5 Reti elettriche lineari stazionarie (R, L, M, C)

5.1 Introduzione

Sia N una rete di e lati, e sia $\mathcal{G}$ uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Gli elementi di $\mathcal{G}^e \times \mathcal{G}^e$, cioè le coppie $(\mathring{i}, v)$ di e-uple di $\mathcal{G}$, che soddisfano (KCL) e (KVL), godono di alcune proprietà.

i) sono un sottospazio vettoriale di $\mathcal{G}^e \times \mathcal{G}^e$, ed anzi sono la somma diretta di un sottospazio $\mathcal{I}$ di $\mathcal{G}^e$ e di un sottospazio $\mathcal{V}$ di $\mathcal{G}^e$: $\mathcal{I}$ è il sottospazio delle soluzioni di (KCL), $\mathcal{V}$ il sottospazio delle soluzioni di (KVL)

ii) se $\mathcal{I}$ contiene solo la soluzione nulla, per il Th. 1 di 4.3, per ogni $\mathring{\mathbb{J}} \in \mathcal{G}^\nu$ risulta

$$(\vec{\mathcal{I}}^*_I)^T \mathring{\mathbb{J}} = 0$$

Ma $\vec{\mathcal{I}}^*_I$ ha rango ν, ed è allora necessario che sia $\nu = 0$, cioè che N sia privo di circuiti, ossia N deve essere un albero o una foresta.

iii) se $\mathcal{V}$ contiene solo la soluzione nulla, per il Th. 2 di 4.3, per ogni $\mathbb{P}$ di $\mathcal{G}^\rho$ risulta

$$(\vec{\mathcal{M}}^*_V)^T \mathbb{P} = 0$$

$\vec{\mathcal{M}}^*_V$ ha rango $\rho = v - c$, e tale rango è nullo se $v = c$, cioè se ogni componente connessa contiene un solo vertice. Ma allora il grafo contiene cappi!

Quanto detto fa chiaramente intuire come le sole (KVL) (KCL) non siano sufficienti a determinare $\mathring{i}$ e v, anche nel caso più semplice in cui $\mathcal{G} = \mathbb{R}$.

In effetti (KCL) e (KVL) fanno riferimento soltanto alla struttura della rete, considerata come entità topologica: si prescinde completamente dalle proprietà fisiche degli elementi di cui i lati della rete possano essere schema e anzi dal significato siano da attribuirsi ai vettori $\mathring{i}$, v, che solo per comodità abbiamo chiamato finora correnti e tensioni (basti pensare che $\mathring{I}$ e V si sono presi in uno spazio vettoriali di tipo arbitrario sul corpo $\mathbb{R}$).

Il postulato, che ora introdurremo, traduce in termini formali una idealizzazione del legame che, in una rete elettrica, esiste fra tensioni e correnti dei suoi lati, indipendentemente dalle connessioni esistenti fra tali lati: in altre parole, noi pensiamo che le relazioni fra il vettore delle correnti e quello delle tensioni della rete elettrica assegnata sia la intersezione fra due relazioni:

i) la relazione imposta da (KCL) e (KVL)

ii) la relazione dovuta alla struttura fisica dei componenti della rete e alla loro mutua posizione nello spazio, a prescindere dalle connessioni esistenti fra i "morsetti" dei componenti stessi.

Qui vogliamo dare veste esplicita alla seconda di tali relazioni, limitandoci ad un caso molto particolare, quello della relazione lineare stazionaria; questa limitazione va imputata sostanzialmente a due motivi: il primo (anche se non piace dirlo, il più importante) è che solo il caso lineare stazionario si riesce a trattarlo senza eccessivo sforzo, e con una certa eleganza, il secondo è che taluni casi non lineari si possono approssimare al lineare (e perciò, non riuscendo a trattarli con migliore precisione, ci si accontenta).

Noi supporremo che G sia lo spazio delle funzioni generalizzate indefinitamente derivabili sull'intervallo $(0, +\infty)$ dell'asse reale, e costruiremo su tale spazio i vettori $\mathring{I}$ e V.

Il postulato che assumiamo è il seguente

(LSN) Sulla rete N, i vettori $\mathring{I}$, V soddisfano la equazione integro-differenziale:

$$\mathbf{v}(t) = \mathcal{L}\,\frac{d\,\mathbf{i}(t)}{dt} + \mathcal{R}\,\mathbf{i}(t) + \mathcal{D}\int_0^t \mathbf{i}(x)\,dx + \mathbf{e}(t) + \mathbf{v}_c(0_+)$$

dove $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{D}$ sono matrici <u>su $\mathbb{R}$</u>, di dimensioni $e \times e$, $\mathbf{e}(t)$ è un vettore di $\mathcal{G}^e$, e $\mathbf{v}_c(0_+)$ è un vettore di $\mathbb{R}^e$, rispettivamente assegnato.

Se passiamo da una rete N ad una analoga N', in cui

$$\vec{m}'_I = \vec{m}_I\, U_I^*$$
$$\vec{m}'_V = \vec{m}_V\, U_V^*$$

poiché sappiamo che, se $(\mathbf{i}, \mathbf{v})$ è soluzione in N di (KCL)(KVL), allora $(U_I^*\,\mathbf{i},\ U_V^*\,\mathbf{v})$ è soluzione di (KCL)(KVL) in N'.
Se $(\mathbf{i}, \mathbf{v})$ verifica anche (LSN) in N, $(U_I^*\,\mathbf{i},\ U_V^*\,\mathbf{v})$ soddisfa (LSN) in N', purché in N' si assuma

$$(1)\qquad \mathcal{L}' = U_V^*\,\mathcal{L}\,U_I^*\ ,\quad \mathcal{R}' = U_V^*\,\mathcal{R}\,U_I^*\ ,\quad \mathcal{D}' = U_V^*\,\mathcal{D}\,U_I^*$$
$$\mathbf{e}'(t) = U_V^*\,\mathbf{e}(t)\ ,\quad \mathbf{v}'_c(0_+) = U_V^*\,\mathbf{v}_c(0_+)$$

Le (1) indicano la trasformazione da applicare alle matrici ed ai vettori $\mathbf{e}(t)$, $\mathbf{v}_c(0_+)$ perché essi <u>"rappresentino" la medesima rete elettrica</u> quando viene cambiato l'orientamento sulla coppia di grafi orientati (la rete, in senso topologico) cui vengono riferite le correnti e le tensioni.

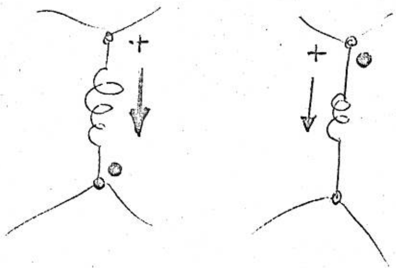
- Il vettore $\mathbf{e}(t)$ vien detto vettore dei generatori.
  Su di un lato può essere nota la componente di $\mathbf{e}(t)$, che viene detta "generatore di tensione" presente su quel lato. In tal caso si presume non prefissata la componente di $\mathbf{i}$ sul medesimo lato.
  Se viceversa è incognita la componente di $\mathbf{e}(t)$, si suppone nota la $\mathbf{i}(t)$ del lato (il lato "include un" generatore di correnti"), e la componente di $\mathbf{e}$ che si ricerca è la tensione" ai capi del generatore di correnti".

Quando si dice che su un lato non c'è generatore, si intende che è nota la relativa componente di $\mathbf{e}(t)$, e che essa <u>è nulla</u>.

Salvo contrario avviso, assumeremo d'ora in poi su tutti i lati la convenzione dell'utilizzatore, e quando parleremo di proprietà delle matrici L, R, D di una rete sottintenderemo che la rete cui esse vanno riferite gode delle proprietà suddette (le osservazioni precedenti consentono di trasferire a reti con orientamenti diversi le proprietà di L, R, D che enunceremo). (*)

- Le matrici R e D sono assunte diagonali (che cosa significherebbe non assumerle diagonali?). Più avanti introdurremo anche l'ipotesi che esse siano a coefficienti non negativi, ma per ora non faremo tale restrizione.
  R è detta matrice delle resistenze, 1/D matrice delle capacità.

- La matrice L, detta matrice delle induttanze, è simmetrica. Più avanti faremo l'ipotesi che sia definita positiva, ma per ora no. Se



gli accoppiamenti sono fra *coppie* di lati (cioè il lato l_i è accoppiato soltanto con un altro lato $l_j \neq l_i$, ossia $L_{ik} = 0$ per $k \neq i, j$) allora i "pallini" sono egualmente situati rispetto alle frecce della corrente oppure non, a seconda che il coefficiente di mutua induzione è positivo o negativo.

(*) Una conseguenza dell'aver assunto su ogni lato la convenzione dell'utilizzatore è quella di poter trascurare i pedici I, V nelle matrici $\vec{M}_I$, $\vec{M}_V$, $\vec{Z}_I$, $\vec{Z}_V$ ......

5.2 Operatori nelle reti elettriche lineari stazionarie

Il metodo più conveniente per trattare le ~~[illegible]~~ equazioni ottenute imponendo (KCL) (KVL) (LSN) ai vettori $\mathbf{i}$ e $\mathbf{v}$ è quello delle trasformate di Laplace, perché le equazioni con cui si ha a che fare sono del tipo integrodifferenziali lineari a coefficienti costanti.

I tre sistemi fondamentali di equazioni diventano:

$$(KCL) \qquad \overrightarrow{\mathcal{M}}^{*} \, \mathbb{I}(s) = 0$$

$$(KVL) \qquad \overrightarrow{\mathcal{Z}}^{*} \, \mathbb{V}(s) = 0$$

$$(LSN) \qquad \mathbb{V}(s) = \mathbb{E}(s) + Z(s)\mathbb{I}(s) - \mathcal{L}\, \mathbf{i}(0_+) + \frac{1}{s} \mathbf{v}_c(0_+)$$

dove

- $\mathbb{I}(s)$, $\mathbb{V}(s)$ sono i trasformati dei vettori $\mathbf{i}(t)$, $\mathbf{v}(t)$
- $\mathbb{E}(s)$ è il trasformato di $\mathbf{e}(t)$
- $Z(s)$ è l'operatore simmetrico $\mathcal{R} + s\mathcal{L} + \frac{1}{s}\mathcal{D}$

[redacted]

- $-\mathcal{L}\,\mathbf{i}(0_+)$, $\frac{1}{s}\mathbf{v}_c(0_+)$ tengono conto delle "condizioni iniziali" secondo le ben note tecniche delle $\mathcal{L}$-Trasformate.

Si noti che $\mathbf{i}(0_+)$ può essere sostituito da $\mathbf{i}_L(0_+)$, ossia dal vettore delle correnti sui "lati induttivi".

Lemma 1 Sia $G = (X, U)$ un grafo connesso, e siano S_1, S_2 due sottoinsiemi disgiunti di U.
Allora, se
(i) S_1 è contenuto in qualche coalbero di G
(ii) S_2 è contenuto in qualche albero di G
esiste un albero A, tale che S_2 sia contenuto $\underline{\underline{\text{in } A}}$ ed S_1 è contenuto nel coalbero $\underline{\underline{\text{di } A}}$.

Prova Si consideri il grafo

$$G' = (X, U - S_1)$$

Esso contiene un albero di G, e quindi è connesso.
Poiché S_2 è disgiunto da S_1, S_2 fa parte di G'.

In G', si prenda un albero B, e lo si completi con i lati di S_2 (che è un insieme privo di circuiti, perchè contenuto in un albero di G)

$B + S_2$ può contenere dei circuiti, ed ogni circuito contiene almeno un elemento di B che non sta in S_2. Si rimuovano alcuni fra questi elementi fino ad ottenere un albero A di G', e quindi di G. È chiaro che A soddisfa il teorema. $\boxtimes$

Il seguente teorema dà una interessante limitazione sulla possibile ubicazione dei generatori di tensione e di corrente in una rete elettrica lineare stazionaria.

Teorema 2. Se in una rete elettrica comunque le equazioni

$$\vec{\mathfrak{M}}^* \mathbb{I}(s) = 0$$

$$\vec{Z}^* \mathbb{V}(s) = 0$$

$$\mathbb{V}(s) = \mathbb{E}(s) + Z(s)\mathbb{I}(s) + \frac{1}{s} v_c(0_+) - \mathcal{L}\, i_L(0_+)$$

hanno una sola soluzione, e se i generatori (non nulli) di tensione e di corrente figurano nei lati della rete come elementi isolati (cioè, se un lato comprende un generatore, non comprende R, L, C) allora esiste un albero della rete tale che i generatori di tensione gli appartengono, mentre quelli di corrente appartengono al coalbero

Prova: Le equazioni possono essere scritte in forma matriciale

$$\begin{array}{r} \\ v-1 \\ e-v+1 \\ e \end{array} \begin{array}{c|c} e & e \\ \hline \vec{\mathfrak{M}}^* & 0 \\ \hline 0 & \vec{Z}^* \\ \hline -Z(s) & \mathbb{1} \end{array} \begin{bmatrix} \mathbb{I}(s) \\ \mathbb{V}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ E(s) + \frac{1}{s} v_c(0_+) - \mathcal{L}\, i_L(0_+) \end{bmatrix} \qquad (1)$$

Partizioniamo i vettori $\mathbb{I}(s)$ e $\mathbb{V}(s)$

$$\mathbb{I}(s) = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_1(s) \\ \mathbb{I}_2(s) \\ \mathbb{I}_3(s) \end{bmatrix} \qquad \mathbb{V}(s) = \begin{bmatrix} \mathbb{V}_1(s) \\ \mathbb{V}_2(s) \\ \mathbb{V}_3(s) \end{bmatrix} \qquad (2)$$

$\mathbb{I}_1(s)$, $\mathbb{V}_1(s)$ si riferiscono ai lati comprendenti un generatore di corrente (e in tal caso è noto $\mathbb{I}_1(s)$), $\mathbb{I}_3(s)$, $\mathbb{V}_3(s)$ ai lati comprendenti un generatore di tensione non nullo (e in tal caso è noto $\mathbb{V}_3$, stante l'ipotesi che i generatori sono isolati sui lati) $\mathbb{I}_2(s)$ $\mathbb{V}_2(s)$ infine si riferiscono ai lati rimanenti.

[illegible] Se nelle (1) le componenti di $\mathbb{I}(s)$ e $\mathbb{V}(s)$ non sono ordinate come in (2), sarà sufficiente effettuare permutazioni di righe e colonne in $Z(s)$, e di colonne in $\vec{m}^*$, $\vec{Z}^*$.

Riscriviamo pertanto le (1), con riferimento alla partizione (2):

$$\begin{array}{l|ccc|ccc|}
(KCL) \rightarrow & \vec{m}^*_{1} & \vec{m}^*_{2} & \vec{m}^*_{,3} & 0 & 0 & 0 \\ \hline
(KVL) \rightarrow & 0 & 0 & 0 & \vec{Z}^*_{1} & \vec{Z}^*_{2} & \vec{Z}^*_{,3} \\ \hline
(\text{LSN sui lati con g di c}) \rightarrow & 0 & 0 & 0 & \mathbb{1} & 0 & 0 \\
\rightarrow & 0 & -Z_{22} & 0 & 0 & \mathbb{1} & 0 \\
(\text{LSN sui lati con g di t}) \rightarrow & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbb{1}
\end{array}
\begin{bmatrix} \mathbb{I}_1(s) \\ \mathbb{I}_2(s) \\ \mathbb{I}_3(s) \\ \mathbb{V}_1(s) \\ \mathbb{V}_2(s) \\ \mathbb{V}_3(s) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ \hline 0 \\ \hline \mathbb{E}_1(s) \\ \frac{1}{s} v_c(0_+) - \mathcal{L}\, i_L(0_+) \\ \mathbb{E}_3(s) \end{bmatrix}$$

Si noti che $Z(s)$ si partisce nel modo sopra riportato perché i lati comprendenti i generatori non contengono R, L, C; il secondo membro si partisce in accordo al fatto che, sui lati con generatori, v_c, $\mathring{i}_L$ hanno componenti nulle. [illegible]

Nel sistema scritto, i vettori colonna comprendono termini noti ed altri incogniti. Noti sono $\mathbb{I}_1(s)$, $E_3(s)$, $\frac{1}{s} v_c(0_+) - \mathcal{L}\, \mathring{i}_L(0_+)$, incogniti gli altri

Ora il sistema si può scrivere:

$$\left(\left[\begin{array}{c|c} m^*_1 & \\ 0 & \\ 0 & 0 \\ 0 & \\ 0 & \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c|c} & 0 \\ & Z^*_3 \\ & 0 \\ & 0 \\ & \mathbb{1} \end{array}\right] + \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & m^*_2 & M^*_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z^*_1 & z^*_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -z_{22} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \right) \begin{bmatrix} \mathbb{I}_1(s) \\ \mathbb{I}_2(s) \\ \mathbb{I}_3(s) \\ \mathbb{V}_1(s) \\ \mathbb{V}_2(s) \\ \mathbb{V}_3(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbb{E}_1(s) \\ \frac{1}{s} v_c(0_+) - \mathcal{L}\, i_L(0_+) \\ \mathbb{E}_3(s) \end{bmatrix}$$

e quindi, portando a secondo membro i primi due prodotti:

$$\begin{bmatrix} 0 & \vec{m}_2^* & \vec{m}_3^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vec{Z}_1^* & \vec{Z}_2^* & \cancel{0} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -Z_{22} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cancel{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{I}_1(s) \\ \mathbb{I}_2(s) \\ \mathbb{I}_3(s) \\ \mathbb{V}_1(s) \\ \mathbb{V}_2(s) \\ \mathbb{V}_3(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\vec{m}_1^* \mathbb{I}_2(s) \\ -\vec{Z}_3^* \mathbb{V}_3(s) \\ \mathbb{E}_1(s) \\ \frac{1}{s} v_c(0_+) - \mathcal{L}\, i_L(0_+) \\ \mathbb{E}_3(s) - \mathbb{V}_3(s) \end{bmatrix}$$

Deve intanto risultare

$$\mathbb{E}_3(s) = \mathbb{V}_3(s)$$

Cancellata questa parte banale del sistema, si ha

$$\begin{bmatrix} \vec{m}_2^* & \vec{m}_3^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \vec{Z}_1^* & \vec{Z}_2^* \\ \cancel{Z} & \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{0} \\ -Z_{22} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{I}_2(s) \\ \mathbb{I}_3(s) \\ \mathbb{V}_1(s) \\ \mathbb{V}_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\vec{m}_1^* \mathbb{I}_1(s) \\ -\vec{Z}_3^* \mathbb{V}_3(s) \\ \mathbb{E}_1(s) \\ 1/s\; v_c(0_+) - \mathcal{L}\, i_L(0_+) \end{bmatrix}$$

La terza equazione ha soluzione

$$\mathbb{E}_1(s) = \mathbb{V}_1(s)$$

e pertanto **basta** ridursi a considerare

$$e \left\{ \left[\begin{array}{c|ccc} \vec{m}_2^* & \multicolumn{3}{c}{\overbrace{\vec{m}_3^* \quad 0 \quad 0}^{e}} \\ 0 & 0 & \vec{Z}_1^* & \vec{Z}_2^* \\ \hline -Z_{22} & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \right. \begin{bmatrix} \mathbb{I}_2(s) \\ \mathbb{I}_3(s) \\ \mathbb{V}_1(s) \\ \mathbb{V}_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\vec{m}_1^* \mathbb{I}_1(s) \\ -\vec{Z}_3^* \mathbb{V}_3(s) \\ 1/s\; v_c(0_+) - \mathcal{L}\, i_L(0_+) \end{bmatrix}$$

che, <u>per ipotesi, ha un'unica soluzione.</u>
La matrice dei coefficienti è quadrata e deve allora essere non singolare: se fosse singolare, l'equazione omogenea associata avrebbe altre soluzioni, oltre alla soluzione nulla(*), e tutte possono essere interpretate come Laplace Trasformate, in quanto hanno strutture di vettori di funzioni razionali in s. Tali soluzioni possono essere sommate a quella del sistema completo, e ne perderebbe la unicità che si è supposta ipotesi.
Le righe della matrice dei coefficienti sono tutte linearmente indipendenti (su $\mathbb{R}(s)$ e quindi) su $\mathbb{R}$

(*) Si osservi che tali soluzioni vanno ricercate sul corpo delle funzioni razionali nella indeterminata s.

Le prime $v-1$ righe, in particolare, sono indipendenti: perciò $[M_2^* \mid M_3^*]$ contiene una matrice non singolare di ordine $v-1$ e, per noti teoremi, i lati che afferiscono a tale matrice sono quelli di un albero A.

I generatori di corrente sono evidentemente sui lati del coalbero di A, perché M_1^* corrisponde proprio all'insieme dei generatori di corrente

Analogamente, il secondo insieme di $(e-v+1)$ righe è linearmente indipendente, e quindi $[Z_1^* \mid Z_2^*]$ contiene una matrice non singolare di ordine $(e-v+1)$, le cui colonne corrispondono ai rami di un coalbero C.

I generatori di tensione (non nulli) sono sui lati dell'albero A' di cui C è coalbero, perché Z_3^* corrisponde proprio all'insieme dei generatori di tensione.

Il lemma 1 porge la conclusione. ⊠

[illegible] Il seguente teorema, che, sotto opportune ipotesi, è l'inverso del precedente, sarà provato nei paragrafi successivi

Th. 3 Se in una rete elettrica connessa

(i) i generatori di corrente e di tensione (non nulli) appartengono i primi ad un coalbero della rete, i secondi all'albero complementare, e figurano come elementi isolati

(ii) non vi sono corticircuiti, cioè se una riga (e colonna) di $Z(s)$ è nulla, il lato corrispondente è un generatore non nullo

[illegible]

(iii) R e D hanno tutti termini non negativi e le righe e colonne non nulle di L costituiscono una submatrice definita positiva

allora le equazioni (KCL) (KVL) (LSN) hanno una e una sola soluzione. ⊠

5.3 Sistemi di equazioni alle maglie e ai nodi.

Nel paragrafo si supporranno sempre fatte le ipotesi seguenti:

(i) R, D hanno termini non negativi.

(ii) L ha colonne e righe non nulle costituenti una matrice definita positiva

(iii) generatori di corrente e di tensione (non nulli) sono isolati sui lati della rete, ed appartengono i primi ad un coalbero, i secondi all'albero corrispondente

(iv) non ci sono lati di cortocircuito

Sia A l'albero che contiene i generatori di tensione, C il coalbero di A che contiene i generatori di corrente di una assegnata rete elettrica connessa; si partizionino le variabili come nella prova del Th. 2 del paragrafo precedente.

~~[illegible]~~

Quindi:
- indice 1 → lati con generatore di corrente, elementi di C
- indice 2 → lati senza generatori (non nulli), elementi di A o di C
- indice 3 → lati con generatore di tensione, elementi di A

5.4 Proprietà delle matrici immettenza standard.

Def. 1 Una matrice quadrata M, di dimensioni n×n, reale, simmetrica, è "definita positiva" se, per ogni vettore non nullo $v \in \mathbb{R}^n$, risulta

$$v^T M v \gneqq 0$$

Se può valere il segno di eguaglianza per $v \neq 0$, è "semidefinita positiva".

Esercizio 2 Se M è reale simmetrica, di dimensioni n×n, allora $v^T M v \gneqq 0$ per ogni $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$ se e solo se $\check{w}^T M w \gneqq 0$ per ogni $w \in \mathbb{C}^n$, $w \neq 0$. **Risultato analogo vale quando la diseguaglianza è in senso debole.**

Si prova il seguente:

Th. 3 Una matrice M reale simmetrica, di dimensione n×n, è definita positiva se e solo se sono positivi i suoi n minori principali (l'r-esimo minore principale è il determinante della sottomatrice ottenuta da M cancellandone righe e colonne oltre la r-esima). ⊠

Osservazione: si noti che, se M è definita positiva, tutti i suoi termini diagonali sono positivi.
E' pure ovvio che, se M è definita positiva, ed N è una matrice [illegible] di eguali dimensioni, semidefinita positiva [illegible], M + N è definita positiva.

Th. 4 Nelle ipotesi elencate all'inizio di **5**.3, la matrice $Z_{22}(s)$ è definita positiva per valori <u>reali positivi</u> di s.

Prova: Se i singoli lati della rete non contengono più di un elemento (nel senso che se, p.es. la componente di $\mathcal{R}$ relativa ad un lato è non nulla, son nulle le componenti di $\mathcal{L}$ e di $\mathcal{D}$), allora, con una opportuna permutazione delle righe e delle colonne, si ottiene

$$Z_{22}(s) = \left[\begin{array}{c|c|c} \mathcal{R} & 0 & 0 \\ \hline 0 & s\mathcal{L} & 0 \\ \hline 0 & 0 & \frac{1}{s}\mathcal{D} \end{array}\right]$$

e

$$\det Z_{22}(s) = (\det \mathcal{R})(\det \mathcal{L})(\det \mathcal{D})\, s^{k}$$

con k opportuno intero (negativo, positivo o nullo)

I tre determinanti sono tutti positivi strettamente, e quindi, per s reale positivo risulta

$$\det Z_{22}(s) > 0$$

Analogamente per ogni minore principale.

Se i lati della rete sono ~~[illegible]~~ costituiti da serie R, L, M, C, la osservazione premessa al teorema porta ancora alla stessa conclusione: la prova è un facile esercizio. ⊠

La funzione det $Z_{22}(s)$ è ~~[illegible]~~ definita ed analitica in tutto $\mathbb{C}$, ~~[illegible]~~ eccetto, al più, nell'origine, dove può presentare una singolarità polare.

Trattandosi di una funzione razionale, non identicamente nulla per quanto provato in Th. 4, ha solo un numero finito di zeri, ed è pertanto invertibile sul corpo delle funzioni razionali.

Ma allora $Z_{22}(s)$ è dotata di inversa, sul corpo delle funzioni razionali (perché il suo determinante è funzione razionale invertibile), e risulta (*)

$$Y_{22}(s) = Z_{22}^{-1}(s) = \frac{\mathrm{Adj}\ Z_{22}(s)}{\det Z_{22}(s)}$$

Osservazione: $Y_{22}(s)$ ~~[illegible]~~ è costituita da funzioni razionali in s. Nel caso ~~in~~ cui siano assenti le induttanze mutue, $Z_{22}(s)$ è diagonale, e tale rimane $Y_{22}(s)$: ogni suo elemento diagonale è l'inverso del corrispondente elemento di $Z_{22}(s)$. ~~[illegible]~~

Def 5. Le matrici $\mathcal{Z}_{22}^{*}\ Z_{22}(s)\ \mathcal{Z}_{22}^{*T} = Z_m(s)$ e $\vec{\mathcal{Z}}_{22}^{*}\ Y_{22}(s)\ \vec{\mathcal{Z}}_{22}^{*T} = Y_q(s)$ sono dette matrici immettenze standard.
La prima si dice anche matrice delle impedenze di maglie, la seconda matrice delle ammettenze di ~~[illegible]~~ set.

(*) L'aggiunta di una matrice quadrata M è la trasposta della matrice dei complementi algebrici.

Nella prima matrice [si ricordi che $\vec{Z}^{*}_{22}$ è relativa soltanto ai circuiti del sistema fondamentale prescelto che non contengono generatori di corrente] il generico elemento di posto (i,j) in assenza di mutue induttanze è la somma algebrica delle impedenze dei lati comuni al circuito i-esimo e al circuito j-esimo; se gli orientamenti, su un lato comune l_K, sono concordi per i due circuiti, l'impedenza del lato l_K viene considerata col suo segno, col segno negativo nel caso contrario.

Nella seconda matrice [$\vec{\mathcal{Y}}^{*}_{22}$ è relativa soltanto ai cut set che non contengono generatori di tensione] il generico elemento di posto (i,j), in assenza di mutue induttanze è somma algebrica delle ammettenze dei lati comuni al cut-set i esimo ed al cut-set j-esimo: se gli orientamenti, su un lato comune l_K, sono concordi per i due cut set, l'ammettenza del lato l_K viene considerata col suo segno, col segno negativo nel caso contrario.

Lemma 6: Se M è una matrice reale (semi)definita positiva, di ordine n, e se N è una matrice di ordine $(r \times n)$ <u>e di rango r</u>, allora NMN^T è (semi)definita positiva.

Prova. Intanto NMN^T è simmetrica: infatti

$$(NMN^T)^T = N^{T^T}M^TN^T = NMN^T$$

Se M è definita positiva, sia X un vettore colonna di $\mathbb{R}^r$, non nullo: allora

$$X^TNMN^TX \gneqq 0$$

Infatti

$$N^TX \neq 0$$

perchè N^T è matrice di una trasformazione lineare da $\mathbb{R}^r$ in $\mathbb{R}^n$; il rango è r e quindi $\dim(\mathrm{Ker}\, N^T)=0$, cioè solo il vettore nullo ha lo zero come immagine.

Ma allora il vettore $Y = N^TX \neq 0$ certo verifica la:

$$Y^TMY \gneqq 0$$

perchè M è definita positiva. ☒

Prova analoga se M è semidefinita positiva

Teorema 7. Nelle solite ipotesi, le matrici immettenza standard verificano le seguenti proprietà

(i) sono simmetriche

(ii) sono definite positive per valori reali positivi di s

(iii) sono invertibili su $\mathbb{C}(s)$

(iv) il loro determinante non ha zeri nel semipiano $\mathrm{Re}(s) > 0$

Prova : (i) Immediata, trasponendo, ed osservando che $Z_{22}(s)$, e quindi $Y_{22}(s)$, sono certamente simmetriche.

(ii) Si ricordi che la matrice

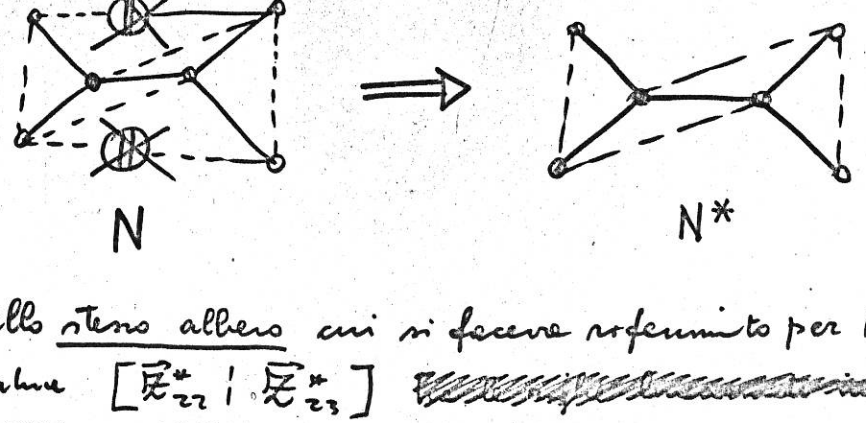
$$\vec{\mathcal{Z}}^* = \left[\begin{array}{c|cc} \mathbb{1} & \vec{\mathcal{Z}}^*_{12} & \vec{\mathcal{Z}}^*_{13} \\ \hline 0 & \vec{\mathcal{Z}}^*_{22} & \vec{\mathcal{Z}}^*_{23} \end{array}\right]$$

fa riferimento, nel primo blocco di righe, a tutti i circuiti di un sistema fondamentale contenenti generatori di corrente, e nel secondo blocco a tutti i circuiti del medesimo sistema fondamentale che non contengono generatori di corrente.

Se si rimuovono dalla rete N i lati contenenti generatori di corrente, la rete N* restante contiene, come sistema fondamentale di circuiti, quello associato alla matrice:

$$\left[\vec{\mathcal{Z}}^*_{22} \,\middle|\, \vec{\mathcal{Z}}^*_{23}\right]$$

Infatti, tali circuiti sono associati, nel modo consueto, ad un coalbero di N*, precisamente al coalbero in



N* dello stesso albero cui si faceva riferimento per N.

Nella matrice $[\vec{\mathcal{Z}}^*_{22} \mid \vec{\mathcal{Z}}^*_{23}]$ [illegible]

[illegible] le co-

colonne di $\vec{Z}^*_{23}$ fan riferimento ad <u>alcuni</u> lati dell'albero prescelto in N, e quindi in N* (ai lati contenenti gen. di tensione). Quindi le colonne di $\vec{Z}^*_{22}$ si riferiscono a tutte i lati del coalbero $\overset{\text{in } N^*}{,}$ più eventualmente alcuni dell'albero, e pertanto da $\vec{Z}^*_{22}$ si può estrarre una submatrice quadrata di <u>ordine</u> massimo, non singolare: quella del coalbero in N*. Si possono applicare il lemma 6 ed il th. 4, per concludere che $Z_m(s)$ è definita positiva per ogni s reale e positivo.

Prova analoga per la matrice $\mathring{Y}_q(s)$.

(iii) Poiché $Z_m(s)$ ed $Y_q(s)$ hanno determinante non nullo su tutta la semiretta $\mathbb{R}_{++}$ e tale determinante è una funzione razionale, le matrici sono invertibili su $\mathbb{C}(s)$.

(iv) Si supponga che $Z_m(s)$ si annulli in qualche punto s del piano di Gauss.

Si ricordi inoltre che, per $s \in \mathbb{R}_{++}$, $Z_m(s)$ è definita positiva, e si noti che

$$\mathcal{L}_m = \vec{Z}^*_{22}\, \mathcal{L}\, \vec{Z}^{*T}_{22}$$

$$\mathcal{R}_m = \vec{Z}^*_{22}\, \mathcal{R}\, \vec{Z}^{*T}_{22}$$

$$\mathcal{D}_m = \vec{Z}^*_{22}\, \mathcal{D}\, \vec{Z}^{*T}_{22}$$

sono semidefinite positive [perché?]

Se risulta, per un certo s,

$$\det Z_m(s) = 0$$

esiste un vettore $\mathring{j}$ <u>non nullo</u>, a componenti complesse, tale che

$$Z_m(s)\, \mathring{j} = 0 \quad ;$$

ossia:

$$s \mathcal{L}_m \mathring{j} + \mathcal{R}_m \mathring{j} + \frac{1}{s} \mathcal{D}_m \mathring{j} = 0$$

Osservato che

$$\check{j}^T \mathcal{L}_m \mathring{j} \quad , \check{j}^T \mathcal{R}_m \mathring{j} \quad , \quad \check{j}^T \mathcal{D}_m \mathring{j}$$

sono reali non negativi, e non tutti simultaneamente nulli e interpretando le

$$s^2\left(\check{\mathbb{J}}^T \mathcal{L}_m \mathring{\mathbb{J}}\right) + s\left(\check{\mathbb{J}}^T \mathcal{R}_m \mathring{\mathbb{J}}\right) + \check{\mathbb{J}}^T \mathcal{D}_m \mathring{\mathbb{J}} = 0$$

come equazione in s, poiché i coefficienti sono reali e non negativi, non esistono soluzioni a parte reale positiva.

La prova per la matrice $Y_q(s)$ è simile ⊠

5.5 Funzioni energia della rete e proprietà associate

Consideriamo le matrici

$$\mathcal{L}_m = \vec{\mathcal{Z}}^{*}_{22}\,\mathcal{L}_{12}\,\vec{\mathcal{Z}}^{*T}_{22}$$

$$\mathcal{R}_m = \vec{\mathcal{Z}}^{*}_{22}\,\mathcal{R}_{12}\,\vec{\mathcal{Z}}^{*T}_{22}$$

$$\mathcal{D}_m = \vec{\mathcal{Z}}^{*}_{22}\,\mathcal{D}_{12}\,\vec{\mathcal{Z}}^{*T}_{22}$$

Si tratta di matrici quadrate, di dimensioni $\nu \times \nu$, se ν ~~sarà~~ è la nullità del grafo associato alla rete, diminuita dei lati contenenti generatori di corrente.

Esse sono a valori reali, semidefinite positive.

Def 1. Sia $\mathbb{J}_2(s)$ una ν-upla di funzioni della variabile complessa s. Allora le funzioni

$$\mathcal{T}(s) = \check{\mathbb{J}}_2^{T}(s)\,\mathcal{L}_m\,\mathring{\mathbb{J}}_2(s)$$

$$\mathcal{F}(s) = \check{\mathbb{J}}_2^{T}(s)\,\mathcal{R}_m\,\mathbb{J}_2(s)$$

$$\mathcal{V}(s) = \check{\mathbb{J}}_2^{T}(s)\,\mathcal{D}_m\,\mathbb{J}_2(s)$$

sono dette le funzioni energia della rete associate alla ν-upla $\mathbb{J}_2(s)$.

Th. 2 Eccettuati i punti dove $\overset{\text{le componenti di}}{}$ $\mathbb{J}_2(s)$ sono singolari (e quindi non definite), le funzioni energia sono reali e non negative su tutto $\mathbb{C}$.

Prova. Si ricordi che $\mathcal{L}_m$ $\mathcal{R}_m$ $\mathcal{D}_m$ sono semidefinite positive e che, per ogni numero complesso w, risulta allora

$$\check{w}\,\mathcal{L}_m\,w \geq 0 \qquad \check{w}\,\mathcal{R}_m\,w \geq 0 \qquad \check{w}\,\mathcal{D}_m\,w \geq 0 \qquad \boxtimes$$

Th. 3 Eccettuati i punti dove $\mathbb{J}_2(s)$ ha componenti singolari, la funzione

$$\mathcal{W}(s) = \mathcal{F}(s) + s\,\mathcal{T}(s) + \frac{1}{s}\,\mathcal{V}(s) = \check{\mathbb{J}}_2^{T}(s)\,Z_m(s)\,\mathring{\mathbb{J}}_2(s)$$

è reale per s reale positivo, ed ha parte reale non negativa, per s con parte reale positiva.

Prova: La prima parte è conseguenza del fatto che $Z_m(s)$ è definita positiva per s reale positivo.

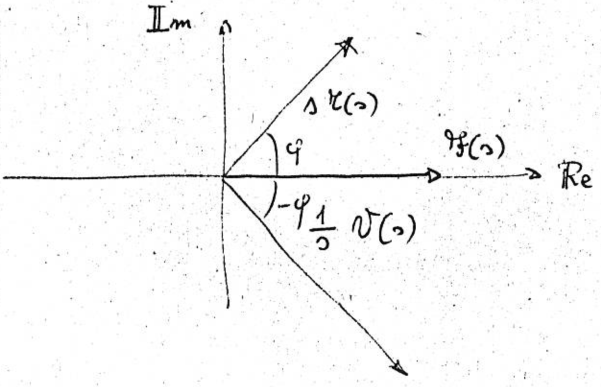
La seconda parte deriva dal fatto che

$$\mathcal{F}(s) = \check{\mathbb{J}}_2^T(s)\, \mathcal{R}_m\, \mathring{\mathbb{J}}_2(s)$$

$$s\mathcal{T}(s) = s\left(\check{\mathbb{J}}_2^T(s)\, \mathcal{L}_m\, \mathring{\mathbb{J}}_2(s)\right)$$

$$\frac{1}{s}\mathcal{V}(s) = \frac{1}{s}\left(\check{\mathbb{J}}_2^T(s)\, \mathcal{D}_m\, \mathring{\mathbb{J}}_2(s)\right)$$

sono tutti numeri complessi a parte reale non negativa, se s è a parte reale non negativa.



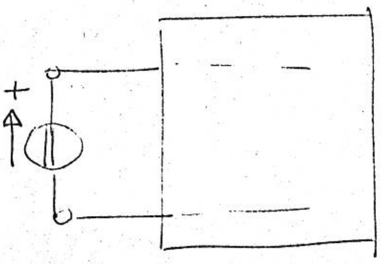
⊠

Tenendo presente la definizione di funzione positiva reale (cf. 6.1), si può allora affermare che

Oss. 4: Se $\mathring{\mathbb{J}}_2(s)$ è priva di singolarità in $\mathbb{C}_{++}$, $\mathcal{W}(s)$ è funzione reale positiva. ⊠

Si consideri ora una rete dotata di un solo generatore di tensione, e di nessun generatore di corrente, <u>con condizioni iniziali $v_C(0_+) = i_L(0_+) = 0$</u>

Se sul lato contenente il generatore si assume la convenzione del generatore, il rapporto



$$Z_i(s) = \frac{V_3(s)}{I_3(s)}$$

è detta impedenza di ingresso vista dal generatore $V_3(s)$.

Th. 5 L'impedenza di ingresso è indipendente dalla tensione del generatore $V_3(s)$, ed è una funzione razionale.

Prova : Essendo

$$I_3(s) = \vec{\mathcal{Z}}^{*T}_{23} \overset{\circ}{\mathbb{J}}_2(s)$$

e, in ipotesi di condizioni iniziali nulle:

$$\overset{\circ}{\mathbb{J}}_2(s) = + Z^{-1}_m(s) \vec{\mathcal{Z}}^{*}_{23} V_3(s)$$

si ha

$$\frac{V_3(s)}{I_3(s)} = \frac{1}{\vec{\mathcal{Z}}^{*T}_{23} Z^{-1}_m(s) \vec{\mathcal{Z}}^{*}_{23}}$$

che garantisce la razionalità dell'impedenza di ingresso e la sua indipendenza dalla tensione del generatore.

Th. 6 L'impedenza di ingresso è una funzione positiva reale.

Prova. Si partizionino $\mathbb{I}(s)$ e $\mathbb{V}(s)$ nelle componenti $I_3(s)$ $\mathbb{V}_3(s)$ relative al lato con generatore, ed $\mathbb{I}_2(s)$, $\mathbb{V}_2(s)$ relative agli altri lati.

Pel teorema di Tellegen si ha, tenuto conto che sul generatore vige la convenzione del generatore e sugli altri lati la convenzione dell'utilizzatore:

$$\check{I}_3(s) V_3(s) = \check{\mathbb{I}}^T_2(s) \mathbb{V}_2(s)$$

Ricordando che, per condizioni iniziali nulle, è

$$Z_{22}(s) \mathbb{I}_2(s) = \mathbb{V}_2(s)$$

si ha la

$$\check{I}_3(s) V_3(s) = \check{\mathbb{I}}^T_2(s) Z_{22}(s) \mathbb{I}_2(s)$$

Dalla relazione alle maglie vista in 6.3:

$$\mathbb{I}_2(s) = \vec{\mathcal{Z}}^{*}_{22} \overset{\circ}{\mathbb{J}}_2(s)$$

si trae

$$\check{I}_3(s) V_3(s) = \check{\overset{\circ}{\mathbb{J}}}{}^T_2(s) \vec{\mathcal{Z}}^{*}_{22} Z_{22}(s) \vec{\mathcal{Z}}^{*T}_{22} \overset{\circ}{\mathbb{J}}_2(s) =$$

$$= \check{\overset{\circ}{\mathbb{J}}}{}^T_2(s) Z_m(s) \overset{\circ}{\mathbb{J}}_2(s)$$

e quindi

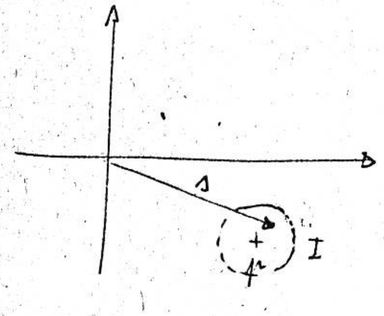
$$Z_i(s) = \frac{V_3(s)}{I_3(s)} = \frac{V_3(s)\, \check{I}_3(s)}{I_3(s)\, \check{I}_3(s)} = \frac{\mathcal{W}(s)}{|I_3(s)|^2}$$

Si noti che, dove $Z_i(s)$ non ha poli, [illegible] gode delle proprietà di essere reale non negativa per s reale positivo e di avere parte reale non negativa in $\mathbb{C}_{++}$.

Basterà provare, per concludere, che $Z_i(s)$ è analitica in $\mathbb{C}_{++}$, cioè vi è priva di poli.

Infatti, se p è punto di polo in $\mathbb{C}_{++}$, nel suo intorno I $Z_i(s)$ si comporta come la funzione

$$\frac{A}{(s-p)^k}$$



ed è facile convincersi che

$$\angle \frac{A}{(s-p)^k} = \angle A - k \angle s-p$$

può assumere, al variare di s in I, ogni valore, contro il fatto che, dove è analitica, $Z_i(s)$ ha parte reale non negativa.

☒

Il fatto che l'impedenza di ingresso sia una funzione positiva reale per ogni rete dotata di un solo generatore (bipolo), rende particolarmente utile lo studio delle principali proprietà delle funzioni positive reali, in vista del problema della sintesi.

E' possibile costruire funzioni energia in modo duale di quello descritto all'inizio del paragrafo, riferendosi ai potenziali ai nodi:

[illegible]

non ci soffermeremo su ciò (cfr. per: Tuttle: Network Synthesis vol. 1°), limitandoci soltanto a ricordare una conseguenza, e che cioè la ammettenza di ingresso del bipolo passivo è esprimibile come:

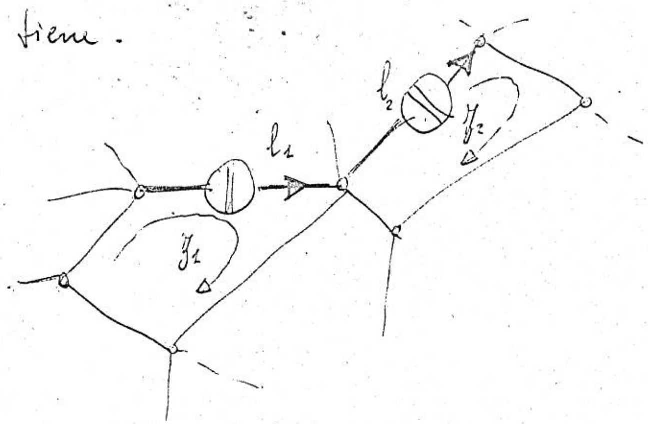
$$Y_i(s) = \frac{\tilde{W}(s)}{|V_s^2(s)|} = \frac{\tilde{F}(s) + s\,\tilde{T}(s) + \frac{1}{s}\tilde{V}(s)}{|V_s^2(s)|}$$

con $\tilde{F}$, $\tilde{T}$, $\tilde{V}$ funzioni reali di variabile complessa, giammai negative, e nulle ovunque: $\tilde{F}$ quando la rete non comprende resistori, $\tilde{T}$ quando la rete non comprende condensatori, $\tilde{V}$ quando la rete non comprende induttanze.

L'equazione delle maglie

1) Si suppone che $\vec{\mathbb{Z}}^*$ sia riferita al sistema fondamentale di circuiti del coalbero C : quindi ogni generatore di corrente appartiene ad un circuito soltanto.

Si ordinano, inoltre, i circuiti in modo che $\mathcal{Z}_1$ contenga il primo generatore di corrente, $\mathcal{Z}_2$ il secondo, —— fino all'esaurimento dei generatori, e si introduce, sui circuiti contenenti un generatore di corrente, un orientamento concorde a quello del lato cui tale generatore appartiene.



Allora il secondo principio di Kirchhoff si scrive:

$$\begin{array}{rccc} \text{circuiti del sistema di C contenenti generatori di corrente} & \mathbb{1} & \vec{\mathbb{Z}}_{12} & \vec{\mathbb{Z}}_{13} \\ \text{non contenenti gen di corr} & 0 & \vec{\mathbb{Z}}_{22} & \vec{\mathbb{Z}}_{23} \\ & \text{lati con generatore di corrente} & \text{altri lati} & \text{lati con generatori di tensioni} \end{array} \begin{bmatrix}\mathbb{V}_1(s)\\ \mathbb{V}_2(s)\\ \mathbb{V}_3(s)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} \qquad (a)$$

2) Ricordiamo poi che il vettore delle correnti $\mathbb{I}(s)$ soddisfa (KCL) se e solo se risulta

$$\mathbb{I}(s) = \vec{\mathbb{Z}}^{*T}\dot{\mathbb{J}}(s)$$

dove $\dot{\mathbb{J}}(s)$ è il vettore delle correnti di maglie

La relazione precedente può essere messa in forma più significativa, partizionando $\mathbb{J}(s)$ nelle componenti relative ai circuiti del sistema di C che contengono e non contengono generatori di corrente; e partizionando $\mathbb{I}(s)$:

$$\begin{bmatrix} \mathbb{I}_1(s) \\ \mathbb{I}_2(s) \\ \mathbb{I}_3(s) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbb{1} & \mathbb{0} \\ \vec{\mathcal{Z}}^{*T}_{12} & \vec{\mathcal{Z}}^{*T}_{22} \\ \vec{\mathcal{Z}}^{*T}_{13} & \vec{\mathcal{Z}}^{*T}_{23} \end{array}\right] \begin{bmatrix} \mathbb{J}_1(s) \\ \mathbb{J}_2(s) \end{bmatrix} \qquad (b)$$

Si trova così immediatamente

$$\mathbb{I}_1(s) = \mathring{\mathbb{J}}_1(s)$$

3) Le relazioni fornite da (LSN) sono espresse dalle

$$\begin{bmatrix} \mathbb{V}_1(s) \\ \mathbb{V}_2(s) \\ \mathbb{V}_3(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & Z_{22}(s) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{I}_1(s) \\ \mathbb{I}_2(s) \\ \mathbb{I}_3(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbb{E}_1(s) \\ 0 \\ \mathbb{E}_3(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{s} v_c(0_+) - \mathcal{L}_{22} i_{L_2}(0_+) \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (c)$$

La prima e la terza equazione sono immediate:

$$\mathbb{V}_1(s) = \mathbb{E}_1(s)$$

$$\boxed{\mathbb{V}_3(s) = \mathbb{E}_3(s)}$$

La seconda è

$$\mathbb{V}_2(s) = Z_{22}(s)\,\mathbb{I}_2(s) + \frac{1}{s} v_c(0_+) - \mathcal{L}_{22}\,\mathring{i}_{L_2}(0_+)$$

4) A questo punto conosciamo ancora solo $\mathbb{V}_3(s)$ ed $\mathbb{I}_1(s)$

Utilizziamo le seconde equazioni di (a) (b) (c):

$$\vec{\mathcal{Z}}^{*}_{22}\,\mathbb{V}_2(s) = -\vec{\mathcal{Z}}^{*}_{23}\,\mathbb{V}_3(s)$$

$$\mathbb{V}_2(s) - Z_{22}\,\mathbb{I}_2(s) = \frac{1}{s} v_c(0_+) - \mathcal{L}_{22}\,\mathring{i}_{L_2}(0_+)$$

$$\mathbb{I}_2(s) - \vec{\mathcal{Z}}^{*T}_{22}\,\mathring{\mathbb{J}}_2(s) = \vec{\mathcal{Z}}^{*T}_{12}\,\mathring{\mathbb{J}}_1(s)$$

Si osservi che i secondi membri sono noti: sostituendo nella seconda equazione ~~[illegible]~~ la $\mathbb{I}_2(s)$ fornita dalla terza, e nella prima la $\mathbb{V}_2(s)$ fornita dalla seconda, si perviene alla:

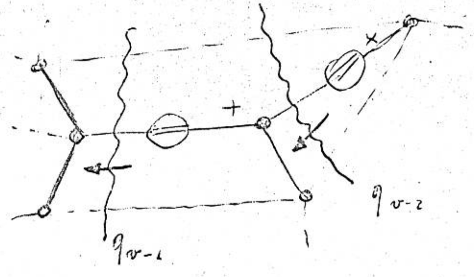
$$\left[\vec{\mathcal{Z}}^{*}_{22}\,Z_{22}(s)\,\vec{\mathcal{Z}}^{*T}_{22}\right]\mathring{\mathbb{J}}_2(s) = -\vec{\mathcal{Z}}^{*}_{23}\,\mathbb{V}_3(s) - \vec{\mathcal{Z}}^{*}_{22}\,Z_{22}\,\vec{\mathcal{Z}}^{*T}_{12}\,\mathbb{I}_1(s) -$$
$$- \frac{1}{s}\vec{\mathcal{Z}}^{*}_{22}\,v_c(0_+) + \vec{\mathcal{Z}}^{*}_{22}\,\mathcal{L}_{22}\,\mathring{i}_{L_2}(0_+)$$

La matrice $\left(\vec{\mathcal{Z}}^{*}_{22}\,Z_{22}(s)\,\vec{\mathcal{Z}}^{*T}_{22}\right)$ è detta matrice delle impedenze di maglia. Se essa è non singolare, la equazione precedente può essere risolta nell'incognita $\mathring{\mathbb{I}}_2(s)$: la sua non singolarità sarà stabilita in un successivo teorema, sotto le ipotesi elencate all'inizio del paragrafo.

5) La seconda delle (b) consente ora di determinare $\mathbb{I}_2(s)$, la terza $\mathbb{I}_3(s)$.
Allora la seconda delle (c) individua $\mathbb{V}_2(s)$
Infine la prima delle (a) determina $\mathbb{V}_1(s)$

L'equazione ai nodi

1) Si suppone che $\vec{\mathcal{Q}}^*$ sia riferita al sistema fondamentale di cut set dell'albero A: ogni generatore di tensione appartiene perciò ad un cut set soltanto.
Si ordinino i cut set in modo che i generatori di tensione siano contenuti nei primi cut-set di tale ordinamento, e si introduca un orientamento, in tali piani,



concorde a quello del lato contenente il generatore.
Allora il primo principio di Kirchhoff si scrive: $\vec{\mathcal{Q}}^* \mathbb{I}(s) = 0$

$$\begin{array}{l} \text{cut set del sistema di A contenenti generat. di tensione} \\ \text{non contenenti generatori di tensione} \end{array} \left[\begin{array}{cc|c} \vec{\mathcal{Q}}^*_{11} & \vec{\mathcal{Q}}^*_{12} & 1 \\ \hline \vec{\mathcal{Q}}^*_{21} & \vec{\mathcal{Q}}^*_{22} & 0 \\ \text{lati con generatore di corrente} & \text{senza generatori} & \text{con generat. di tensioni} \end{array}\right] \begin{bmatrix} \mathbb{I}_1(s) \\ \mathbb{I}_2(s) \\ \mathbb{I}_3(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (d)$$

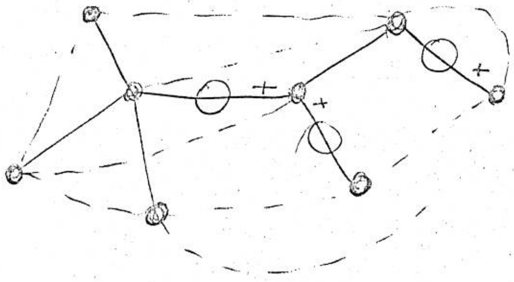
2) Il vettore delle tensioni $\mathbb{V}(s)$ soddisfa (KVL) se e solo se risulta

$$\mathbb{V}(s) = \vec{\mathcal{Q}}^{*T} \mathbb{P}(s)$$

dove $\mathbb{P}(s)$ è il vettore dei potenziali di cut set. Esplicitamente, partizionando vettori e matrici:

$$\begin{bmatrix} \mathbb{V}_1(s) \\ \mathbb{V}_2(s) \\ \mathbb{V}_3(s) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} \vec{\mathcal{Q}}^{*T}_{11} & \vec{\mathcal{Q}}^{*T}_{21} \\ \vec{\mathcal{Q}}^{*T}_{12} & \vec{\mathcal{Q}}^{*T}_{22} \\ \mathbb{1} & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} \mathbb{P}_1(s) \\ \mathbb{P}_2(s) \end{bmatrix} \qquad (e)$$

dove $\mathbb{P}_1(s)$ si riferisce ai cut set (del sistema di A) che contengono generatori di tensione non nulli, ~~[illegible]~~



Si trova immediatamente

$$\mathbb{V}_3(s) = \mathbb{P}_1(s)$$

3) Le relazioni fornite dalla (LSN) sono come nelle (c) già viste, e si ha, come ~~[illegible]~~ indicato nelle conseguenze di ~~[illegible]~~ (c):

$$\mathbb{V}_3(s) = \mathbb{E}_3(s)$$

4) Finora conosciamo solo $\mathbb{V}_3(s)$ ed $\mathbb{I}_1(s)$.

Utilizziamo le seconde equazioni di (d) (e) (c)

$$(f) \quad \begin{cases} \vec{\mathcal{Q}}^{*}_{22}\, \mathbb{I}_2(s) = -\vec{\mathcal{Q}}^{*}_{21}\, \mathbb{I}_1(s) \\ \mathbb{V}_2(s) - \vec{\mathcal{Q}}^{*T}_{22} \vec{\mathbb{P}}_2 = \vec{\mathcal{Q}}^{*}_{12}\, \mathbb{P}_1(s) \\ \mathbb{V}_2(s) - Z_{22}\, \mathbb{I}_2(s) = \frac{1}{s} v_c(0_+) - \mathcal{L}_{22}\, \mathrm{i}_{L_2}(0_+) \end{cases}$$

delle quali sono noti i secondi membri.

<u>Si supponga</u> la matrice Z_{22} invertibile, e si ponga

$$Y_{22}(s) = Z_{22}(s)^{-1}$$

L'ultima delle (f) assume la forma:

$$(g)\quad Y_{22}(s)\,\mathbb{V}_2(s)-\mathbb{I}_2(s) = \mathbb{Y}_{22}(s)\left[\frac{1}{s}\,v_c(0_+)-\mathcal{L}_{22}\,\dot{\mathbb{i}}_{L_2}(0_+)\right]$$

L'invertibilità della Z_{22} si proverà in seguito, sotto le ipotesi poste all'inizio del paragrafo.

Sostituiamo nella prima delle (f) la $\mathbb{I}_2(s)$ fornita da (g):

$$(h)\quad \vec{\mathcal{Q}}^{*}_{22}\left[Y_{22}(s)\,\mathbb{V}_2(s)-Y_{22}\left(\frac{1}{s}\,v_c(0_+)-\mathcal{L}_{22}\,\dot{\mathbb{i}}_{L_2}(0_+)\right)\right]=-\vec{\mathcal{Q}}^{*}_{21}\,\mathbb{I}_1(s)$$

e premoltiplichiamo la seconda delle (f) per $\vec{\mathcal{Q}}^{*}_{22}\,Y_{22}(s)$:

$$(i)\quad \vec{\mathcal{Q}}^{*}_{22}\,Y_{22}(s)\,\mathbb{V}_2(s)-\vec{\mathcal{Q}}^{*}_{22}\,Y_{22}(s)\,\vec{\mathcal{Q}}^{*T}_{22}\,\tilde{\mathbb{P}}_2=\vec{\mathcal{Q}}^{*}_{22}\,Y_{22}(s)\,\vec{\mathcal{Q}}^{*}_{12}\,\mathbb{P}_1(s)$$

Da (h) ed (i) otteniamo, per sottrazione

$$(l)\quad \vec{\mathcal{Q}}^{*}_{22}\,Y_{22}(s)\,\vec{\mathcal{Q}}^{*T}_{22}\,\tilde{\mathbb{P}}_2(s)=-\vec{\mathcal{Q}}^{*}_{22}\,Y_{22}(s)\,\vec{\mathcal{Q}}^{*}_{12}\,\mathbb{P}_1(s)+Y_{22}\Big(\frac{1}{s}\,v_c(0_+)-$$
$$-\mathcal{L}_{22}\,\dot{\mathbb{i}}_{L_2}(0_+)\Big)-\vec{\mathcal{Q}}^{*}_{21}\,\mathbb{I}_1(s)$$

La (l) consente di ottenere $\mathbb{P}_2(s)$ se $\underbrace{\vec{\mathcal{Q}}^{*}_{22}\,Y_{22}(s)\,\vec{\mathcal{Q}}^{*T}_{22}}_{=\mathbb{Y}_q(s)}$ è invertibile (e lo è, nelle solite ipotesi).

5) La seconda delle (f) consente ora di ricavare $\mathbb{V}_2(s)$

Dalla (g) si ottiene $\mathbb{I}_2(s)$

La prima delle (e) fornisce $\mathbb{V}_1(s)$ e la prima delle (d) fornisce $\mathbb{I}_3(s)$.

Sono rimaste in sospeso alcune questioni:

i) l'invertibilità di $Z_{22}(s)$

ii) l'invertibilità di $\vec{\mathcal{Z}}^{*}_{22}\,Z_{22}(s)\,\vec{\mathcal{Z}}^{*T}_{22}$

iii) l'invertibilità di $\vec{\mathcal{Q}}^{*}_{22}\,\mathbb{Y}_{22}(s)\,\vec{\mathcal{Q}}^{*T}_{22}$

A queste questioni, fra l'altro, è dedicato il prossimo paragrafo. Si noti comunque che, una volta fornitane la prova, è verificato il Th. 3 di 5.2