $\{x(h,k)\}$ e $\{y(h,k)\}$ si associano rispettivamente le serie formali di potenze

$$\begin{aligned}U(z_1, z_2) &= \sum_{h,k} u(h,k) z_1^h z_2^k, \quad Y(z_1, z_2) = \sum_{h,k} y(h,k) z_1^h z_2^k \\ \text{e } X(z_1, z_2) &= \sum_{h,k} x(h,k) z_1^h z_2^k.\end{aligned}$$

In base all'equazione ricorsiva 1, assumendo un insieme di separazione $\mathcal{C}$ tale che il supporto di u sia contenuto nel futuro di $\mathcal{C}$ e $\mathcal{X}_{\mathcal{C}}$ nullo, l'espressione di $Y(z_1, z_2)$ è la seguente:

$$Y(z_1, z_2) = (I - A_1 z_1 - A_2 z_2)^{-1} (B_1 z_1 + B_2 z_2) U(z_1, z_2)$$

La funzione razionale $G(z_1, z_2) = (I - A_1 z_1 - A_2 z_2)^{-1} (B_1 z_1 + B_2 z_2)$ è la funzione di trasferimento del sistema e rappresenta la risposta all'ingresso $u(h,k)=1$ per $h=k=0$ e $u(h,k)=0$ per $(h,k) \neq (0,0)$.

Il sistema 1 è BIBO stabile se in corrispondenza ad ingressi limitati è stato globale nullo, l'uscita è limitata. A differenza di quanto avviene per i sistemi 1-D la stabilità BIBO non dipende soltanto dal denominatore della funzione di trasferimento $G(z_1, z_2) = \frac{p(z_1, z_2)}{q(z_1, z_2)}$ (si assumono q e p coprimi).

Si ha infatti che, indicato con T_1 , il toro

$$T_1 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}, |z_1| = |z_2| = 1\}$$

stabilità BIBO $\Rightarrow q(z_1, z_2) \neq 0$ in $\mathcal{P}_1 - T_1$

stabilità BIBO $\Leftarrow q(z_1, z_2) \neq 0$ in $\mathcal{P}_1$

2.4 Realizzazione

Data una funzione razionale $F(z_1, z_2)$, il problema della sua realizzazione consiste nel trovare un sistema 2-D la cui funzione di trasferimento sia $F(z_1, z_2)$.

Condizione necessaria e sufficiente perchè una funzione razionale $F(z_1, z_2) = p(z_1, z_2)/q(z_1, z_2)$ con p e q coprimi sia realizzabile è che $q(0,0) \neq 0$ e $p(0,0) = 0$.

Mentre esistono algoritmi lineari per costruire realizzazioni raggiungibili e osservabili, non esistono in generale algoritmi lineari per trovare realizzazioni minime. In proposito si deve osservare che le realizzazioni raggiungibili e osservabili non sono necessariamente minime e che la dimensione delle realizzazioni minime può dipendere dal corpo sul quale vengono costruite e che possono esistere realizzazioni minime non legate da trasformazioni di similarità.

2.5 Modello 2 con $A_0 = -A_1 A_2 = -A_2 A_1$

La trattazione del modello 2 è sostanzialmente simile a quella del modello 1. Un discorso a parte può essere fatto per la sottoclasse dei sistemi di tipo 2 nei quali A_1 e A_2 commutano e $A_0 = -A_1 A_2$. Questi sistemi realizzano tutte e sole le funzioni razionali il cui denominatore è il prodotto di un polinomio in z_1 per un polinomio in z_2 . Molti aspetti della teoria dei sistemi 1-D, che in generale non si possono estendere ai sistemi 2-D, si estendono invece a questa sottoclasse. Si nota in particolare

- i) la matrice di Hankel ha rango finito e coincidente con la dimensione delle realizzazioni minime entro la stessa classe;
- ii) le realizzazioni minime sono simili;
- iii) le condizioni di stabilità si riducono a condizioni di

stabilità separatamente su A_1 e A_2 .

3. SISTEMI SU GRUPPI LIBERI

Un altro tipo di sistemi dinamici definiti su insieme parzialmente ordinato è quello costituito da sistemi su gruppi liberi. In questo caso l'insieme dei tempi è il gruppo libero G generato da un alfabeto finito E che, per semplicità, si suppone contenere solo due elementi: $E = \{\xi_1, \xi_2\}$.

Un modo di costruire il gruppo libero G , associato a E è di considerare l'insieme $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4\}$ contenente E e di costruire il monoide libero $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4\}^*$ modulo le relazioni di commutazione $\xi_1 \xi_3 = \xi_3 \xi_1 = \xi_2 \xi_4 = \xi_4 \xi_2 = e$.

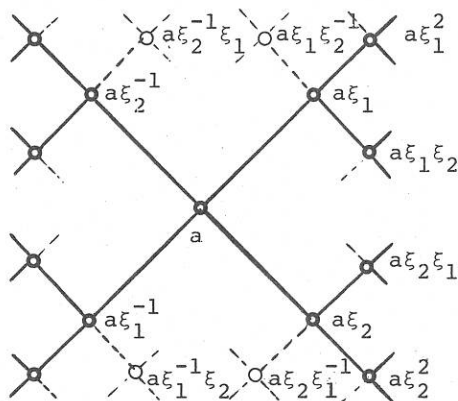
Si ottiene una struttura di gruppo, in cui

- e è l'elemento identico
- ξ_3 e ξ_4 sono inversi di ξ_1 e ξ_2 rispettivamente
- ogni elemento è unicamente rappresentato da una parola di $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4\}^*$ in cui ξ_1 e ξ_2 non sono predecessori o successori immediati di ξ_3 e ξ_4 rispettivamente
- la moltiplicazione è indotta dalla concatenazione in $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4\}^*$.

Nel seguito si scriverà direttamente ξ_1^{-1} per ξ_3 e ξ_2^{-1} per ξ_4 . I monoidi liberi $E^* = \{\xi_1, \xi_2\}^*$ e $(E^{-1})^* \triangleq \{\xi_1^{-1}, \xi_2^{-1}\}^*$ sono contenuti in G .

Dati due elementi a e b in G , si conviene di scrivere $a \leq b$ se $b = ap$ con $p \in E^*$. In questo modo il gruppo G è parzialmente ordinato dalla relazione $\leq$ e $(G, \leq)$ viene assunto come insieme dei tempi.

Dato un elemento a in G si conviene di chiamare "passato di a " l'insieme $P_a = \{b: a = bc, c \in E^* - \{e\}\}$ e il "futuro di a " l'insieme $F_a = \{b: b = ac, c \in E^*\}$.



Il passato di a è rappresentato dall'albero convergente in a mentre il futuro dall'albero che parte da a .

La struttura di un sistema lineare invariante, di dimensione finita, con insieme dei tempi dato dal gruppo libero $(G, \leq)$ è rappresentata dalle seguenti equazioni:

$$x(a) = A_1 x(a \xi_1^{-1}) + A_2 x(a \xi_2^{-1}) + B_1 u(a \xi_1^{-1}) + B_2 u(a \xi_2^{-2})$$

$$y(a) = Cx(a)$$

ove $x(a) \in \mathbb{R}^n$ è chiamato stato locale nel punto a .

Per le stesse motivazioni considerate per i sistemi 2-D è qui necessario introdurre il concetto di insieme di separazione. Per semplicità si darà una definizione restrittiva di tali insiemi che costituisce, in qualche modo, la corrispondente di quella degli insiemi $\mathcal{C}_1$.

Preso un elemento $w \in G$, si indica con $|w|$ il numero intero (non necessariamente positivo) ottenuto sommando il numero di ξ_1 e ξ_2 presenti in w e sottraendo quello degli ξ_1^{-1} e ξ_2^{-1} :

$$|w| = (\#\xi_1) + (\#\xi_2) - (\#\xi_1^{-1}) - (\#\xi_2^{-1})$$

Per ogni intero i l'insieme di separazione è il seguente sottoinsieme di G :

$$\mathcal{G}_i = \{w : |w| = i\}$$

Gli elementi di G che costituiscono il futuro di $\mathcal{G}_i$ sono gli elementi t tali che

$$|t| \geq i.$$

Si verifica immediatamente che la conoscenza degli stati locali in $\mathcal{G}_i$ e delle funzioni di ingresso nel futuro di $\mathcal{G}_i$ consentono di calcolare l'evoluzione del sistema nel futuro di $\mathcal{G}_i$ stesso. In particolare, lo stato in ogni punto nel futuro di $\mathcal{G}_i$ dipende da un numero finito di stati locali in $\mathcal{G}_i$. Si ha infatti

$$x(w) = \sum_{\substack{p \in (\Sigma^{-1})^* \\ |w| + |p| = i}} \mu(p) x(wp)$$

ove $\mu: (\Sigma^{-1})^* \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ è il morfismo di monoidi indotto dalle relazioni

$$\mu(\xi_1^{-1}) = A_1, \quad \mu(\xi_2^{-1}) = A_2$$

$$(\text{es. } \mu(\xi_1^{-1} \xi_2^{-1} \xi_1^{-1} \xi_2) = A_1 A_2 A_1 A_2)$$

Se si associa alla funzione di ingresso u la serie non commutativa

$$u \rightarrow U = \sum_{w \in G} u(w)w$$

e all'uscita y la serie

$$y \rightarrow Y = \sum_{w \in G} y(w)w$$

Allora il legame ingresso-uscita è espresso mediante la serie

$$\sigma = C(I - A_1\xi_1 - A_2\xi_2)^{-1}(B_1\xi_1 + B_2\xi_2)$$

che è la risposta del sistema all'ingresso

$$u(w) = \begin{cases} = 1 & , w = e \\ = 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Si ha così

$$Y = U\sigma$$

La serie σ è una serie razionale non commutativa nelle indeterminate ξ_1 e ξ_2 . Si ricorda che l'anello delle serie razionali non commutative in ξ_1 e ξ_2 è il più piccolo sottoanello dell'anello delle serie non commutative in ξ_1 e ξ_2 che contiene i polinomi e le serie inverse di ogni polinomio invertibile (mediante una serie).

Oltre a questa caratterizzazione astratta delle serie razionali ne esistono numerose altre. In questo contesto, quella che sarà utilizzata è la seguente: una serie non commutativa σ in ξ_1 e ξ_2 è razionale se e solo se esistono un intero n e delle matrici A_1, A_2 in $\mathbb{R}^{n \times n}$, B in $\mathbb{R}^{n \times 1}$, C in $\mathbb{R}^{1 \times n}$ tali che

$$\sigma = C(I - A_1\xi_1 - A_2\xi_2)^{-1} B$$

Le matrici (A_1, A_2, B, C) vengono chiamate una rappresentazione di σ di dimensione n . Le serie razionali non commutative godono della proprietà caratteristica che la matrice di Hankel costruita con i loro coefficienti ha rango finito. Il rango della matrice di Hankel $H(\sigma)$ associata alla serie σ coincide con la dimensione minima delle rappresentazioni di σ .

A differenza di quanto avviene per le serie razionali commutative in due indeterminate, per le quali il rango della matrice di Hankel non dà in generale informazioni circa la dimensione della realizzazione minima, ciò che rende im-

possibile l'estensione diretta dell'algoritmo di Ho, in questo caso è possibile costruire tutte le rappresentazioni minime ricorrendo ad un algoritmo di Ho generalizzato.

Per quanto riguarda le proprietà strutturali di questi sistemi, le nozioni di raggiungibilità e di osservabilità locale possono essere introdotte in modo analogo a quello seguito per i sistemi 2-D. Ciò porta a considerare le seguenti matrici di raggiungibilità e di osservabilità.

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & A_1 B_1 & A_1 B_2 & A_2 B_1 & A_2 B_2 & \dots & A_2^{n-1} B_2 \end{bmatrix}$$

e

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA_1 \\ CA_2 \\ \vdots \\ CA_2^{n-1} \end{bmatrix}$$

Il sottospazio di stato raggiungibile è così l'immagine di $\mathcal{R}$ e il sottospazio non osservabile è il nucleo di $\mathcal{O}$.

BIBLIOGRAFIA

- [1] U. Grenander and G. Szegö "Toeplitz forms and their applications" Berkeley, Univ. of California Press, 1958
- [2] P.M. Cohn "Free Rings and Their Relations" Acad. Press, London 1971
- [3] J.L. Shanks, S. Treitel, J.H. Justice "Stability and Synthesis of Two-Dimensional Recursive Filters" IEEE Trans Audio Elec, vol. AU-20, pp. 115-128, June 1972
- [4] T.S. Huang "Stability of Two-Dimensional Recursive Filters", IEEE Trans Audio Elec., vol. AU-20, pp. 158-163, June 1972

- [5] S. Attasi "Systèmes Linéaires Homogènes à Deux Indices" IRIA Rapport LABORIA n. 31, Sept 1973
- [6] E. Fornasini, G. Marchesini "Algebraic realization theory of two dimensional filters" in "Variable Structure Systems", A. Ruberti and R. Mohler eds., Springer Lect. Notes in Econ. and Math. Sys. n. 111, pp. 64-82, 1974
- [7] R.P. Roesser "A discrete State-Space Model for Linear Image Processing" IEEE Trans Au. Cont., vol. AC-20, n. 1, pp. 1-10, Feb. 1975
- [8] E. Fornasini, G. Marchesini "Reachability and observability in realization theory of spatial filters" Proc. 5th I.C.E.E., pp. 1364-1380, Oct. 1975
- [9] E. Fornasini, G. Marchesini "State-space realization theory of two dimensional filters" IEEE Trans. A.C., vol. A.C. 21, n. 4, pp. 484-492, August 1976
- [10] E. Fornasini, G. Marchesini "Two dimensional filters: new aspects of the realization theory" Proc. 3rd Int. Conf. on Pattern Recognition, pp. 716-722, 1976
- [11] G. Marchesini "Some aspects of algebraic realization theory" Lect. Notes Dept of Appl. Math. and Phys., Kyoto University, Sept 1976
- [12] E. Fornasini, G. Marchesini "Computation of reachable and observable realizations of spatial filters" Intern. Jour. of Control, vol. 25 n. 4, pp. 621-635, 1977
- [13] D. Goodman "Some stability properties of two-dimensional linear shift-invariant digital filters" IEEE Trans Circuit and Syst, vol. CAS 24, n. 4, pp. 201-208, Apr 1977
- [14] "Multidimensional Systems" Special Issue of IEEE Proc, vol. 65, n. 6, June 1977
- [15] E. Fornasini, G. Marchesini "Doubly indexed dynamical systems: state space models and structural properties" Mathematical Systems Theory, vol. 12, pp. 59-72, 1978

- [16] E. Fornasini "On the relevance of noncommutative power series in spatial filters realization" IEEE Trans. C.A.S., vol. CAS 25, n. 5, pp. 290-99, May 1978
- [17] E. Fornasini, G. Marchesini "Stability problems in 2-D systems" in Recent Developments in "Variable Structure Systems Economics and Biology", R. Mohler and A. Ruberti eds., Springer Lect. Notes in Econ. and Math. Sys., n. 162, pp. 123-29, 1978
- [18] E. Fornasini, G. Marchesini "Two dimensional filters and the problem of realization" in "Circuit Theory and Design", Georgi Publ. Co., pp. 371-380, 1978
- [19] R. Eising "Realization and Stabilization of 2-D Systems" IEEE Trans Autom. Control, vol. AC-23, n. 5, pp. 793-99, Oct 1978
- [20] E. Fornasini, B.F. Wyman "Linear systems on free groups" Proc. of the 1978 IEEE C.D.C., San Diego, California, pp. 1062-64, 1979
- [21] E. Fornasini "Research topics in linear systems on partially ordered time sets" presentato alle "Journées sur l'Analyse des Systèmes" Bordeaux, 11-15 Sett. 1978, in corso di pubblicazione su Astérisque
- [22] E. Fornasini, G. Marchesini "On the internal stability of two-dimensional filters" IEEE Trans. A.C., vol. AC 24, n. 1, pp. 129-30, 1979
- [23] E. Fornasini, G. Marchesini "System theoretic approach to mutlidimensional digital data processing" Proc. 4th Int. Conf. on Pattern Rec. Kyoto, 1978
- [24] E. Fornasini, G. Marchesini "On the problem of constructing minimal realizations for two-dimensional filters" in corso di pubblicazione su IEEE Trans. P.A.M.I., 1979
- [25] E. Fornasini, G. Marchesini "2-D systems theory: a progress report" presentato alla "2nd Int. Conf. on Information Science and Systems" Patras (Grecia), 9-14 luglio 1979.

