COMO 84

STRUTTURA E PROPRIETA' DEI SISTEMI 2D

E. Fornasini, G. Marchesini

Istituto di Elettrotecnica e di Elettronica
Universita' di Padova, Via Gradenigo 6/A
35131 PADOVA

1. MODELLI 2D E NOZIONE DI STATO

Una decina di anni fa sono apparsi nella letteratura i primi lavori in cui si è affrontato il problema di definire sistemi dinamici ove le funzioni di ingresso, di stato e di uscita dipendono da due variabili.

Le motivazioni per questo tipo di ricerche erano basate sull'opportunità di studiare strutture ricorsive per l'elaborazione di dati bidimensionali, quali immagini, segnali sismici etc.

Tradizionalmente l'elaborazione di dati bidimensionali è effettuata impiegando filtri numerici dati da rapporti di polinomi in due determinate o da equazioni alle differenze. Ciò comporta che la descrizione ingresso/uscita di sistemi in due variabili e le corrispondenti tecniche di analisi basate sulla risposta frequenziale e sulla z-trasformata bidimensionale siano ben note da molto tempo.

L'idea nuova che ha dato origine alle ricerche nell'area dei sistemi 2D è stata quella di considerare questi algoritmi - e cioè funzioni di trasferimento e equazioni alle differenze in due variabili - come rappresentazioni esterne di sistemi dinamici e conseguentemente di introdurre per tali sistemi il concetto di stato e di equazione di aggiornamento.

Come si vedrà, esistono peraltro due fondamentali differenze rispetto al caso 1D. La prima riguarda la struttura d'ordine che si introduce nel piano discreto, che è il prodotto degli ordini sugli assi. Trattandosi di un ordine parziale, non è sempre definita una relazione di precedenza fra due punti e la relazione di causalità non vale fra coppie di eventi qualsiasi. La seconda differenza riguarda le strutture algebriche che rappresentano l'evoluzione dinamica degli algoritmi nei due casi: l'anello dei polinomi in una indeterminata nel caso 1D e quello dei polinomi in due indeterminate nel caso 2D. Com'è noto, molte proprietà strutturali comunemente usate nell'analisi di algoritmi 1D sono strettamente legate alla fattorizzabilità di ogni polinomio sul corpo complesso in prodotto di polinomi del primo grado, alla sviluppabilità in frazioni parziali di ogni rapporto di polinomi e al fatto che l'anello dei polinomi in una variabile è un dominio a ideali principali.

Poichè per i polinomi in due indeterminate le proprietà precedenti non sono valide, nell'analisi e sintesi degli algoritmi 2D non sono in generale estendibili i risultati del caso 1D e si deve far ricorso a tecniche più complesse. In particolare, non essendo disponibile una costruzione algebrica "canonica" alla quale si possa associare una nozione intrinseca di

stato di dimensione finita, esistono vari modelli ricorsivi, con diverse equazioni di aggiornamento dello stato. L'idea che sta alla base di tutti questi modelli è tuttavia la stessa, e cioè che l'elaborazione ricorsiva è resa possibile da uno "stato locale" di dimensione finita e che l'informazione completa sul passato è fornita da una successione infinita di stati locali, detta "stato globale".

Nel seguito si darà conto brevemente della struttura di queste equazioni e si faranno alcune osservazioni sul significato che le proprietà di raggiungibilità, osservabilità e stabilità acquistano in questo contesto.

2. DINAMICA DEI SISTEMI 2D

Si introduca nel piano discreto $Z \times Z$ l'ordine prodotto, i.e. $(h,k) \leq (i,j)$ se $h \leq i$ e $k \leq i$, e si associ ad ogni punto (h,k) del piano un vettore $x(h,k) \in R^n$. Si assuma che tale vettore sia individuato - in accordo con la relazione di causalità associata all'ordine in $Z \times Z$ - dai valori dell'ingresso negli istanti precedenti (h,k), e che l'aggiornamento sia descrivibile mediante una relazione lineare ricorsiva del primo ordine del tipo

$$x(h+1,\ k+1) = A_1 x(h,\ k+1) + A_2 x(h+1,\ k) + B_1 u(h,\ k+1) + B_2 u(h+1,\ k) \tag{1}$$

Il vettore $x(h,k)$ è lo stato locale in (h,k) e determina linearmente il valore dell'uscita nello stesso punto:

$$y(h,k) = C\ x(h,k) \tag{2}$$

Il sistema dinamico descritto dalle equazioni (1) e (2) prende il nome di modello di stato 2D. Il legame ingresso uscita associato a tale sistema è esprimibile mediante la seguente funzione di trasferimento razionale propria in due indeterminate

$$C(I-A_1 z_1 - A_2 z_2)^{-1}(B_1 z_1 + B_2 z_2)$$

Lo stato locale non ha la proprietà di separazione, che è invece caratteristica dello stato globale, definito come la successione degli stati locali appartenenti ad un insieme di separazione $\mathscr{C}_i = \{(h,k) : h+k = i\}$. Indicando lo stato globale e l'ingresso su $\mathscr{C}_i$ con le serie formali

$$\mathscr{X}_i = \sum_{h=-\infty}^{+\infty} x(h,\ i-h)\xi^h \qquad \mathscr{U}_i = \sum_{h=-\infty}^{+\infty} u(h,\ i-h)\xi^h$$

l'aggiornamento di un passo dello stato globale, ricavabile da (1), è dato da:

$$\mathcal{X}_{i+1} = (A_1 + A_2\xi)\mathcal{X}_i + (B_1 + B_2\xi)\mathcal{U}_i$$

Con riferimento alle rappresentazioni locale e globale si possono definire proprietà di raggiungibilità e di osservabilità locali e globali. Esse giocano un ruolo diverso nello studio del problema della minimalità.

Le proprietà locali del modello non implicano la sua minimalità, pur fornendo algoritmi finiti per la riduzione dell'ordine dinamico di una realizzazione; d'altra parte le proprietà globali implicano la minimalità, ma in generale non è possibile costruire realizzazioni di una funzione di trasferimento 2D che siano globalmente raggiungibili ed osservabili.

In proposito val la pena di notare che il problema della costruzione di una realizzazione minima coinvolge metodi non lineari e che la dimensione minima dipende in generale dal corpo dei coefficienti.

Utilizzando la dualità algebrica fra lo spazio delle serie di Laurent e quello dei polinomi bilateri, il sistema (3) può essere considerato come il duale di un sistema lineare definito sull'anello dei polinomi bilateri.

Pertanto, le condizioni di raggiungibilità e di osservabilità globali sono esprimibili rispettivamente come condizioni di rango e di unimodularità di matrici polinomiali.

Nella elaborazione ricorsiva di dati 2D il problema della stabilità riguarda sia l'andamento delle variabili in ingresso e in uscita (stabilità BIBO) sia quello delle variabili di stato (stabilità interna). Con riferimento alla stabilità interna, condizione necessaria e sufficiente perchè il sistema (1) sia asintoticamente stabile è che il polinomio $\det(I-A_1z_1-A_2z_2)$ sia diverso da zero sul polidisco unitario $|z_1| \leq 1$, $|z_2| \leq 1$.

Per ogni modello di stato 2D, la stabilità interna implica la stabilità BIBO, mentre la stabilità BIBO non implica quella interna anche se il modello di stato è di dimensione minima. Infatti le funzioni di trasferimento BIBO stabili in cui siano presenti singolarità di seconda specie sul toro unitario non ammettono realizzazioni internamente stabili.

E' peraltro possibile provare che se una funzione di trasferimento è BIBO stabile e non ha singolarità di seconda specie sul toro unitario, esiste sempre un modello di stato internamente stabile che la realizza.

BIBLIOGRAFIA

E. Fornasini, G. Marchesini: *On the problem of constructing minimal realizations for two-dimensional filters*, IEEE Trans. PAMI, vol. PAMI-2, n. 2, pp. 172-176, (1980).

- *Stability analysis of 2D Systems*, IEEE Trans. CAS vol. CAS-27, n. 12, pp. 1210-17, Dicembre 1980.

- *A critical review of recent results in 2D Systems theory*, Proc. VIII IFAC Congress, vol. II, pp. 147-153, (1981).

- *State space approach to two dimensional filters*, Proc. IEEE Int. Conf. on ASSP, vol. III, pp. 2038-2041 (1982).

- *On the recursive processing of two-dimensional digital data by 2D Systems* Proc. MECO 82, vol. I, pp. 531-534, (1982).

- *Global properties and duality in 2D systems*, Systems and Control Letters, vol. 2, n. 1, pp. 30-38, (1982).

- *Some aspects of the duality theory in 2D systems*, Proc. of the First IASTED Symp. on Appl. Informatics, vol. 1, pp. 197-200, (1983).

M. Bisiacco, E. Fornasini, G. Marchesini: *On commutative realizations of 2D transfer functions*, Proc. EES/MECO, vol. 2, pp. 406-409, (1983).

E. Fornasini, G. Marchesini: *On some connections between 2D systems theory and the theory of system over rings*, (invited paper MTNS 83, Beersheva, Israele (1983), Springer Lecture Notes in Control and Inform. Sc. (P. Fuhrmann Ed.), vol. 58, pp. 331-346.

- *Structure and properties of 2D Systems*, capitolo 2° del volume "Multidimensional Systems, Techniques and Applications", S.G. Tzafestas Editor, M. Dekker publ., (1984).

- *Strutture ricorsive per l'elaborazione di dati bidimensionali*, Scuola GRIS su "Elaborazione di immagini e di dati bidimensionali", (1983).

- *Some connections between algebraic properties on pairs of matrices and 2D Systems realization*, Sixth Int. Conf. on Analysis and Opt. of Systems, Nice, June 19-22, (1984), Springer Lect. Notes in Control and Inf. Sc., vol. 63, pp. 117-129.