

$$X(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s-2 \end{bmatrix}$$

$$\Psi(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)(s+2)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}$$

Siamo ora in grado di applicare l'algoritmo di realizzazioni descritto nel par. 10.

Dalla (10.9), abbiamo

$$\begin{aligned} W(s) &= \psi_1^{-1} \phi \psi_1 (\text{col}_1(\phi X) \text{row}_1(\Psi)) + \psi_2^{-1} \phi \psi_2 (\text{col}_2(\phi X) \text{row}_2(\Psi)) \\ &= \frac{1}{(s+1)(s+2)} \phi \psi_1 \begin{bmatrix} 2+s & \frac{s}{2} & 1 \\ 2 & \frac{s}{2} & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{s+2} \phi \psi_2 \begin{bmatrix} 1-\frac{s}{2} & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Con le formule (10.11) costruiamo

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad C_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = -2; \quad C_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e quindi la realizzazione di $W(s)$ è la seguente

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

III) ELEMENTI DI TEORIA DEI MINIMI QUADRATI

Per lo studio dei sistemi lineari dissipativi che svolgono in seguito, abbiamo bisogno di concetti e risultati della teoria dei minimi quadrati, che esporremo succintamente in questo capitolo.

Il concetto di forma su uno spazio vettoriale risulta a questo proposito fondamentale. Per dare almeno qualche informazione dei chieremo alcuni paragrafi alle forme bilineari simmetriche (o prodotti interni) su spazi vettoriali (generalmente di dimensione finita).

Accenneremo nei paragrafi successivi ad alcuni problemi di ottimizzazione nei sistemi lineari, utilizzando come tecniche di soluzione l'equazione differenziale e l'equazione algebrica di Riccati.

1. Forme bilineari

Dato uno spazio vettoriale W su un corpo F , ed assunta una base in W , diremo forme su W quelle funzioni da W in F che possono essere espresse come funzioni polinomiali omogenee delle coordinate dei punti di W rispetto alla base prescelta.

Noi saremo interessati alle forme bilineari (in particolare, a quelle simmetriche) e, più avanti, alle forme hermitiane.

Def. 1 Siano W e W' spazi vettoriali sul corpo F . Una forma bilineare su $W \times W'$ è una applicazione

$$f: W \times W' \rightarrow F$$

$$f: (v, v') \mapsto f(v, v')$$

che soddisfa le seguenti condizioni

$$f(v+w, v') = f(v, v') + f(w, v')$$

$$f(v, v'+w') = f(v, v') + f(v, w')$$

$$f(av, v') = af(v, v')$$

$$f(v, av') = af(v, v')$$

(1.1)

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \\
 \text{(1.6)}
 \end{array}$$

con $h \in F$.

Le matrici elementari di $F^{p \times p}$ si possono pensare come operatori lineari "a sinistra" sullo spazio $F^{p \times m}$: se $H \in F^{p \times m}$, ed $E \in F^{p \times p}$ è una matrice elementare, la matrice trasformata EH si ottiene da H

- moltiplicando la i -esima di H per h se E è del primo tipo
- sommando alla i -esima riga di H la j -esima riga moltiplicata per h se E è del secondo tipo
- scambiando in H la i -esima e la j -esima riga se E è del terzo tipo.

E' ovvio quali siano le operazioni indotte su H dalle matrici elementari di $F^{m \times m}$ quando agiscono come "operatori a destra".

E' un esercizio ormai facile, sulla traccia di quanto abbiamo fatto nel cap. II, par. 8, verificare che applicando a destra e a sinistra della matrice H opportune sequenze di matrici elementari la matrice H può essere sempre resa equivalente ad una del tipo $\text{diag}\{1, 1, \dots, 1\}_{p \times m}$. Ciò è formalizzato nel seguente

Teor. 1 Sia H una matrice $p \times m$ ad elementi su F . Allora esistono matrici elementari $E_1, E_2, \dots, E_t \in F^{p \times p}$ ed $E'_1, E'_2, \dots, E'_t \in F^{m \times m}$ tali che

$$E_t E_{t-1} \dots E_1 H E'_1 E'_2 \dots E'_t = \text{diag}\{1, 1, \dots, 1\}_{p \times m} \quad (1.7)$$

Inoltre $t = \text{rank } H$

Poichè le matrici del tipo (1.7) costituiscono un insieme di forme canoniche per la relazione "equivalente" sulle matrici di $F^{p \times m}$, le classi di equivalenza sono in numero di $\min(p, m) + 1$.

Inoltre il rango delle matrici è un invariante completo per la relazione.

Esercizio 3. Ogni matrice invertibile di $F^{m \times m}$ è prodotto di matrici elementari di $F^{m \times m}$.

Esempio 3. La matrice $H \in R^{3 \times 4}$

$$H = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

può essere trasformata nella matrice $\text{diag}\{1, 1, 1, 0\}$ con le seguenti operazioni elementari

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} H = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} = H_1$$

$$H_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} = H_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} H_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = H_3$$

$$H_3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = H_4$$

$$H_4 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = H_5$$

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} H_5 = \text{diag}\{1, 1, 1, 0\}$$

Esercizio 4. Se V^* e W^* sono gli spazi duali di V e di W rispettivamente ^(*), ad ogni coppia $(f, g) \in V^* \times W^*$ corrisponde una forma bilineare fg su $V \times W$ ottenuta eseguendo il prodotto punto per punto dei funzionali f e g :

$$(fg)(v, w) \triangleq f(v) g(w).$$

Se V e W hanno dimensione finita, la matrice rappresentativa di fg (rispetto a prefissate basi in V e W) ha rango non superiore ad uno.

Esercizio 5. Siano V e W di dimensione finita. Ogni forma bilineare di rango 1 su $V \times W$ è il prodotto di un elemento di V^* per un elemento di W^* .

2. Spazi vettoriali a prodotto interno

Sia V uno spazio vettoriale sul corpo F .

Def. 1 Un "prodotto interno" su V è una forma bilineare simmetrica. In altre parole essa è una applicazione di $V \times V$ in F che associa alla coppia ordinata (v, w) di elementi di V un elemento di F , che indicheremo con $\langle v | w \rangle$

$$(v, w) \mapsto \langle v | w \rangle$$

e che gode delle seguenti proprietà:

- (i) $\langle v | w \rangle = \langle w | v \rangle$ (simmetria)
- (ii) $\langle u | v + w \rangle = \langle u | v \rangle + \langle u | w \rangle$
- (iii) $\langle \alpha u | v \rangle = \alpha \langle u | v \rangle$

qualunque siano u, v, w in V , α in F .

Def. 2 Due vettori $v, w \in V$ si dicono "ortogonali" (rispetto a $\langle \cdot | \cdot \rangle$) se

$$\langle v | w \rangle = 0 \quad (2.2)$$

Un vettore v è "isotropo" se è ortogonale a sè stesso

$$\langle v | v \rangle = 0 \quad (2.3)$$

ed è "degenerare" se è ortogonale ad ogni vettore di V :

$$\langle v | w \rangle = 0 \quad \forall w \in V \quad (2.4)$$

Def. 3 Il prodotto interno $\langle \cdot | \cdot \rangle$ si dice "degenerare" se ha vettori degeneri diversi dal vettore nullo.

Esempio 1. Su F^n si definisca il prodotto interno "usuale":

$$\langle v | w \rangle = v^T w \quad (2.5)$$

Se $F = \mathbb{Q}$ oppure $F = \mathbb{R}$, non ci sono vettori isotropi, ed il prodotto così definito è non degenerare. Si verifichi che se $F = \mathbb{C}$ oppure $F = \mathbb{Z}/(2\mathbb{Z})$ ed $n > 1$, esistono vettori isotropi non nulli.

Esempio 2. Se H è una matrice simmetrica di F^n , è un prodotto interno su F^n quello definito dalla:

^(*) cfr. A.1 def. 5

$$\langle v|w \rangle = v^T H w \quad (2.6)$$

Si studi come dipendono le proprietà di tale prodotto interno da quelle della matrice H .

Esempio 3. Sia W lo spazio delle funzioni reali continue definite sull'intervallo $[0,1]$. Se $f, g \in W$, poniamo:

$$\langle f|g \rangle = \int_0^1 f g dt \quad (2.7)$$

Si verifichi che in tal modo è definito su W un prodotto scalare non degenerare.

Particolarizzando ai prodotti interni quanto abbiamo detto nel par. 1, se W è spazio vettoriale di dimensione finita su F , e se $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ ne è una base, un prodotto interno $\langle \cdot | \cdot \rangle$ su F è perfettamente individuato dall'assegnazione della matrice simmetrica.

$$\| \langle e_i | e_j \rangle \|$$

ossia dalla conoscenza del prodotto interno fra i vettori della base. Per ogni coppia di vettori in $W: v = \sum_{i=1}^n v_i e_i, w = \sum_{i=1}^n w_i e_i$ si ha

$$\langle v|w \rangle = \sum_{i,j=1}^n v_i w_j \langle e_i | e_j \rangle$$

Di conseguenza, rappresentando i vettori di W rispetto alla base pre scelta con le matrici colonna delle componenti dei vettori, il prodotto $\langle v|w \rangle$ si riduce a un prodotto matriciale:

$$\langle v|w \rangle = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \langle e_1 | e_1 \rangle & \langle e_1 | e_2 \rangle & \dots & \langle e_1 | e_n \rangle \\ \langle e_2 | e_1 \rangle & \dots & \dots & \langle e_2 | e_n \rangle \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ \langle e_n | e_1 \rangle & \dots & \dots & \langle e_n | e_n \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$$

E' immediato che, fissata la base in W , la totalità delle matrici simmetriche in $F^{n \times n}$ rappresenta biunivocamente la totalità dei prodotti interni su W .

Inoltre, poichè $\| \langle e_i | e_j \rangle \|$ ha rango pieno se e solo se il prodotto interno $\langle \cdot | \cdot \rangle$ non è degenerare, i prodotti non degeneri sono biunivocamente rappresentati dalla famiglia delle matrici simmetriche invertibili di $F^{n \times n}$.

Se operiamo un cambiamento di base in W , individuato da una matrice invertibile M , si possono ripetere i ragionamenti fatti in par. 1 per ricavare la matrice associata al prefissato prodotto interno $\langle \cdot | \cdot \rangle$ nella nuova base. Essa sarà ovviamente

$$M^T \| \langle e_i | e_j \rangle \| M \quad (2.8)$$

Cambiando la base in W in tutti i modi possibili, M descrive il gruppo delle matrici invertibili di $F^{n \times n}$.

Poichè due matrici $H, K \in F^{n \times n}$, simmetriche, si dicono congruenti se esistono una matrice invertibile $M \in F^{n \times n}$ tale che

$$H = M^T K M \quad (2.9)$$

si vede che due matrici simmetriche sono congruenti se e solo se rappresentano, rispetto a basi diverse, il medesimo prodotto interno.

La relazione di congruenza è ovviamente riflessiva, simmetrica e transitiva. Inoltre è chiaro che se due matrici sono congruenti sono equivalenti nel senso della def(1.5); il viceversa non è vero, dato che (1.5) non impone affatto che l'operatore di destra N sia trasposto di quello di sinistra M^T .

E' abbastanza facile, a questo punto, constatare che anche per la relazione di congruenza le trasformazioni elementari giocano un ruolo confrontabile con quello visto nel precedente paragrafo per le forme bilineari generiche. Poichè ogni matrice invertibile M è prodotto di un numero finito di matrici elementari, è chiaro che H e $K \in F^{n \times n}$ sono congruenti se e solo se esistono matrici elementari $E_1, E_2, \dots, E_t \in F^{n \times n}$ tali da aversi

$$H = E_t^T E_{t-1}^T \dots E_2^T E_1^T K E_1 E_2 \dots E_{t-1} E_t \quad (2.10)$$

Questo fatto semplicissimo ci consente di provare un importante teorema:

Teor. 1 Ogni matrice simmetrica in $F^{n \times n}$ è diagonalizzabile per congruenza se F non ha caratteristica 2 ^(°)

^(°) F ha caratteristica 2 se $1+1=0$.

prova. Il teorema è banalmente vero per $m = 1$. Procederemo per induzione, assumendolo vero su $\mathbb{F}^{(m-1) \times (m-1)}$, e provando che vale per una generica matrice simmetrica $H \in \mathbb{F}^{m \times m}$.

E' immediato che si sarà ottenuta la conclusione quando si sarà dimostrato che

$$H = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1m} \\ h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{m1} & h_{m2} & \dots & h_{mm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ \vdots & \vdots \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

è congruente con la matrice

$$\bar{H} = \begin{bmatrix} h_{11} & 0 \\ 0 & \bar{H}_{22} \end{bmatrix}$$

perchè ad $\bar{H}_{22}$ si può applicare l'ipotesi induttiva quando si utilizzano le matrici elementari a blocchi di $\mathbb{F}^{m \times m}$ del tipo

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & E_{22} \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \\ \\ \\ m-1 \end{matrix}$$

Allora, se $H_{21} = 0$ non c'è nulla da provare.

Altrimenti, sia h_{r1} il primo elemento non nullo di H_{21} . Distingueremo due casi, a seconda che si abbia $h_{11} \neq 0$ oppure $h_{11} = 0$.

Se è $h_{11} \neq 0$, posto

$$E = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & h_{r1} & \dots & h_{1r} \\ & & & h_{11} & \dots & h_{1r} \end{bmatrix} \quad (r) \quad (2.12)$$

la matrice $EHE^T = H'$ coincide con H eccetto nella r -esima riga e nella r -esima colonna, ed è $h'_{r1} = h_{1r} = 0$.

Procedendo su H' come già fatto su H (l'elemento $h'_{11} = h_{11} \neq 0$) si costruiscono successivamente H'' , H''' , ... fino a pervenire con un numero finito di passi ad $\bar{H}$.

Se è $h_{11} = 0$, o esiste un elemento diagonale h_{tt} in H non nullo, ed allora basta scambiare fra loro la prima e la t -esima riga e la prima e la t -esima colonna per ritrovare la situazione precedente, o tutta la diagonale è nulla.

In quest'ultimo caso si sommano in H alla prima riga la r -esima e alla prima colonna la r -esima, ponendo

$$E = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \quad (r) \quad (2.13)$$

e ottenendo la matrice

$$\bar{H} = EHE^T = \begin{bmatrix} 2h_{r1} & \bar{h}_{12} \\ \vdots & \vdots \\ \bar{h}_{21} & \bar{h}_{22} \end{bmatrix}$$

Poichè la caratteristica di $\mathbb{F}$ è diversa da 2, $2h_{r1}$ non è nullo, e si ricade nel primo caso considerato. ■

Si noti che la prova del teorema suggerisce anche una tecnica di calcolo per costruire una matrice M di diagonalizzazione.

Coroll.1 Il rango di una matrice simmetrica $H \in \mathbb{F}^{m \times m}$ (car $\mathbb{F} \neq 2$) è eguale al numero degli elementi non nulli di ogni matrice diagonale congruente ad H . ■

Esercizio 1. Quando car $\mathbb{F} \neq 2$, ogni classe di equivalenza della relazione di congruenza contiene almeno una matrice diagonale. In generale i) l'insieme delle matrici diagonali non è un insieme di forme canoniche ii) il numero degli elementi non nulli in una matrice diagonale (oppure il rango della matrice) non è un invariante completo per la relazione di congruenza.

Esercizio 2. Se $\mathbb{F}$ è il corpo con due elementi $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, si verifichi che la matrice $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ non diagonalizza per congruenza.

Quando $\mathbb{F}$ è il corpo reale $\mathbb{R}$ sussiste il seguente notevole:

Teor.2. (LEGE D'INERZIA DI SYLVESTER). L'insieme delle matrici di $\mathbb{R}^{m \times m}$ del tipo

$$\text{diag} \left\{ \underbrace{1, \dots, 1}_s, \underbrace{-1, -1, \dots, -1}_r, \underbrace{\dots, \dots}_m \right\} \quad (2.14)$$

($r+s \leq m$) costituisce un insieme di forme canoniche per la relazione di congruenza sulle matrici simmetriche di $\mathbb{R}^{m \times m}$.

La coppia di interi (s, r) è detta la "segnatura" di ciascuna delle matrici congruenti alla matrice (2.14).

prova. Ogni matrice simmetrica è congruente ad una diagonale Δ , e poichè la matrice diagonale, operando eventualmente scambi di righe e colonne, può pensarsi con la diagonale principale ordinata in modo da avere prima tutti gli elementi positivi, poi tutti i negativi ed infine tutti quelli nulli:

$$\Delta = \text{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, -\beta_1, -\beta_2, \dots, -\beta_r, 0, \dots, 0) \quad m \times m$$

$$\alpha_i, \beta_j > 0$$

sarà sufficiente operare su Δ la congruenza indotta da

$$M = M^T = \text{diag}(\sqrt{\alpha_1}, \sqrt{\alpha_2}, \dots, \sqrt{\alpha_s}, \sqrt{-\beta_1}, \sqrt{-\beta_2}, \dots, \sqrt{-\beta_r}, \underbrace{1, \dots, 1}_m) \quad m \times m$$

per ottenere una matrice nella forma (2.14).

Resta da provare che due diverse matrici del tipo (2.14) non sono mai congruenti. E' intanto chiaro che, poichè il rango è invariante per congruenza ed il rango di (2.14) vale $r+s$, due matrici Δ_1 e Δ_2 distinte:

$$\Delta_1 = \text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_s, \underbrace{-1, -1, \dots, -1}_r, \underbrace{\dots, \dots}_m) \quad m \times m$$

$$\Delta_2 = \text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_s, \underbrace{-1, -1, \dots, -1}_r, \underbrace{\dots, \dots}_m) \quad m \times m$$

possono essere congruenti soltanto se $r+s = r'+s'$.

Se Δ_1 e Δ_2 sono congruenti, esse rappresentano il medesimo prodotto interno riferito a due basi diverse, rispettivamente $(e_1, e_2, \dots, e_m)$ e $(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m)$, e risulta

$$\langle e_1 | e_1 \rangle = \langle e_2 | e_2 \rangle = \dots = \langle e_s | e_s \rangle = +1$$

$$\langle e_{s+1} | e_{s+1} \rangle = \langle e_{s+2} | e_{s+2} \rangle = \dots = \langle e_{s+r} | e_{s+r} \rangle = -1$$

$$\langle \delta_1 | \delta_1 \rangle = \langle \delta_2 | \delta_2 \rangle = \dots = \langle \delta_s | \delta_s \rangle = +1$$

$$\langle \delta_{s+1} | \delta_{s+1} \rangle = \langle \delta_{s+2} | \delta_{s+2} \rangle = \dots = \langle \delta_{s+r} | \delta_{s+r} \rangle = -1$$

Proviamo che $e_1, e_2, \dots, e_s, \delta_{s+1}, \delta_{s+2}, \dots, \delta_m$ sono linearmente indipendenti: allora $s+m-s' < m$ implica $s < s'$ ed un ragionamento simmetrico implica $s > s'$.

Supposto che si abbia

$$v = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_s e_s = \beta_{s+1} \delta_{s+1} + \dots + \beta_m \delta_m$$

risulta

$$\langle v | v \rangle = \sum_{i=1}^s \alpha_i^2 = - \sum_{i=s'+1}^m \beta_i^2$$

$$\text{e quindi } \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_s = \beta_{s+1} = \beta_m = 0$$

Riservandoci di tornare nel prossimo paragrafo allo studio dei prodotti interni sul corpo reale, riprendiamo qui l'ipotesi che $\mathbb{F}$ sia generico.

La prova dei fatti seguenti è un facile esercizio:

Teor.3 I vettori degeneri, in un assegnato prodotto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ su V , sono un sottospazio vettoriale di V , detto "nucleo" del prodotto interno.

Teor.4 I vettori ortogonali ad un assegnato insieme $\mathcal{F}$ di vettori sono ortogonali a tutto il sottospazio generato da $\mathcal{F}$, che indicheremo con $\langle \mathcal{F} \rangle$, e costituiscono essi stessi un sottospazio, che indicheremo con $\mathcal{F}^\perp$.

Sussistono inoltre i seguenti teoremi, qui enunciati per $\dim V < \infty$. (Si vedano i problemi al termine del paragrafo).

Teor.5 Se W è un sottospazio di V , e $\dim W < \infty$, allora

$$\dim W \leq \dim W + \dim W^\perp \quad (2.15)$$

Teor.6 Se $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è non degenero e se $\dim V < \infty$, per ogni sottospazio $W \subseteq V$ risulta:

- (i) $\dim W = \dim W + \dim W^\perp$
- (ii) $W = (W^\perp)^\perp$

$$(2.16)$$

Teor. 7 Se W è privo di vettori isotropi, per ogni sottospazio $W \subseteq V$ risulta:

$$W \cap W^\perp = 0 \quad (2.17)$$

Se $\dim W < \infty$, allora W e $W^\perp$ sono complementari nel senso che

$$\langle W \cup W^\perp \rangle = W \quad (2.18)$$

Esercizio 3. Sia $F = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$; si costruisca un sottospazio W di $V = F^4$ per cui non risulti $\langle W \cup W^\perp \rangle = W$. Si ricordi che F^4 ha non degenerare l'usuale prodotto interno, ma che tale prodotto è dotato di vettori isotropi.

Se V è spazio vettoriale su F e se la caratteristica di F è maggiore di 2 (cioè: se in F $1+1 \neq 0$), ad ogni prodotto interno su V si associa una mappa

$$q: V \rightarrow F$$

detta forma quadratica, ponendo

$$q(v) = \langle v | v \rangle \quad (2.19)$$

Si lascia come esercizio verificare che q soddisfa le seguenti proprietà:

- i) $q(v) = q(-v)$
- ii) $2^{-1}[q(v+w) - q(v) - q(w)] = \langle v | w \rangle$

Esercizio 4. Di solito le i) e ii) vengono assunte a definizione di forma quadratica (la ii) si legge dicendo che $2^{-1}[q(v+w) - q(v) - q(w)]$ definisce su V un prodotto interno). Si verifichi che, con questa definizione di q , si ha:

- a) $q(0) = 0$
- b) $q(u+v+w) = q(u+v) + q(v+w) + q(u) - q(v) - q(w)$
- c) $q(2u) = 4q(u)$
- d) $q(\lambda u) = \lambda^2 q(u)$, $\lambda \in F$
- e) $1/2[q(u+v) + q(u-v)] = q(u) + q(v)$

Fissata una base $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ in V e supposto che V abbia dimensione finita, al prodotto interno $\langle \cdot | \cdot \rangle$ resta associata, come s'è vi-

sto, la matrice simmetrica $\langle e_i | e_j \rangle$: se v_i è la componente del vettore v su e_i , abbiamo

$$q(v) = \begin{bmatrix} v_1 & \dots & v_m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \langle e_1 | e_1 \rangle & \dots & \langle e_1 | e_m \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle e_m | e_1 \rangle & \dots & \langle e_m | e_m \rangle \end{bmatrix} = \sum_{i,j=1}^m \langle e_i | e_j \rangle v_i v_j$$

Quindi ogni forma quadratica, espressa tramite le coordinate dei vettori di V rispetto ad una base prefissata, è una funzione polinomiale omogenea e simmetrica del secondo grado nelle coordinate.

Concludiamo questo paragrafo introducendo un altro concetto strettamente legato a quello di prodotto interno: la nozione di aggiunta di una trasformazione lineare.

Siano V e W due spazi vettoriali sullo stesso corpo F , dotati rispettivamente del prodotto interno $\langle \cdot | \cdot \rangle_V$ e $\langle \cdot | \cdot \rangle_W$.

Def. 4 Se T è una trasformazione lineare da V in W

$$T: V \rightarrow W,$$

una trasformazione lineare L da W in V

$$L: W \rightarrow V$$

è detta aggiunta di T se, per ogni $v \in V$ e per ogni $w \in W$, abbiamo

$$\langle v | Lw \rangle_V = \langle Tv | w \rangle_W \quad (2.20)$$

Il seguente teorema rende ragione del fatto che usualmente si parla di "la" trasformazione aggiunta di una data trasformazione T : infatti essa, sotto ipotesi di solito verificate, è unica (quando esiste).

Teor. 8 Se il prodotto interno $\langle \cdot | \cdot \rangle_V$ è non degenere, la aggiunta L di una trasformazione $T: V \rightarrow W$, se esiste, è unica.

prova. Se esistessero due aggiunte $L \neq \bar{L}$ della medesima trasformazione T , avremmo, qualunque siano $v \in V$, $w \in W$:

$$\langle Tv | w \rangle_W = \langle v | Lw \rangle_V = \langle v | \bar{L}w \rangle_V$$

Quindi:

$$\langle v | (L - \bar{L})w \rangle_V = 0 \quad (2.21)$$

Se per qualche w fosse $(L-\bar{L})w \neq 0$, l'arbitrarietà di v porterebbe a concludere che $\langle \cdot | \cdot \rangle_v$ è degenerare, contro l'ipotesi. Quindi, per ogni $w \in (L-\bar{L})$ $w = 0$, ossia

$$L = \bar{L} \quad (2.22)$$

D'ora in poi, quando considereremo l'aggiunta di una trasformazione T , supporremo sempre verificate le condizioni che ne assicurano l'unicità, e denoteremo la trasformazione aggiunta di T con T^* .

Def.5 Una trasformazione $T: V \rightarrow V$ è detta autoaggiunta se $\langle Tv | w \rangle = \langle v | Tw \rangle$ per ogni $v, w \in V$, cioè se $T = T^*$.

Problema 1. Si dimostri il teor. 5 [Sugg. Per ogni $v \in W$, si definisca su W il funzionale lineare $t_v: w \mapsto \langle v | w \rangle$. Si definisca la trasformazione lineare $\psi: W \rightarrow W^*: v \mapsto t_v$ (°) e si provi che $W^* = \ker \psi$. La conclusione segue osservando che $\psi(V) \subseteq W^*$ e che $\dim W^* = \dim W$, e ricordando la relazione $\dim(\ker \psi) = \dim W - \dim \psi(W)$ [7].

Problema 2. Si dimostri il teor. 6 [Sugg. (ii) segue subito da (i) provando che $(i) \Rightarrow \dim W = \dim (W^*)^1 \Rightarrow W = (W^*)^1$. Per verificare (i), basta far vedere che ψ nel probl. 1 è suriettiva, ossia che per ogni $\lambda \in W^*$, esiste $u \in W$ tale che sia $\lambda = t_u$.

Se λ non è nullo su tutto W , si definisca su W il funzionale $\bar{\lambda}$ ponendo $\bar{\lambda} = \lambda$ su W e $\bar{\lambda} = 0$ su un complemento di W : allora $\dim(\ker \bar{\lambda}) \geq 1$ e quindi esiste un vettore non nullo $v \in \ker \bar{\lambda}$. Se $w \in W$ è tale da aver $\lambda(w) \neq 0$, si verifichi che $\langle v | w \rangle \neq 0$ e che $v \cdot \lambda(w) / \langle v | w \rangle$ è il vettore u cercato [7].

Problema 3. Si dimostri il teor. 7.

Problema 4. (TEOREMA DI SYLVESTER). Se le matrici $M \in \mathbb{F}^{n \times n}$, $N \in \mathbb{F}^{n \times n}$ verificano la $MN = 0$, allora $\text{rank } M + \text{rank } N \leq n$ [Sugg. Si considerino i sottospazi di $\mathbb{F}^n$ generati dalle righe di M e dalle colonne di N . In prodotto in $\mathbb{F}^n$ il prodotto interno usuale, si applichi il teor. 6 [7].

(°) W^* denota lo spazio duale di W (cfr. A.1 def. 5).

3. Spazi vettoriali su $\mathbb{R}$ con prodotto interno (semi)definito positivo.

Quando si considerano spazi vettoriali sul corpo $\mathbb{R}$, hanno notevole interesse i prodotti interni definiti positivi.

Uno dei motivi di questo interesse è la possibilità di introdurre il concetto di norma, e quindi di dotare lo spazio di una struttura metrica.

Def.1 Sia W spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Un prodotto interno $\langle \cdot | \cdot \rangle$ su W si dice "definito positivo" se

$$\begin{aligned} (i) \quad & \langle v | v \rangle \geq 0 \quad \forall v \in W \\ (ii) \quad & \langle v | v \rangle = 0 \quad \text{solo se } v = 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Se vale solo (i), $\langle \cdot | \cdot \rangle$ si dice semidefinito positivo.

Quando W ha dimensione finita su $\mathbb{R}$, fissata una base $(e_1, e_2, \dots, e_m)$ in W , il prodotto $\langle \cdot | \cdot \rangle$ è esprimibile mediante una matrice simmetrica $K = \| \langle e_i | e_j \rangle \|$. Le matrici che rappresentano, rispetto a qualche base, prodotti interni (semi)definiti sono dette (semi)definite positive. Se K è una di esse, è caratterizzata dalla proprietà

$$(i) \quad x^T K x \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^m$$

nel caso della semipositività, da (i) e da

$$(ii) \quad x^T K x = 0 \Rightarrow x = 0$$

nel caso della positività.

Poiché, per una opportuna scelta della base, ogni prodotto interno su $\mathbb{R}$ è esprimibile con una matrice del tipo (2.14), si è stata facilmente che le matrici semidefinite positive sono congruenti a matrici (2.14) con $r = 0$ (ossia prive di termini -1 sulla diagonale) e che le matrici definite positive sono congruenti alla matrice identità. La prova è lasciata come esercizio.

Una conseguenza immediata è che le matrici definite positive hanno rango pieno, e che se una matrice semidefinita positiva

va ha rango pieno, allora è definita positiva.

Un'altra conseguenza, della quale faremo spesso uso nel seguito, è espressa dal seguente

Teor. 1 Una matrice $K \in \mathbb{R}^{p \times m}$ è semidefinita positiva di rango $v \leq m$ se e solo se è fattorizzabile nella forma

$$K = H^T \Delta H \quad (3.2)$$

dove H è una matrice di rango v .

prova. Se K è semidefinita positiva di rango v , è congruente alla matrice

$$\Delta = \text{diag}(\underbrace{1 \dots 1}_v \underbrace{0 \dots 0}_{m-v})$$

e quindi esiste una matrice invertibile M per cui si ha

$$K = M^T \Delta M$$

La matrice

$$H = \Delta M \quad (3.3)$$

ha rango v , e risulta:

$$H^T H = M^T \Delta^T \Delta M = M^T \Delta M = K$$

Se viceversa vale (3.2), è ovvio che K è semidefinita positiva. Proviamo che il suo rango è v . Se $H \in \mathbb{R}^{p \times m}$, esistono trasformazioni di equivalenza per cui H assume la forma

$$H = M \text{diag}(\underbrace{1 \dots 1}_v \underbrace{0 \dots 0}_{m-v}) \begin{matrix} N \\ p \times m \end{matrix}$$

con M ed N matrici invertibili di $\mathbb{R}^{p \times p}$ e di $\mathbb{R}^{m \times m}$ rispettivamente. Allora abbiamo

$$K = N^T \text{diag}(\underbrace{1 \dots 1}_v \underbrace{0 \dots 0}_{m-v}) M^T M \text{diag}(\underbrace{1 \dots 1}_v \underbrace{0 \dots 0}_{m-v}) N$$

ed $M^T M$ è una matrice di $\mathbb{R}^{p \times p}$ definita positiva. Ciò implica che sia definita positiva la sottomatrice di $M^T M$ formata con le prime v righe e v colonne (la prova è un facile esercizio) e che di conseguenza abbia rango v la matrice

$$\text{diag}(\underbrace{1 \dots 1}_v \underbrace{0 \dots 0}_{m-v}) M^T M \text{diag}(\underbrace{1 \dots 1}_v \underbrace{0 \dots 0}_{m-v})$$

Poiché N è invertibile, si conclude che anche K ha rango v . ■

Osservazione. Il teor. 1 fornisce una prova alternativa del fatto che in II.2 teor. 4 Q_2^T è matrice invertibile.

Può tornare utile il seguente test, per la prova del quale rinviamo p. es. a [G.1.7]:

Teor. 2 Condizione necessaria e sufficiente perché una matrice simmetrica $K \in \mathbb{R}^{m \times m}$ sia semidefinita positiva è che tutti i suoi minori principali siano non negativi. ■

I prodotti interni definiti positivi godono ulteriori notevoli proprietà che qui soltanto accenneremo. Spesso ci riferiremo a spazi di dimensione finita, ma molte cose si estendono a quelli di dimensione infinita.

Teor. 3 (DISUGUAGLIANZA DI SCHWARZ). Se W è spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, e se $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è un prodotto interno definito positivo, allora

$$\langle v | w \rangle^2 \leq \langle v | v \rangle \cdot \langle w | w \rangle \quad (3.4)$$

e la uguaglianza vale solo se v e w sono paralleli (i.e. proporzionali).

prova: Siano α, β numeri reali arbitrari. Allora

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle \alpha v + \beta w | \alpha v + \beta w \rangle = \alpha^2 \langle v | v \rangle + 2\alpha\beta \langle v | w \rangle + \beta^2 \langle w | w \rangle = \\ &= \begin{bmatrix} \alpha & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle v | v \rangle & \langle v | w \rangle \\ \langle v | w \rangle & \langle w | w \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.5)$$

E' ovvio che la matrice dei prodotti interni è semidefinita positiva: ma ciò equivale ad ammettere vera la disuguaglianza di Schwarz, giacché per il teor. 2 la matrice considerata è semidefinita positiva se è non negativo il suo determinante.

Se v e w sono paralleli, si vede che (3.4) vale come uguaglianza. Viceversa, se (3.4) vale come uguaglianza, l'equazione in $\gamma \in \mathbb{R}$

$$0 = \langle v - w, v - w \rangle \quad (3.6)$$

ha una ed una sola soluzione in γ (tranne quando $w = 0$). Ma allora, poichè $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è definito positivo, v e w sono paralleli e la costante di proporzionalità è la soluzione di (3.5) ■

Coroll.1 Sussiste la DISEGUAGLIANZA TRIANGOLARE:

$$\sqrt{\langle w + v, w + v \rangle} \leq \sqrt{\langle w, w \rangle} + \sqrt{\langle v, v \rangle} \quad (3.7)$$

prova. Infatti la (3.7) equivale alla

$$\langle v + w, v + w \rangle \leq \langle w, w \rangle + \langle v, v \rangle + 2\sqrt{\langle w, w \rangle \langle v, v \rangle}$$

ossia alla:

$$2 \langle v, w \rangle \leq 2\sqrt{\langle w, w \rangle \langle v, v \rangle}$$

che vale per il teor. 3. ■

Il coroll.1 ci assicura che W è normabile (*) con la norma

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

E' ovvio infatti che $\sqrt{\langle av, av \rangle} = |a| \sqrt{\langle v, v \rangle}$.

La disuguaglianza di Schwarz consente anche di definire (il coseno del) l'angolo fra due vettori, ponendo

$$\cos \angle u, v = \langle u, v \rangle / \|u\| \cdot \|v\| \quad (3.8)$$

Si osservi che per lo spazio $\mathbb{R}^3$ dotato dell'usuale prodotto interno (3.8) dà la ben nota formula della geometria analitica.

Def.2 Sia W spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ e sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto interno definito positivo su W .

Un insieme di vettori $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ in W è detto ortonormale se $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$ (simbolo di Kronecker).

(*) Una norma su W , spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, è un'applicazione di W in $\mathbb{R}_+$

$$\|\cdot\| : v \mapsto \|v\|$$

tale che

$$\|v\| = 0 \Rightarrow v = 0, \|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|, \|v\| + \|w\| \geq \|v + w\|, \forall v, w \in W, \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

In particolare se $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ sono una base per W , essi costituiscono una "base ortonormale".

Esercizio 1. Ogni insieme ortonormale di vettori è linearmente indipendente [Sugg.: se è $\sum_{j=1}^k h_j v_j = 0$, $h_j \in \mathbb{R}$, si ha $0 = \langle \sum_{j=1}^k h_j v_j, v_i \rangle$, $i = 1, 2, \dots, k$].

Teor.4 (DI ORTOGONALIZZAZIONE) Se $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ è un insieme linearmente indipendente di vettori nello spazio W con prodotto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definito positivo, esiste un insieme ortonormale $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ che genera lo stesso sottospazio generato da $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$.

prova. per induzione su k . Se $k=1$, $\{v_1\} \neq \{0\}$ può non essere un insieme ortonormale solo se $\|v_1\| \neq 1$. Basta allora "normalizzarlo" ponendo $e_1 = \|v_1\|^{-1} v_1$. Supponiamo ora che il teor. valga per gli insiemi di k vettori, e consideriamo un insieme $\{v_1, v_2, \dots, v_{k+1}\}$ di vettori linearmente indipendenti. Per l'ipotesi induttiva esiste un insieme ortonormale $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ che genera lo stesso sottospazio generato da $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$.

Poniamo allora

$$u = \sum_{i=1}^k e_i \langle v_{k+1}, e_i \rangle$$

Poichè v_{k+1} non appartiene allo spazio generato da $\{e_1, \dots, e_k\}$, è

$$v_{k+1} - u = c \neq 0$$

ed è immediato constatare che $\langle c | e_j \rangle = \langle v_{k+1} - \sum_{i=1}^k e_i \langle v_{k+1}, e_i \rangle | e_j \rangle = \langle v_{k+1} - e_j \langle v_{k+1}, e_j \rangle | e_j \rangle = 0$, $j = 1, 2, \dots, k$.

Quindi c è ortogonale a tutti i vettori $e_1, e_2, \dots, e_k$ e basta porre $e_{k+1} = c / \|c\|$ per avere un insieme ortonormale. ■

Il procedimento descritto nel teorema precedente viene anche detto di Gram-Schmidt. Esso ha il seguente immediato

Coroll.2 Se W è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ di dimensione finita, allora esso ammette basi ortonormali rispetto a ciascun prodotto interno definito positivo.

Esempio 1. Nello spazio $\mathbb{R}^4$ dotato dell'usuale prodotto interno, si consideri il sottospazio S generato da

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Si vuol costruire una base ortonormale per S .

Poniamo allora

$$e_1 = v_1 / \|v_1\| = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$v_2 - e_1 \langle v_2, e_1 \rangle = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = c_2$$

$$e_2 = c_2 / \|c_2\| = \frac{1}{\sqrt{11}} \begin{bmatrix} -1/\sqrt{11} \\ 1/\sqrt{11} \\ 3/\sqrt{11} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$v_3 - e_1 \langle v_3, e_1 \rangle - e_2 \langle v_3, e_2 \rangle = \begin{bmatrix} 12/\sqrt{11} \\ -12/\sqrt{11} \\ 8/\sqrt{11} \\ 2 \end{bmatrix} = c_3$$

$$e_3 = c_3 / \|c_3\| = \frac{1}{\sqrt{812}} \begin{bmatrix} 12 \\ -12 \\ 8 \\ 22 \end{bmatrix}$$

Il processo di Gram-Schmidt ha portato alla base ortonormale

e_1, e_2, e_3 per S .

La base standard per $\mathbb{R}^4$ (i.e. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$) contiene certamente almeno un vettore che non sta in S . E' facile veri-

ficare che $v_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \notin S$. Proseguendo il procedimento di Gram Schmidt, è immediato costruire una base per $S^\perp$: essa è il vettore

$$v_4 - e_1 \langle v_4, e_1 \rangle - e_2 \langle v_4, e_2 \rangle - e_3 \langle v_4, e_3 \rangle.$$

Def. 3 Su W , spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto interno de-
finito positivo. Una trasformazione lineare

$$T: W \rightarrow W$$

è detta ortogonale se

$$\langle Tu, Tv \rangle = \langle u, v \rangle, \quad \forall u, v \in W$$

Esercizio 2. Se T è una trasformazione ortogonale, è invertibile.

Esercizio 3. L'inversa di una trasformazione ortogonale è ortogonale e la composta di due trasformazioni ortogonali è ortogonale. Quindi le trasformazioni ortogonali formano un gruppo (detto gruppo ortogonale).

Teor. 5 Se W è spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ di dimensione finita e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è definito positivo, allora $T: W \rightarrow W$ è ortogonale se e solo se l'immagine secondo T di una base ortonormale è una base ortogonale

La prova è lasciata come esercizio.

Def. 4 Una matrice $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è detta ortogonale se

$$M^T M = M M^T = I_n \quad (3.9)$$

Esercizio 4. Si verifichi che una matrice M è ortogonale se e solo se le sue colonne costituiscono una base ortonormale per $\mathbb{R}^n$ dotato dell'usuale prodotto interno. Lo stesso vale per le righe di M .

Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto definito positivo nello spazio W di dimensione finita, riferito alla base ortonormale $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$.

Se T è una trasformazione ortogonale di W in sè, e se M è la matrice rappresentativa di tale trasformazione rispetto alla base $\{e_1, \dots, e_n\}$ (nel senso che $T e_j = \sum_i m_{ij} e_i$, $j = 1, 2, \dots, n$) allora

$$\delta_{hk} = \langle e_h, e_k \rangle = \langle T e_h, T e_k \rangle = \left\langle \sum_i m_{ih} e_i, \sum_j m_{jk} e_j \right\rangle = \sum_i \sum_j m_{ih} m_{jk} \langle e_i, e_j \rangle = \sum_i m_{ih} m_{ik}$$

Si ha quindi il seguente

Teor. 6 Una trasformazione $T: W \rightarrow W$ sullo spazio W di dimensione finita su $\mathbb{R}$ con prodotto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definito positivo, è orto-

gonale se e solo se, rispetto ad una base ortonormale, T è rappresentata da una matrice ortogonale.

E' anche facile verificare che ogni cambiamento di base ortonormale nello spazio W ($\dim W < \infty$), dotato di prodotto interno def. pos., in quanto indotto da una trasformazione ortogonale (pel teor. 5) è rappresentato da una matrice ortogonale (pel teorema 6).

Quindi le matrici ortogonali rappresentano la totalità dei cambiamenti di base ortonormale dello spazio W con prodotto $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Quando gli spazi vettoriali su $\mathbb{R}$ hanno dimensione finita ed il prodotto interno su W è definito positivo, il teorema seguente individua la struttura dell' (unica) trasformazione aggiunta di una data trasformazione lineare $T: W \rightarrow W$.

Teor. 7 Sia $T: W \rightarrow W$ una trasformazione lineare, rappresentata, rispetto a basi prescelte in W e in W , da una matrice A .

Se i prodotti interni in W e in W sono rappresentati, rispetto alle medesime basi, dalle matrici K ed H rispettivamente, e se il prodotto in W è definito positivo, allora T è rappresentata dalla matrice $K^{-1}A^T H$.

prova. Indichiamo col medesimo simbolo v sia il vettore in W , sia la n -upla di numeri reali che lo rappresenta rispetto alla base prescelta. Analogamente per i vettori in W .

Abbiamo allora:

$$\langle Tv | w \rangle_W = \langle Av \rangle^T Hw = v^T A^T Hw$$

$$\langle v | Tw \rangle_W = v^T Kxw$$

indicando con x la (eventuale) matrice rappresentativa di T . Perchè i due prodotti coincidano per ogni scelta di v in W e di w in W deve essere

$$A^T H = Kx$$

ossia

$$x = K^{-1}A^T H$$

(3.10)

(3.10) prova l'esistenza di T e ne individua la struttura.

In particolare si osservi che se le basi in W e in W sono state assunte ortonormali, allora H e K sono matrici identiche e T è rappresentato dalla matrice A^T .

Se nel teor. 7 poniamo $W = W$, e se (riferendo W ad una base prefissata) il prodotto interno su W è rappresentato dalla matrice definita positiva K e la trasformazione T dalla matrice A , allora l'aggiunta di T è rappresentata da $K^{-1}A^T K$.

In particolare T è autoaggiunta se $A = K^{-1}A^T K$, e quando in W si è scelta una base ortonormale T è autoaggiunta se e solo se A è simmetrica.

Fissato nello spazio W di dimensione finita su $\mathbb{R}$ un prodotto interno definito positivo $\langle \cdot, \cdot \rangle$, abbiamo quindi che le trasformazioni autoaggiunte sono caratterizzate dalla simmetria della matrice che le rappresenta in una generica base ortonormale.

Poichè ogni cambiamento di base ortonormale può pensarsi indotto da una matrice ortogonale (e viceversa), se $A = A^T$ rappresenta la trasformazione autoaggiunta T rispetto ad una base ortonormale, allora le matrici

$$M^{-1}AM = M^TAM$$

rappresentano la medesima T in ogni altra base ortonormale, al variare di M sul gruppo delle matrici ortogonali.

Def. 5 Due matrici simmetriche $H, K \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sono dette ortogonalmente equivalenti se esiste una matrice ortogonale M tale che

$$H = M^T K M = M^{-1} K M \quad (3.11)$$

Quindi ogni classe di "equivalenza ortogonale" sull'insieme delle matrici simmetriche rappresenta la stessa trasformazione autoaggiunta rispetto a basi ortonormali diverse.

Teor. 8 (DELL'ASSE PRINCIPALE) Ogni classe di equivalenza ortogonale $\underline{\text{le}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ contiene una matrice diagonale (ed una soltanto a meno di permutazioni sugli elementi della diagonale). Gli elementi diagonali sono gli autovalori delle matrici.

prova. Per induzione su n . Se $n=1$ non c'è nulla da provare. Supponiamo di aver provato il teorema per le matrici simmetriche di $\mathbb{R}^{n \times n}$ e sia K simmetrica in $\mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$.

Se λ è un autovalore, necessariamente reale, di K , esiste un autovettore di norma unitaria v tale da aversi

$$\lambda v = Kv$$

Consideriamo allora una matrice ortogonale M costruita assumendo come prima colonna di M le componenti di v e completando poi M col solito vincolo di essere ortogonale:

$$M = \begin{bmatrix} | & | & | & | \\ v & c_2 & c_3 & \dots \\ | & | & | & | \end{bmatrix}, \quad M^T = \begin{bmatrix} v^T & c_2^T & c_3^T & \dots \\ - & - & - & - \\ | & | & | & | \end{bmatrix} =$$

Con la equivalenza ortogonale indotta da M si ottiene allora:

$$M^T(KM) = \begin{bmatrix} v^T & c_2^T & c_3^T & \dots \\ - & - & - & - \\ | & | & | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | & | & | & | \\ \lambda v & * & * & * \\ | & | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & H_{12} & H_{21} & H_{22} \\ - & - & - & - \\ | & | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ - & - & - & - \\ | & | & | & | \end{bmatrix}$$

dove H_{21} è nullo perchè $C_2^T v = C_3^T v = \dots = C_n^T v$ per l'ortogonalità di M e dove H_{12} è nullo per simmetria.

Si può ora applicare l'ipotesi induttiva: poichè H_{22} è simmetrica, è diagonalizzabile per equivalenza ortogonale:

$$N^T H_{22} N = \Delta$$

Quindi la matrice ortogonale

$$M' = \begin{bmatrix} | & | & | & | \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ - & - & - & - \\ | & | & | & | \end{bmatrix}$$

diagonalizza per equivalenza ortogonale la matrice K , ottenendosi

$$\begin{bmatrix} | & | & | & | \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ - & - & - & - \\ | & | & | & | \end{bmatrix} M^T K M \begin{bmatrix} | & | & | & | \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ - & - & - & - \\ | & | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ - & - & - & - \\ | & | & | & | \end{bmatrix} \Delta$$

la cui diagonale contiene tutti e soli g_i autovalori di K , con la

rispettiva molteplicità (si osservi che la equivalenza ortogonale è una similitudine!).

Esempio 2. Si vuole costruire una matrice ortogonale M che riduca in forma diagonale la matrice simmetrica

$$K = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

Gli autovalori di K sono 2 e 8. La matrice $K - \lambda I$ in corrispondenza all'autovalore 2 diventa

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$$

ed il suo spazio nullo è generato dal vettore $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Quindi un autovettore di norma unitaria è $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$. Una base ortonormale per $\mathbb{R}^2$ includente $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ è

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \right\}$$

cosicchè

$$M = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

è una matrice ortogonale che diagonalizza K per congruenza ortogonale.

Esercizio 4. Si costruisca una matrice ortogonale M che riduca in forma diagonale per congruenza ortogonale la matrice

$$K = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Ciò è manifestamente in contrasto con (3.16). Analogo ragionamento prova la seconda disuguaglianza. ■

Per provare l'esistenza di vettori che soddisfano le eguaglianze, basta considerare gli autovettori corrispondenti a λ_m ed a λ_M .

Lemma 2 Se $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$, la parte simmetrica Q_S di Q soddisfa $v^T Q v = v^T Q_S v$, $\forall v \in \mathbb{R}^n$. ■

La prova è un facile esercizio.

Supponiamo ora che il prodotto interno in $\mathbb{R}^n$ sia quello usuale.

Se $\lambda_M > 0$ è il massimo degli autovalori di H_S (quando è $\lambda_M < 0$, $x^T H x = 1$ non ha ovviamente soluzione), per ogni vettore x soddisfacente $x^T H x = 1$ risulta

$$x^T x \geq 1/\lambda_M \quad (3.18)$$

D'altra parte un autovettore e_M di H_S corrispondente all'autovalore λ_M e soddisfacente $e_M^T H e_M = 1$ verifica

$$e_M^T e_M = 1/\lambda_M \quad (3.19)$$

Quindi e_M è una soluzione al problema proposto.

Se in $\mathbb{R}^n$ vige il prodotto def. pos. $\langle v | v \rangle = v^T K v = v^T M^T M v$, la soluzione si riduce a quella suesposta ponendo $y = Mx$:

$$\min_x x^T K x \mid \begin{matrix} x^T K H x = 1 \\ x^T K H x = 1 \end{matrix} = \min_y y^T y \mid y^T (M H M^T)^{-1} y = 1 \quad (3.20)$$

Concludiamo con una applicazione della trasformazione aggiunta alla soluzione del terzo problema di minimo.

Teor. 10 Siano V e W spazi a prodotto interno su $\mathbb{R}$ e sia definito positivo il prodotto in V . Se $T: V \rightarrow W$ è una trasformazione lineare dotata di aggiunta T^* e se è invertibile la mappa $T \cdot T^*: W \rightarrow W$, l'equazione nell'incognita $x \in V$

$$Tx = w \quad (3.21)$$

ammette soluzioni, e una soluzione di norma minima è data dal vettore

$$\bar{x} = T (T^* T)^{-1} w \quad (3.22)$$

prova. E' ovvio che $\bar{x}$ è una soluzione di (3.22). Infatti

$$T\bar{x} = (TT^*)^{-1} T^* w = w \quad (3.23)$$

Osserviamo che in W esiste un vettore $\bar{w}$ tale che

$$(TT^*)\bar{w} = w \quad (3.24)$$

per la invertibilità di TT^* , e perciò

$$\begin{aligned} \bar{w} &= (TT^*)^{-1} w \\ T^* \bar{w} &= T^* (TT^*)^{-1} w = \bar{x} \end{aligned}$$

Se z è un'altra soluzione, per (3.21),

$$T(\bar{x}) - T(z) = w - w = 0$$

e quindi

$$\begin{aligned} \langle \bar{w} | T\bar{x} \rangle_W &= \langle T^* \bar{w} | \bar{x} \rangle_V = \langle \bar{x} | \bar{x} \rangle_V \\ &= \langle \bar{w} | Tz \rangle_W = \langle T^* \bar{w} | z \rangle_V = \langle \bar{x} | z \rangle_V \end{aligned} \quad (3.25)$$

Ne segue:

$$\langle \bar{x} | \bar{x} \rangle_V - \langle \bar{x} | z \rangle_V = \langle \bar{x} - z | \bar{x} \rangle_V = 0 \quad (3.26)$$

Con lo stesso argomento usato per provare il Teor. 9, si ha allora

$$\langle z | z \rangle_V - \langle \bar{x} | \bar{x} \rangle_V \geq 0 \quad (3.27) \blacksquare$$

Se la matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, con $n \geq m$, ha rango pieno m , essa è interpretabile come una trasformazione dallo spazio $\mathbb{R}^n$ su tutto lo spazio $\mathbb{R}^m$. Se lo spazio $\mathbb{R}^n$ è dotato dell'usuale prodotto interno il teorema precedente risolve il problema di determinare un vettore x soddisfacente la condizione

$$Ax = w$$

(con w vettore prefissato in $\mathbb{R}^m$) e che minimizzi $x^T x$. Poiché AA^T è invertibile (per il teor. di Binet), basterà scegliere (*)

$$x = A^T (AA^T)^{-1} w \quad (3.28)$$

(*) La matrice $A^T (AA^T)^{-1}$ è detta la quasi inversa destra di A .

Esercizio 5. Sia $q: V \rightarrow \mathbb{R}$ una forma quadratica sullo spazio V di dimensione finita n . Si provi che, per una opportuna scelta della base in V , q è esprimibile nella forma

$$q(v) = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i^2$$

con v_i componenti di v rispetto alla base.

Come applicazione dei concetti fin qui esposti, ricerchiamo la soluzione di tre problemi di minimo in uno spazio W a prodotto interno definito positivo $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Essi si riducono alla ricerca di un vettore $x \in W$ a norma minima e soddisfacente una delle seguenti condizioni di vincolo:

- 1) $\langle x | v \rangle = k \quad v \in V, \quad k \in \mathbb{R}$
- 2) $\langle x | Hx \rangle = 1 \quad H: W \rightarrow W \text{ trasf. lineare}$
- 3) $Tx = w \quad w \in W, \quad T: W \rightarrow W \text{ trasf. lineare}$

La soluzione al primo problema è data dal seguente

Teor. 9 Siano $v \neq 0$ un vettore e k un numero reale. Esiste un unico vettore $x \in V$ che rende minimo il prodotto $\langle x | v \rangle$, sotto la condizione

$$\langle x | v \rangle = k \quad (3.12)$$

Esso è il vettore $x = k \langle v | v \rangle^{-1} v$.

prova. E' evidente che x soddisfa al vincolo $\langle x | v \rangle = k$. Inoltre, se y è un altro vettore per cui risulta $\langle y | v \rangle = k$, allora

$$\langle x - y | v \rangle = \langle x | v \rangle - \langle y | v \rangle = 0$$

Moltiplicando per $k \langle v | v \rangle^{-1}$, si ha:

$$0 = \langle x - y | k \langle v | v \rangle^{-1} v \rangle = \langle x - y | x \rangle$$

Ma allora

*

$$\begin{aligned} \langle y | y \rangle - \langle x | x \rangle &= \langle y - x | y \rangle + 2 \langle x | y \rangle - 2 \langle x | x \rangle = \\ &= \langle y - x | y - x \rangle + 2 \langle x | y - x \rangle = \langle y - x | y - x \rangle > 0 \end{aligned}$$

L'uguaglianza sussiste se e solo se $y = x$.

Il secondo problema di minimo lo limiteremo ad $\mathbb{R}^n$, dotato di prodotto interno def. pos.: si tratta di minimizzare il prodotto $\langle x | x \rangle$ sotto la condizione

$$\langle x | Hx \rangle = 1 \quad (3.13)$$

con H elemento fissato di $\mathbb{R}^{n \times n}$.

La soluzione è conseguenza dei seguenti lemmi:

Lemma 1 Se $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è simmetrica, e se λ_m, λ_M sono il minimo e il massimo degli autovalori di Q , per ogni $v \in \mathbb{R}^n$ risulta:

$$v^T v \lambda_m \leq v^T Q v \leq v^T v \lambda_M \quad (3.14)$$

ed esistono vettori per i quali le (3.14) sono soddisfatte come uguaglianze.

prova. Ricordiamo che una matrice reale simmetrica $n \times n$ ha tutti gli autovalori reali, e che tra i suoi autovettori può sempre essere scelta una base ortonormale per lo spazio $\mathbb{R}^n$. La matrice

$$S = Q - \lambda_m I \quad (3.15)$$

è simmetrica, ed ha per autovalori gli autovalori di Q diminuiti ciascuno di λ_m : quindi i suoi autovalori sono tutti reali non negativi.

Detta $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ una base di autovettori per S , risulta

$$e_i^T S e_j = e_i^T \lambda_j e_j = \begin{cases} = 0 & \text{se } i \neq j \\ > 0 & \text{se } i = j \end{cases} \quad (3.16)$$

Si supponga ora - per assurdo - che esista un vettore $v \in \mathbb{R}^n$ tale da $\langle v | v \rangle = 1$ e $\langle v | H v \rangle > 1$: allora avremmo:

$$v^T S v = v^T (Q - \lambda_m I) v < 0 \quad (3.17)$$

e, posto $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$,

$$0 > \langle v | S v \rangle = \sum_{i,j} \alpha_i \alpha_j \langle e_i | S e_j \rangle = \sum_i \alpha_i^2 \langle e_i | S e_i \rangle$$

Se il prodotto interno in $\mathbb{R}^n$ si esegue secondo la:

$$\langle x|y \rangle_{\mathbb{R}^n} = x^T K y$$

con K matrice definita positiva, una soluzione in x di

$$Ax = w$$

che minimizza $\langle x|x \rangle_{\mathbb{R}^n}$ è data dalla

$$x = K^{-1} A^T (AK^{-1} A^T)^{-1} w \quad (3.29)$$

Basta applicare i risultati del teor. 6.

Si noti che la struttura del prodotto di $\mathbb{R}^m$ non gioca nel risultato: se è $\langle x|y \rangle_{\mathbb{R}^m} = x^T H y$, la matrice associata a $T^*(T T^*)^{-1}$ è per (3.10)

$$Q^{-1} A^T P (A Q^{-1} A^T P)^{-1} = Q^{-1} A^T P P^{-1} (A Q^{-1} A^T)^{-1} = Q^{-1} A^T (A Q^{-1} A^T)^{-1}.$$

Esercizio 6. Perché nella formula (3.29) è invertibile la matrice $A Q^{-1} A^T$?

Esercizio 7. Il teor. 9 si può dedurre come conseguenza del teor. 10. Si determini una soluzione x di norma minima al sistema

$$\begin{aligned} \langle x|v_1 \rangle &= k_1 \\ &\dots\dots\dots \\ \langle x|v_r \rangle &= k_r \end{aligned} \quad (3.30)$$

$k_1, \dots, k_r \in \mathbb{R}$; $v_1, \dots, v_r \in \mathbb{R}^n$ dotato del prodotto interno usuale, stabilendo preliminarmente condizioni su v_i e k_i atte ad assicurare la risolubilità di (3.30).

Esempio 3. La rete lineare puramente induttiva N di fig. 1 è caratterizzata da una matrice di auto e mutue induttanze $M = \|M_{hk}\|$ definita positiva. Si vuol determinare qual è la ripartizione della corrente costante J sugli n rami induttivi che minimizza l'energia magnetica immagazzinata.

Cominciamo col ricordare dal corso di Elettrotecnica che l'energia magnetica W_M è esprimibile in funzione del vettore delle correnti $i = [i_1 i_2 \dots i_n]^T$:

$$2W_M = i^T M i$$

Introdotta allora in $\mathbb{R}^n$ il prodotto interno definito positivo

$$\langle x|y \rangle \triangleq x^T M y$$

il problema si riduce a minimizzare il prodotto $\langle i|i \rangle$ con la condizione

$$J = i^T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \langle i|v \rangle$$

dove si è posto $v = N^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$.

La soluzione è data dal vettore

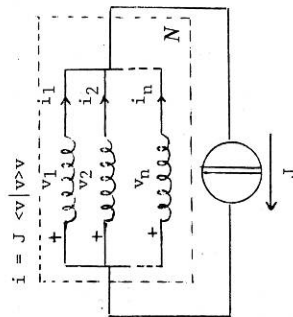


Fig. 1

Se il generatore di corrente J viene connesso al tempo $t=0$ alla rete N inizialmente a riposo ($i_1(0) = i_2(0) = \dots i_n(0) = 0$), si ha

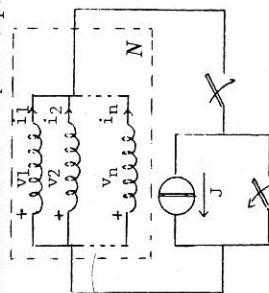


Fig. 2

sulla i -esima induttanza un impulso di tensione $v_i \delta(t)$ $i=1,2,\dots,n$ e immediatamente la rete raggiunge la situazione di regime. Indicano con $i = [i_1 \dots i_n]^T$ il vettore delle correnti di regime, gli im-

pulsi di tensione si ottengono, com'è noto, dalle relazioni:

$$\begin{aligned} M_{11}^{i_1 \delta(t)} + M_{12}^{i_2 \delta(t)} + \dots + M_{1n}^{i_n \delta(t)} &= v_1^{\delta(t)} \\ M_{21}^{i_1 \delta(t)} + M_{22}^{i_2 \delta(t)} + \dots + M_{2n}^{i_n \delta(t)} &= v_2^{\delta(t)} \\ \vdots &\vdots \\ M_{m1}^{i_1 \delta(t)} + M_{m2}^{i_2 \delta(t)} + \dots + M_{mn}^{i_n \delta(t)} &= v_m^{\delta(t)} \end{aligned}$$

Poichè le induttanze sono in parallelo, gli impulsi hanno la medesima ampiezza h per il secondo principio di Kirchhoff:

$$N_i = b \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

mentre per il primo principio di Kirchhoff deve risultare:

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

Dalla (3.31) si ha:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{h}\mathbf{v} \quad (3.33)$$

e introducendo in (3.32) l'espressione di i data da (3.33) si ricava h:

$$\begin{aligned} \mathbf{h} &= J(\mathbf{v}^T \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix})^{-1} = J(\mathbf{v}^T \mathbf{M} \mathbf{M}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix})^{-1} = J(\mathbf{v}^T \mathbf{M} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{v})^{-1} \end{aligned}$$

Quindi il regime di correnti che si instaura per $t > 0$ nel circuito di fig. 2 è proprio quello che assicura la minimalità dell'energia magnetica W_M immagazzinata.

Esercizio 8. Si consideri il problema di riscaldare delle barre di acciaio che passano attraverso un forno segmentato in 5 zone. Si supponga che il costo del riscaldamento di ciascuna zona sia proporzionale al quadrato della temperatura e che la temperatura della barra all'uscita da una zona sia legata alla sua temperatura all'ingresso della medesima zona secondo la relazione

$$T_{usc} = T_{in} + (T_{zona} - T_{in}) \frac{1}{2}$$

Se le barre all'entrata nel forno hanno una temperatura di 10° e devono essere portate ad una temperatura di 1000° all'uscita, qualesono le temperature T_1, T_2, T_3, T_4, T_5 delle zone del forno che minimizzano il costo del riscaldamento?

Esercizio 9. Si determini la soluzione dell'equazione

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

che rende minima la somma $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.

4. L'equazione differenziale di Riccati a coefficienti scalari

Nella teoria dei minimi quadrati e nei problemi di ottimizzazione ad essa connessi gioca un ruolo fondamentale l'equazione differenziale di Riccati.

In questo paragrafo si darà un cenno all'equazione scalare, per porre in evidenza, nelle condizioni più semplici, le differenze fra la soluzione di questa equazione - che non è lineare - e la soluzione delle equazioni lineari; nei paragrafi successivi studieremo la equazione matriciale di Riccati e le sue applicazioni.

L'equazione differenziale scalare di Riccati è del primo ordine, non lineare, ed ha la forma:

$$\frac{dk}{dt} = -q(t) - 2a(t)k + r(t)k^2 \quad (4.1)$$

E' in forma "normale", perchè è esplicitata rispetto alla derivata, così che ad essa si possono applicare risultati standard della teoria delle equazioni differenziali ordinarie.

Se le funzioni $q(t)$, $a(t)$, $r(t)$ sono definite e continue su un intervallo (a, b) , eventualmente infinito, la funzione

$$f(t, k) = -q(t) - 2a(t)k + r(t)k^2$$

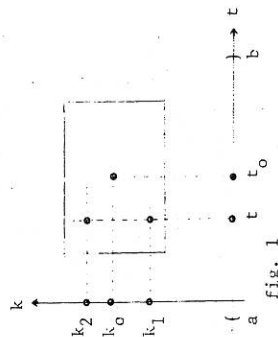
è localmente lipschitziana, nel senso che per ogni $t_0 \in (a, b)$ e per ogni k_0 esiste un intorno rettangolare di (t_0, k_0) in cui vale la

$$|f(t, k_1) - f(t, k_2)| < H|k_1 - k_2|$$

per una opportuna costante positiva H (cfr. fig. 1).

Tanto basta ad assicurare la esistenza e la unicità di una soluzione locale dell'equazione, con preassegnata condizione iniziale.

In altre parole, fissati $t_0 \in (a, b)$ ed un arbitrario numero reale k_0 , esiste una ed una sola funzione $k(t)$, definita in un conveniente intorno I di t_0 , che soddisfa l'equazione (4.1) e



e che vale k_0 in t_0 : $k(t_0) = k_0$.

La differenza sostanziale rispetto al caso lineare è che I non coincide necessariamente con tutto (a, b) : l'esistenza della soluzione è assicurata, ma soltanto in un intorno del punto t_0 .

Se k è una soluzione di (4.1) su un intervallo I , noi diremo che $\hat{k}$ è una "continuazione" di k se $\hat{k}$ è definita su un intervallo $\hat{I}$ che contiene propriamente I , $\hat{k}$ coincide con k su I e $\hat{k}$ soddisfa su $\hat{I}$ la (4.1). Una soluzione k è "non continuabile" se non esiste nessuna continuazione: in tal caso l'intervallo I è il massimo intervallo di esistenza della soluzione k .

Il teorema che segue particolarizza all'equazione di Riccati un risultato generale delle equazioni differenziali ordinarie: la sua utilità sta nell'informazione che ci può dare sul comportamento della soluzione sulla frontiera dell'intervallo massimo di esistenza.

Teor. 1 Se le funzioni $q(t)$, $a(t)$, $r(t)$ sono continue sull'intervallo (a, b) e se k è una soluzione di (4.1) sull'intervallo $I_0 \subset (a, b)$, k non è continuabile a sinistra di c se e solo se $c = a$ oppure k non è limitata per $t \rightarrow c$. Analogamente per la continuazione a destra di d . ■

Per la prova, si rimanda ai testi standard sulla teoria delle equazioni differenziali ordinarie.

Quando q, a, m sono costanti, l'equazione 4.1 è una usuale equazione a variabili separabili

$$\frac{dk}{-q - 2ak + rk^2} = dt$$

la cui soluzione si riconduce ad una integrazione. Anche quando $r \neq 1$, con un cambiamento di variabile si potrà sempre ridursi ad una equazione del tipo

$$\frac{dk}{-q - 2ak + k^2} = dt \quad (4.2)$$

Distingueremo tre casi:

- 1) gli zeri del polinomio $-q-2ak+k^2$ sono reali e distinti, cosicchè lo sviluppo in fraz. parziali di $(-q-2ak+k^2)^{-1}$ è $A(k-\alpha_1)^{-1} - A(k-\alpha_2)^{-1}$. In tal caso, integrando (4.2) e imponendo la condizione iniziale $k(t_0) = k_0$, si ha

$$\int \left(\frac{A}{k-\alpha_1} + \frac{-A}{k-\alpha_2} \right) dk = \int dt$$

$$\ln \left| \frac{k-\alpha_1}{k-\alpha_2} \right| = A^{-1}t + \text{cost}$$

$$\ln \left| \frac{k_0-\alpha_1}{k_0-\alpha_2} \right| = A^{-1}t_0 + \text{cost}$$

La soluzione si ottiene ricavando $k(t)$ dalla equazione

$$\left| \frac{(k-\alpha_1)}{(k-\alpha_2)} \right| = \exp(A^{-1}(t-t_0) + \ln \left| \frac{k_0-\alpha_1}{k_0-\alpha_2} \right|) \quad (4.3)$$

Esercizio 1. Discutere il caso "limite" $k_0 = \alpha_1$ ed il caso "limite" $k_0 = \alpha_2$.

- 2) gli zeri sono reali e coincidenti: $-q-2ak+k^2 = (k-\alpha)^2$. Integrando (4.2) ed imponendo che sia $k(t_0) = k_0$, risulta

$$\int \frac{1}{(k-\alpha)^2} dk = \int dt$$

$$t + \text{cost} = \int (k-\alpha)^{-2} d(k-\alpha) = -(k-\alpha)^{-1}$$

$$t_0 + \text{cost} = -(k_0-\alpha)^{-1}$$

da cui

$$k-\alpha = (t_0 + (k_0-\alpha)^{-1} - t)^{-1} \quad (4.4)$$

Esercizio 2. Discutere il caso "limite" $k_0 = \alpha$.

- 3) gli zeri del polinomio $-q-2ak+k^2$ sono immaginari coniugati, ossia $\alpha^2 + q < 0$. Abbiamo allora

$$k^2 - 2ak - q = (k-a)^2 - (a^2 + q)$$

e quindi

$$\int \frac{dk}{(k-a)^2 + (-a^2 - q)} = \int dt$$

$$t + \text{cost} = \int \frac{d(k-a)}{(k-a)^2 + (-a^2 - q)} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - q}} \int \frac{d[(k-a)(-a^2 - q)^{-1/2}]}{(k-a)^2(-a^2 - q)^{-1} + 1}$$

$$t + \text{cost} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - q}} \arctg \frac{k-a}{\sqrt{a^2 - q}}$$

Imponendo la condizione iniziale $k(t_0) = k_0$, si determina il valore della costante nella soluzione:

$$k = a + \sqrt{a^2 - q} \operatorname{tg}(\sqrt{a^2 - q} t + \text{cost}) \quad (4.5)$$

Osservazione: è chiaro che in (4.5) la soluzione non è mai prolungabile al di fuori di un intervallo di ampiezza π ; agli estremi di tale intervallo, in accordo col teor.1, la soluzione diverge.

Esercizio 3. Discutere l'intervallo di esistenza per (4.4) e (4.3).

Il teor.2 è fondamentale, e, come vedremo nel cap. IV si estende alla equazione matriciale di Riccati. Esso consente di risolvere (almeno localmente) un'equazione di Riccati (che è non lineare) con metodi della teoria delle equazioni differenziali lineari.

Teor.2 Si associ all'equazione di Riccati:

$$\frac{dk}{dt} = -q(t) - 2a(t)k + rk^2(t), \quad k(t_0) = k_0 \quad (4.6)$$

l'equazione vettoriale lineare

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} -a(t) & -q(t) \\ -r(t) & a(t) \end{bmatrix} x, \quad x(t_0) = \begin{bmatrix} k_0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

La soluzione $[x_1, x_2]^T$ di (4.7), in un conveniente intorno di t_0 , dà luogo ad una soluzione di (4.6) ponendo

$$k(t) = x_1(t)/x_2(t)$$

prova. In un conveniente intorno di t_0 , $[x_1, x_2]^T$ soddisfa, per continuità, la condizione $x_2 \neq 0$, e quindi su tale intorno $k(t)$ è ben definita dalla relazione

$$x_1 = k x_2 \quad (4.8)$$

Vogliamo provare che $k(t)$ soddisfa (4.6).

Intanto è ovvio che risulta $k(t_0) = k_0/1 = k_0$.

D'altra parte, differenziando (4.8), si ha la

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{dk}{dt} x_2 + k \frac{dx_2}{dt}$$

che introdotta in (4.7.1) dà

$$\frac{dk}{dt} x_2 + k \frac{dx_2}{dt} = -ax_1 - qx_2 \quad (4.9)$$

Tenendo conto di (4.7.2) e di (4.8), (4.9) diventa

$$\frac{dk}{dt} x_2 + k(-rk x_2 + ax_2) = -ak x_2 - qx_2$$

ed infine

$$x_2 \left(\frac{dk}{dt} + q + 2ak - rk^2 \right) = 0 \quad (4.10)$$

(4.10) prova che $k = \frac{x_1}{x_2}$ risolve l'equazione (4.6) su tutto l'intorno di t_0 in cui è $x_2 \neq 0$. ■

Si osservi che, viceversa, risolta (4.6), se si risolve la equazione differenziale

$$\frac{dx_2}{dt} = (a - rk)x_2 \quad x_2(t_0) = 1 \quad (4.11)$$

allora il vettore $[kx_2, x_2]^T$ è soluzione di (4.7), poichè soddisfa ovviamente le condizioni iniziali, e risulta

$$\begin{aligned} \frac{d(kx_2)}{dt} &= \frac{dk}{dt} x_2 + \frac{dx_2}{dt} = \\ &= (-q - 2ak + k^2)x_2 + k(a - rk)x_2 = \end{aligned}$$

$$= -qx_2 - a(kx_2)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = ax_2 - r(kx_2)$$

Concludiamo con un teorema ed un esercizio contenenti ulteriori proprietà dell'equazione di Riccati scalare.

Teor. 3 Se $k(t)$ è soluzione su (a, b) di una equazione di Riccati e su (a, b) k non ha zeri, allora anche $k(t)^{-1}$ è soluzione su (a, b) di un'equazione di Riccati.

prova. infatti

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{k(t)} \right) = \frac{1}{k^2(t)} \cdot \frac{dk}{dt} = - \frac{1}{k^2(t)} (-q(t) - 2a(t)k(t) + r(t)k^2(t))$$

e quindi

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{k(t)} \right) = r(t) - 2a(t) \frac{1}{k(t)} - q(t) \frac{1}{k^2(t)}$$

Si noti che - in generale - le equazioni cui k ed $1/k$ soddisfano non sono le stesse.

Esercizio 4. Se $k(t)$ risolve una equazione di Riccati, anche $w(t) = [b_1(t)k(t) + b_2(t)] [b_3(t)k(t) + b_4(t)]$ soddisfa una equazione di Riccati.

5. Problemi di ottimo ed equazione differenziale matriciale di Riccati.

L'equazione differenziale di Riccati a coefficienti matriciali è una equazione non lineare, nella matrice quadrata incognita $K(t)$ della forma

$$\frac{dK}{dt} = -Q(t) - A^T(t)K(t) - K(t)A(t) + K(t)R(t)K(t) \quad (5.1)$$

Le matrici $A(t)$, $B(t)$, $R(t)$, $Q(t)$ si suppongono continue su un comune intervallo (a, b) , cosicchè è possibile provare che l'equazione è lipschitziana, ed ammette una ed una sola soluzione locale nell'intorno del generico $t_0 \in (a, b)$ con condizione iniziale $K(t_0) = K_0$.

Il fatto che la soluzione sia, in genere, soltanto locale richiede uno studio accurato dei risultati ottenuti, che non sono validi di su tutto l'asse dei tempi anche se le matrici $A, B, \dots$ vi sono ovunque definite e continue.

Indicheremo con $\Pi(t, K_0, t_0)$ la soluzione di (5.1) all'istante t , sotto la condizione iniziale $K(t_0) = K_0$: si noti che per $|t - t_0|$ sufficientemente piccolo la soluzione esiste certamente. Studieremo in un altro paragrafo alcune tecniche per ottenere effettivamente una soluzione di 5.1: qui supporremo già di aver superato il problema - peraltro non banale - di computare $\Pi(t, K_0, t_0)$.

D'ora in poi supporremo che $Q(t), R(t)$ siano matrici simmetriche. E' allora facile provare il seguente

Teor. 1 La soluzione di (5.1), per $K_0 = K_0^T$, è una matrice $K(t)$ simmetrica su tutto l'intervallo di esistenza.

Vogliamo finalmente vedere un campo di problemi sistemistici cui l'equazione (5.1) fornisce la tecnica di risoluzione. Consideriamo un sistema lineare $\dot{x} = (A, B, C, D_0)$:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + D_0 u \end{aligned} \quad (5.2)$$

e definiamo sullo spazio $\mathcal{U}_{[t_0, t_1]} \times X$ (prodotto cartesiano dello spazio degli ingressi sull'intervallo $[t_0, t_1]$ per lo spazio degli stati)

il seguente funzionale

$$\begin{aligned} n: \mathcal{U}_{[t_0, t_1]} \times X &\rightarrow \mathbb{R} \\ n(u, x_0) &= \int_{t_0}^{t_1} [u^T T u] dt + x_0^T (t_1) K_1 x(t_1) \end{aligned} \quad (5.3)$$

Assegnati $u \in \mathcal{U}_{[t_0, t_1]}$ ed $x_0 \in X$, x va inteso come la soluzione, corrispondente ad un tale ingresso e ad un tale stato iniziale, di (5.2.1):

$$x(t) = \exp(A(t-t_0))Bx_0 + \int_{t_0}^t \exp(A(t-\sigma))Bu(\sigma)d\sigma$$

In particolare $x(t_1)$ è lo stato raggiunto da Σ all'istante t_1 .

Il funzionale n viene chiamato "costo" o "indice di comportamento", in quanto può essere interpretato come un valutazione (non necessariamente positiva, se non si fanno ipotesi su R, Q, K_1) del controllo esercitato mediante u sul sistema Σ . Ciò si vede abbastanza intuitivamente se si suppongono R, Q, K_1 (semi)definite positive: l'integrale penalizza con legge quadratica gli scostamenti di u e gli scostamenti di x dallo zero, mentre il termine $\langle x(t_1) | K_1 x(t_1) \rangle$ penalizza lo scarto dallo zero dello stato raggiunto all'istante finale $t = t_1$.

Riservandoci di vedere nel seguito concreti esempi di tale problema, ci proponiamo ora di minimizzare n al variare di u in $\mathcal{U}_{[t_0, t_1]}$, una volta che si sia fissato lo stato iniziale $x(t_0) = x_0$.

E' intuibile che il problema posto in modo così generale non sia risolubile: basta supporre, p. es., $Q = K_1 = 0$, e scegliere R definita negativa, per poter trovare, per ogni $k \in \mathbb{R}$, un ingresso u che rende $n < k$.

D'ora in poi faremo le ipotesi

$$\begin{aligned} R &= R^T, \quad Q = Q^T, \quad K_1 = K_1^T \\ R &> 0 \quad (**) \end{aligned} \quad (5.4)$$

(*) Salvo avviso contrario, i prodotti interni su $\mathbb{R}^n$ si suppongono quelli usuali.

(**) Con le notazioni $R > 0$, $R \geq 0$ si intende, rispettivamente, che la matrice R è definita o semidefinita positiva.

Si osservi che le ipotesi di simmetria non sono effettive restrizioni su η (cfr. par. 3, lemma 2), cosicché l'unica condizione è imposta da (5.4.2).

Chiameremo inoltre "equazione di Riccati associata al sistema Σ e all'indice η " l'equazione (a coefficienti costanti):

$$\begin{aligned} \frac{dK}{dt} &= -Q - A^T K - KA + K(BR^{-1}B^T)K \\ K(t_1) &= K_1 \end{aligned} \quad (5.5)$$

Vogliamo qui dimostrare che, quando vale (5.4), $\eta(u, x_0)$ ha un minimo su $[t_0, t_1]$ al variare di u se e solo se l'equazione associata (5.5) ha soluzione $\Pi(t, K_1, t_1)$ sul medesimo intervallo; inoltre tale minimo e l'ingresso u_{ot} che consente di raggiungerlo sono esprimibili mediante $\Pi(t, K_1, t_1)$.

Torna utile premettere il seguente

Lemma 1 Sia $\frac{dx}{dt} = Ax + Bu$ un'equazione differenziale lineare nell'incognita x , e sia $K(t)$ una matrice quadrata, derivabile sull'intervallo $[t_0, t_1]$.

Se x ed u sono legati - su tale intervallo - dall'equazione suddetta, risulta

$$\frac{d}{dt} \left[\int_{t_0}^{t_1} u^T x \right] = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{dK}{dt} + A^T K + KA \right] x \quad dt = x^T K x \Big|_{t_0}^{t_1} \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} \text{prova. } x^T K x \Big|_{t_0}^{t_1} &= \int_{t_0}^{t_1} x^T K x + x^T \dot{K} x + x \dot{K} x \, dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} (x^T A^T + u^T B^T) K x + x^T K x + x^T K (Ax + Bu) \, dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} u^T B^T K x + x^T K Bu + x^T (A^T K + K A) x \, dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left[u^T(t), x^T(t) \right] \begin{bmatrix} 0 & B^T K(t) \\ K(t) B & A^T K(t) + K(t) A + \frac{dK}{dt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ x(t) \end{bmatrix} dt \end{aligned}$$

Siamo ora in grado di provare il

Teor. 2 Sia $\Pi(t, K_1, t_1)$ soluzione dell'equazione di Riccati (5.5), associata al sistema Σ e all'indice η , sull'intervallo $[t_0, t_1]$. Per ogni stato $x_0 \in X$ esiste un ingresso u_{ot} che rende minimo il funzionale $\eta(u, x_0)$, espresso da

$$u_{ot}(t) = -R^{-1} B^T \Pi(t, K_1, t_1) x(t) \quad (5.7)$$

ed il corrispondente valore minimo di η vale

$$\eta_{\min} = x_0^T \Pi(t_0, K_1, t_1) x_0 \quad (5.8)$$

prova. Sostituendo in (5.6) $K(t)$ con $\Pi(t, K_1, t_1)$, e tenuto conto che Π risolve l'equazione (5.5), si ha

$$0 = \int_{t_0}^{t_1} \left[u^T x \right] \begin{bmatrix} 0 & B^T \Pi \\ \Pi B & -Q + \Pi B R^{-1} B^T \Pi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ x \end{bmatrix} dt - x^T \Pi x \Big|_{t_0}^{t_1} \quad (5.9)$$

D'altra parte è

$$\eta(u, x_0) = \int_{t_0}^{t_1} \left[u^T x \right] \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ x \end{bmatrix} dt + x_0^T \Pi(t_1, K_1, t_1) x_0 \quad (5.10)$$

Sommando membro a membro (5.9) e (5.10) si ottiene

$$\eta(u, x_0) = \int_{t_0}^{t_1} \left[u^T x \right] \begin{bmatrix} R & B^T \Pi \\ \Pi B & \Pi B R^{-1} B^T \Pi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ x \end{bmatrix} dt + x_0^T \Pi(t_0, K_1, t_1) x_0 \quad (5.11)$$

e quindi, con una ovvia trasformazione sull'integrando,

$$\eta(u, x_0) = \int_{t_0}^{t_1} (u + R^{-1} B^T \Pi x)^T R (u + R^{-1} B^T \Pi x) dt + x_0^T \Pi(t_0, K_1, t_1) x_0$$

L'integrale è non negativo qualunque sia $u \in \mathcal{U}[t_0, t_1]$ perchè R è definita positiva, ed è nullo solo se risulta

$$u(t) = -R^{-1} B^T \Pi x(t), \quad \forall t \in [t_0, t_1] \quad (5.12)$$

E' allora evidente che il valore minimo di η è espresso da (5.8), e (5.7) dà il controllo ottimo che consente di raggiungerlo. ■

La (5.7) non dà "esplicitamente" la soluzione al problema di trovare un controllo ottimo, ma esprime soltanto il legame istantaneo fra lo stato in t e l'ingresso ottimo nel medesimo istante. In realtà, proprio per questa sua struttura la formula trovata è estremamente utile: essa infatti fornisce il controllo u_{ot} in "catena chiusa", e accenneremo nel seguito alle possibilità aperte da questa proprietà.

E' peraltro possibile ricavare l'andamento di u_{ot} osservando che l'evoluzione di stato è comunque retta da (5.2.1) e quindi in presenza del controllo u_{ot} di (5.7) l'andamento di x deve soddisfare la equazione differenziale lineare a coefficienti non costanti:

$$\frac{dx}{dt} = \left[A - BR^{-1}B^T \Pi(t, K_1, t_1) \right] x \quad (5.13)$$

con condizione iniziale $x(t_0) = x_0$.

Si ricordi che l'equazione differenziale lineare

$$\frac{dx}{dt} = G(t)x(t) \quad (5.14)$$

$$x(t_0) = x_0$$

ha per soluzione

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x_0$$

dove l'operatore $\Phi(t, t_0)$ (detto "matrice di transizione") è la somma della serie di Peano:

$$\Phi(t, t_0) = I + \int_{t_0}^t G(\sigma_1) d\sigma_1 + \int_{t_0}^t G(\sigma_1) \int_{t_0}^{\sigma_1} G(\sigma_2) d\sigma_2 d\sigma_1 + \dots \quad (5.15)$$

Infatti risulta

$$\frac{d}{dt} \Phi(t, t_0) = G(t)\Phi(t, t_0)$$

ed inoltre

$$\Phi(t_0, t_0) = I$$

Per risolvere (5.13) si dovrà porre in (5.14)

$$G(t) = A - BR^{-1}B^T \Pi(t, K_1, t_1)$$

e costruire l'operatore $\Phi(t, t_0)$ associato: il controllo ottimo è così, per $t \in [t_0, t_1]$

$$u_{ot} = -R^{-1}B^T \Pi(t, K_1, t_0) \Phi(t, t_0) x_0 \quad (5.16)$$

Si noti che le successive ridotte della serie di Peano forniscono delle approssimazioni per l'operatore Φ .

E' naturale a questo punto chiedersi se il teorema 2 si inverte in qualche modo, ossia se l'esistenza di un minimo per il funzionale η relativo all'intervallo $[t_0, t_1]$ comporta l'esistenza di una soluzione dell'equazione di Riccati associata, sul medesimo intervallo.

La risposta è affermativa, purchè il minimo di η esista su ogni sottointervallo $[t, t_1]$ di $[t_0, t_1]$:

Teor.3 Se per ogni $t \in [t_0, t_1]$ e per ogni stato iniziale $x(t) \in X$ esiste finito l'estremo inferiore del funzionale

$$\eta = \int_t^{t_1} \begin{bmatrix} u^T & x^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ x \end{bmatrix} dt + x(t_1)^T K_1 x(t_1), \quad R > 0$$

al variare di u in $\mathcal{U}[t, t_1]$ ed essendo l'evoluzione di x retta dalla (5.2.1), allora l'equazione di Riccati associata (5.5) è risolubile su tutto l'intervallo $[t_0, t_1]$.

prova. Poichè (5.5) è lipschitziana, in un intorno sinistro I di t_1 esiste un'unica soluzione $\Pi(t, K_1, t_1)$, ed il Teor. 2 prova che, per ogni $x \in X$ e per ogni $t \in I$ risulta

$$\begin{aligned} \min_{u \in \mathcal{U}} \int_t^{t_1} \begin{bmatrix} u^T & x^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ x \end{bmatrix} dt + x(t_1)^T K_1 x(t_1) = \\ = \inf_u \int_t^{t_1} \begin{bmatrix} u^T & x^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ x \end{bmatrix} dt + x(t_1)^T K_1 x(t_1) = \\ = x^T(t) \Pi(t, K_1, t_1) x(t) \end{aligned}$$

Se la soluzione di (5.5) non fosse prolungabile a sinistra di t_1 fino al punto t_0 , per il Teor. 1 del par.4 esisterebbe un istante t_2 , con $t_0 < t_2 < t_1$, tale che (5.5) risulti risolubile su $(t_2, t_1]$, e diverga in qualche componente la matrice

$$\lim_{t \rightarrow t_2^+} \Pi(t, K_1, t_1) \quad (5.17)$$

Se (5.17) diverge nella componente di posto (i, i), è chiaro che diverge, per $t \rightarrow t_2^+$, il prodotto $\bar{x}^T \Pi(t, K_1, t_1) \bar{x}$ con $\bar{x}^T = [0 \ 0 \dots 1 \ 0 \dots 0]$.

t_1 -esimo posto

Se nessuna componente diagonale diverge, e se diverge quella di posto (i, j), assumendo $\bar{x}^T = [0 \dots 0 \ 1 \ 0 \dots 0 \ 1 \dots 0 \dots]$

i-esimo posto j-esimo posto

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t_2^+} \bar{x}^T \Pi(t, K_1, t_1) \bar{x} &= \\ &= \lim_{t \rightarrow t_2^+} \Pi_{ii}(t, K_1, t_1) + \lim_{t \rightarrow t_2^+} \Pi_{jj}(t, K_1, t_1) + 2 \lim_{t \rightarrow t_2^+} \Pi_{ij}(t, K_1, t_1) = \infty \end{aligned}$$

In ogni caso, è possibile determinare un vettore $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ tale da avere infinito il $\lim_{t \rightarrow t_2^+} \bar{x}^T \Pi(t, K_1, t_1) \bar{x}$, e quindi

$$\begin{aligned} \infty &= \lim_{t \rightarrow t_2^+} \inf_{x(t)=\bar{x}} \int_{t_1}^{t_2} \begin{bmatrix} u \\ x \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ x \end{bmatrix} dt + x(t_1)^T K_1 x(t_1) = \\ &= \lim_{t \rightarrow t_2^+} \bar{x}^T \Pi(t, K_1, t_1) \bar{x} \quad (5.18) \end{aligned}$$

Poiché l'estremo inferiore dipende con continuità dall'istante iniziale t (quando lo stato iniziale $x(t) = \bar{x}$ è fissato) (esercizio) si ottiene da (5.18) l'assurdo:

$$\infty = \inf_{x(t_2)=\bar{x}} \int_{t_2}^{t_1} \begin{bmatrix} u \\ x \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ x \end{bmatrix} dt + x(t_1)^T K_1 x(t_1)$$

Spesso, nelle applicazioni, oltre alla condizione $R > 0$, si impone a Q di essere semidefinita positiva, e si assume $K_1 = 0$. In questo caso la soluzione all'equazione di Riccati (5.5) esiste su ogni intervallo $[t_0, t_1]$.

Per provarlo, si consideri la funzione $g: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$, definita ponendo

$$g(x_0, t) \triangleq \inf_{u} \int_{t_0}^t u^T R u + x^T Q x \, dt$$

$x(t_0) = x_0$

Poiché $Q \geq 0$, $\int_{t_0}^t u^T R u + x^T Q x \, dt$ è sempre non negativo e quindi $g(x_0, t)$ esiste sempre finita e non negativa. Inoltre è facile verificare (e lo si lascia come esercizio) i fatti seguenti:

- i) $g(x_0, t)$, per t fissato, è una forma quadratica semidefinita positiva di x_0
- ii) $g(x_0, t)$, per x_0 fissato, è funzione crescente dell'argomento t .

Per quanto abbiamo visto sulle forme quadratiche, esiste allora una matrice $J(t-t_0) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, semidefinita positiva e crescente con l'argomento $(t-t_0)$ (^o), tale da aversi

$$x_0^T J(t-t_0) x_0 = g(x_0, t) = \inf_{u} \int_{t_0}^t u^T R u + x^T Q x \, dt$$

$x(t_0) = x_0$

e se l'equazione di Riccati (5.5) è risolubile su $[t_0, t]$, risulta

$$\Pi(t_0, 0, t) = J(t-t_0).$$

Se t_1 è l'estremo superiore dei valori di t per cui (5.5) è risolubile sull'intervallo $[t_0, t]$ con condizione iniziale $K(t) = 0$, abbiamo, per la proprietà ii):

$$\lim_{t \rightarrow t_1} x_0^T \Pi(t_0, 0, t) x_0 = \lim_{t \rightarrow t_1} x_0^T J(t-t_0) x_0 \leq x_0^T J(t_1-t_0) x_0$$

Quindi non può divergere $\lim_{t \rightarrow t_1} \Pi(t_0, 0, t)$ per il ragionamento fatto nel teorema 3, e la soluzione è prolungabile ad intervalli maggiori di $[t_0, t_1]$.

Abbiamo quindi provato il seguente:

Teor. 4 L'equazione di Riccati

$$\dot{K} = -A^T K - K A - Q + K B R^{-1} B^T K, \quad R > 0, \quad Q \geq 0,$$

con la condizione $K(t_1) = 0$, è risolubile su ogni intervallo $[t_0, t_1]$.

(^o) Se M ed N sono in $\mathbb{R}^{n \times n}$, si dice che M è maggiore o uguale ad N ($M \geq N$) se $M - N$ è semidefinita positiva.

Esercizio 1. Si generalizzi il precedente teorema al caso in cui è $K(t_1) = K_1 \geq 0$.

Concludiamo questa sezione mostrando come l'equazione di Riccati sia applicabile anche quando l'indice η ha una struttura più generale di quella indicata in (5.3).

Sempre con riferimento al sistema (5.2), definiamo l'indice η come

$$\eta = \int_{t_0}^{t_1} \langle u \oplus x | u \oplus x \rangle dt + x^T(t_1) K_1 x(t_1) \quad (5.19)$$

dove $\langle \cdot | \cdot \rangle$ denota un prodotto interno generico nello spazio $U \oplus X$, somma diretta di U e di X , e quindi $\langle u \oplus x | u \oplus x \rangle$ induce una generica forma quadratica su $U \oplus X$.

Ovviamente esistono matrici $R = R^T$, $Q = Q^T$, P per cui:

$$\langle u \oplus x | u \oplus x \rangle = \begin{bmatrix} u^T & x^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & P \\ P^T & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ x \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

e si nota che il caso considerato in (5.3) è una particolareizzazione di (5.19), ponendo $P = 0$.

Quando R è definita positiva, la minimizzazione di η può ridursi alla procedura descritta dal teor. 2.

Basterà osservare che η può essere scritto sotto la forma

$$\begin{aligned} \eta &= \int_{t_0}^{t_1} \begin{bmatrix} u^T & x^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & P \\ P^T & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ x \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} u^T & x^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & P \\ P^T & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ x \end{bmatrix} \\ &+ x^T(t_1) K_1 x(t_1) \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \begin{bmatrix} \hat{u}^T & \hat{x}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{x} \end{bmatrix} dt + \hat{x}^T(t_1) K_1 \hat{x}(t_1) \end{aligned}$$

$$\hat{u} = u + R^{-1} P x$$

$$\hat{Q} = Q - P^T R^{-1} P \quad (5.21)$$

e che l'evoluzione di stato di $\hat{\Sigma} = (A, B, -)$ in corrispondenza all'ingresso u , coincide con l'evoluzione di stato del sistema $\hat{\Sigma} = (A - B R^{-1} P, B, -)$, in corrispondenza all'ingresso $\hat{u}$. L'equazione di Riccati associata è allora la seguente

$$\frac{dK}{dt} = -\hat{Q} - \hat{A}^T K - K \hat{A} + K B R^{-1} B^T K \quad (5.22)$$

$$= -Q - A^T K - K A + (K B + P^T) R^{-1} (B^T K + P)$$

ed $x_0^T \Pi(t_0, K_1, t_1) x_0$ è il minimo valore di η se lo stato in t_0 è x_0 . Tale minimo si ottiene scegliendo

$$\hat{u}(t) = -R^{-1} B^T \Pi(t, K_1, t_1) x(t)$$

e quindi applicando un ingresso

$$u_{ot}(t) = -R^{-1} (P + B^T \Pi(t, K_1, t_1)) x(t) \quad (5.23)$$

Esempio 1. All'istante $t=0$, nella rete N è $i_L = 1A$. Vogliamo determinare la massima energia che un dispositivo esterno U può estrarre ai morsetti BB' nell'intervallo di tempo $[0, 1]$.

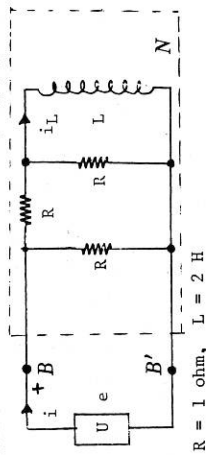


Fig. 1

La rete N può essere interpretata come un sistema lineare, avente come ingresso e come uscita rispettivamente la tensione e la corrente i del bipolo U . Le equazioni di stato sono facilmente ricavabili

$$\begin{aligned} \frac{di_L}{dt} &= A i_L + B e = -\frac{1}{4} i_L + \frac{1}{4} e \\ i &= C i_L + D_0 e = \frac{1}{2} i_L + \frac{3}{2} e \end{aligned} \quad (5.24)$$

L'energia η che U eroga (e che N assorbe) nell'intervallo $[0, 1]$ è

$$\eta = \int_0^1 e i dt,$$

cosicché il problema di determinare la massima energia erogabile da N può formalizzarsi nella ricerca del

$$\min \int_0^1 e i dt \quad (5.25)$$

Utilizzando (5.24), ei assume la struttura (5.20) con $R = \frac{3}{2}$, $Q = 0$, $P = \frac{1}{4}$:

$$\eta = \int_0^1 \begin{bmatrix} e & i_L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/2 & 1/4 \\ 1/4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ i_L \end{bmatrix} dt \quad (5.26)$$

Definiamo allora

$$\hat{A} = A - BR^{-1}P = -\frac{7}{24}$$

$$\hat{Q} = Q - P^T R^{-1} P = -\frac{1}{24}$$

$$\hat{e} = e + R^{-1}P i_L = e + \frac{1}{6} i_L$$

e ricordiamo che l'evoluzione dello stato di $\hat{\Sigma} = (A, B, -)$ in corrispondenza all'ingresso e coincide con quella di $\hat{\Sigma} = (\hat{A}, B, -)$ in corrispondenza all'ingresso $\hat{e}$ (se coincidono gli stati iniziali). Abbiamo così ridotto il problema al seguente

$$\min_{\hat{e}} \int_0^1 \begin{bmatrix} \hat{e} & i_L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{24} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{e} \\ i_L \end{bmatrix} dt$$

$$\frac{di_L}{dt} = \hat{A} i_L + B \hat{e}$$

che può essere affrontato risolvendo l'equazione di Riccati

$$\frac{dk}{dt} = -\hat{Q} - \hat{A}^T k - k \hat{A} + k B R^{-1} B^T k, \quad k(1) = 0$$

Sostituendo:

$$\frac{dk}{dt} = \frac{1}{24} + \frac{7}{12} k + \frac{1}{24} k^2$$

ed integrando per separazione di variabili

$$\int \frac{1/4\sqrt{3}}{k+7-4\sqrt{3}} - \frac{1/4\sqrt{3}}{k+7+4\sqrt{3}} dk = \int \frac{dt}{24}$$

si ottiene:

$$\frac{1}{8\sqrt{3}} \ln \left| \frac{k+7-4\sqrt{3}}{k+7+4\sqrt{3}} \right| = \frac{t}{24} + \text{cost}$$

La costante si determina imponendo $k(1) = 0$, e si ha

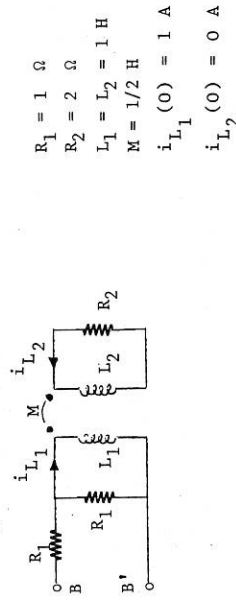
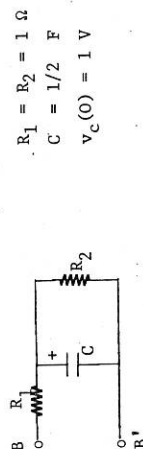
$$\frac{k(t)+7-4\sqrt{3}}{k(t)+7+4\sqrt{3}} = \exp\left(\frac{\sqrt{3}}{3} t + \frac{1}{8\sqrt{3}} \ln \frac{7-4\sqrt{3}}{7+4\sqrt{3}} - \frac{1}{24}\right) \quad (5.27)$$

Infine si risolve in $k(0,0,1)$ l'equazione

$$\frac{k(0,0,1)+7-4\sqrt{3}}{k(0,0,1)+7+4\sqrt{3}} = \exp\left(\frac{1}{8\sqrt{3}} \ln \frac{7-4\sqrt{3}}{7+4\sqrt{3}} - \frac{1}{24}\right)$$

e si ricava $\eta_{\min} = i_L^2(0)K(0,0,1)$

Esercizio 2. Si determini la massima energia che è possibile estrarre nell'intervallo di tempo $[0,2]$ dai seguenti circuiti:



6. Cenni a problemi di controllo ottimo su intervallo finito

Vogliamo, in questo paragrafo, accennare ad alcune applicazioni delle tecniche esaminate nel par. 5.

Non insistiamo su questo argomento - peraltro assai importante - perché esso costituisce l'oggetto specifico di corsi successivi: il nostro scopo è essenzialmente quello di raggiungere una certa familiarità con metodi di studio che applicheremo all'analisi dei sistemi lineari dissipativi.

Ci riferiremo sempre al sistema lineare $\Sigma = (A, B, C, 0)$.

A) INSEGUITORE OTTIMO

Si assegnino, sull'intervallo $[t_0, t_1]$, una funzione vettoriale del tempo $\bar{y}(t)$, che rappresenta l'uscita "desiderata" del sistema, e si consideri il vettore di errore

$$e(t) = \bar{y}(t) - y(t) \quad (6.1)$$

che costituisce appunto lo scostamento istantaneo fra l'uscita desiderata e quella effettiva del sistema.

Intuitivamente, il problema dell'inseguitore ottimo ha per oggetto la ricerca di un controllo $u(t)$ che mediamente sull'intervallo $[t_0, t_1]$ conservi modulo "piccolo", e che d'altra parte assicuri un valore medio ed (eventualmente) un valore finale "piccoli" al modulo di $e(t)$. Un modo appropriato di impostare il problema è allora quello di considerare il funzionale quadratico

$$J = e^T(t_1)S e(t_1) + \int_{t_0}^{t_1} e^T(t)Q e(t) + u^T(t)R u(t) dt \quad (6.2)$$

e di scegliere opportunamente S , Q ed $R \geq 0$, in maniera che $e^T(t_1)K_1 e(t_1)$ penalizzi gli scostamenti del vettore d'uscita dal riferimento $\bar{y}$ nell'istante finale, ed $\int_{t_0}^{t_1} e^T(t)Q e(t) + u^T(t)R u(t) dt$ penalizzi gli scostamenti medi dallo zero dell'errore e dell'ingresso. Ovviamente S , Q ed R vanno determinati con riferimento alla situazione concreta cui un tale modello dovrà applicarsi.

Sarà ottimo per noi quel controllo u che minimizza (6.2) quando il sistema Σ "parte" dallo stato $x(t_0) = x_0$ assegnato, ed equivole secondo l'equazione di transizione di stato

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu \quad (6.3)$$

Per poter applicare risultati già noti, supporremo $R > 0$.

Cominciamo con un caso particolare, ma di notevole interesse, ponendo $\bar{y} = 0$ sull'intervallo $[t_0, t_1]$ (problema del controllore terminale delle uscite).

In questo caso ci si riduce a minimizzare

$$J = x^T(t_1)C^T S C x(t_1) + \int_{t_0}^{t_1} u^T R u + x^T C^T Q C x dt \quad (6.4)$$

e si ricade nel problema risolto in teor. 2 di par. 5: si trova che l'equazione di Riccati associata a (6.3) (6.4) è

$$\begin{aligned} \frac{dK}{dt} &= -C^T Q C - A^T K - K A + K B R^{-1} B^T K \\ K(t_1) &= C^T S C \end{aligned} \quad (6.5)$$

e pertanto, per (5.7) e (5.8), se (6.5) è risolubile in $[t_0, t_1]$ si ha

$$\begin{aligned} u_{ot} &= -R^{-1} B^T K(t, C^T S C, t_1) x(t) \\ \eta_{min} &= x_0^T K(t_0, C^T S C, t_1) x_0 \end{aligned}$$

Un caso intermedio (problema dell'asservimento) è quello in cui assumiamo che $\bar{y}$ sia uscita in evoluzione libera di un assegnato sistema lineare $\bar{\Sigma} = (F, G, H, 0)$ per un opportuno stato iniziale $\bar{x}(t_0)$. In queste ipotesi, minimizzare il costo J impone - in qualche modo - un "inseguimento" di $\bar{y}$ da parte di y , o, come si suol dire, un asservimento di Σ a $\bar{\Sigma}$.

Risolveremo il problema facendo un'ipotesi restrittiva sulla matrice C di readout: supporremo che sia $\text{rank } C = p$ cioè corrispondente ad assumere $n \geq p$, e C di rango completo: si noti che, quando è $\text{rank } C < p$, le funzioni di uscita $y_1(t), y_2(t), \dots, y_p(t)$ sono sempre linearmente indipendenti, e quindi eliminandone un numero conveniente è possibile ridursi nelle condizioni ipotizzate, cosicché per il noto teorema di Binet la matrice CC^T è invertibile.

Le equazioni che determinano l'evoluzione di Σ e di $\bar{\Sigma}$ sono allora, rispettivamente per Σ e per $\bar{\Sigma}$:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax + Bu & x(t_0) = x_0 \\ y = Cx \end{cases} \quad (6.6)$$

$$\begin{cases} \frac{d\bar{x}}{dt} = F\bar{x} & \bar{x}(t_0) = \bar{x}_0 \\ \bar{y} = H\bar{x} \end{cases} \quad (6.7)$$

e, posto (°)

$$x^* = C^T(CC^T)^{-1}y \quad (6.8)$$

il vettore $\bar{y}$ può pensarsi come immagine di x^* tramite C

$$Cx^* = \bar{y} \quad (6.9)$$

ed il costo J si esprime nella forma:

$$J = \int_{t_0}^{t_1} u^T R u + (x^* - x)^T C^T C (x^* - x) dt + (x^*(t_1) - x(t_1))^T S C^T C (x^*(t_1) - x(t_1)) \quad (6.10)$$

Consideriamo ora la realizzazione $\hat{\Sigma} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & F \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} C & H \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, somma di Σ e di $\bar{\Sigma}$. E' ovvio che se lo stato iniziale $\hat{x}(t_0)$ di $\hat{\Sigma}$ si assume $\begin{bmatrix} x^T(t_0) & \bar{x}^T(t_0) \end{bmatrix}^T$, in corrispondenza ad ogni ingresso u le prime n componenti di $\hat{x}(t)$ coincidono, per ogni $t > t_0$, con lo stato $x(t)$ che Σ raggiunge partendo dallo stato x_0 , e le componenti residue di $\hat{x}(t)$ danno lo stato $\bar{x}(t)$ quando $\bar{\Sigma}$ parte dallo stato $\bar{x}_0$.

Quindi il vettore $x^* - x$ che entra nella formula (6.10) si può esprimere tramite il vettore di stato del sistema $\hat{\Sigma}$:

$$x^* - x = \begin{bmatrix} -I & C^T(CC^T)^{-1}H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \bar{x} \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

ed il costo J tramite u ed $\hat{x}$:

$$J = \int_{t_0}^{t_1} u^T R u + \hat{x}^T \hat{Q} \hat{x} dt + \hat{x}^T(t_1) \hat{S} \hat{x}(t_1) \quad (6.12)$$

(°) E' ovvio che $\bar{\Sigma}$ deve avere un numero di uscite p eguale a quello di Σ , poichè y ed $\bar{y}$ sono sommabili.

$$\hat{Q} = \begin{bmatrix} C^T Q C & -C^T Q H \\ -H^T Q C & H^T Q H \end{bmatrix} \quad (6.12.1)$$

$$\hat{S} = \begin{bmatrix} C^T S C & -C^T S H \\ -H^T S C & H^T S H \end{bmatrix}$$

Applicando i risultati del teor. 2 di par. 5, troviamo allora che lo ingresso ottimo è

$$u_{ot}(t) = -R^{-1} \begin{bmatrix} B^T \\ 0 \end{bmatrix} \hat{\Pi}(t, \hat{S}, t_1) \hat{x}(t) \quad (6.13)$$

dove $\hat{x}(t)$ è lo stato del sistema $\hat{\Sigma}$ all'istante t , e $\hat{\Pi}$ è la soluzione dell'equazione di Riccati:

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{K}}{dt} &= -\hat{Q} - \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & F \end{bmatrix}^T \hat{K} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & F \end{bmatrix} + \hat{K} \begin{bmatrix} B^T \\ 0 \end{bmatrix} R^{-1} \begin{bmatrix} B^T \\ 0 \end{bmatrix} \hat{K} \\ \hat{K}(t_1) &= \hat{S} \end{aligned} \quad (6.14)$$

Inoltre

$$J_{\min} = \begin{bmatrix} x_o^T & \bar{x}_o^T \end{bmatrix} \hat{\Pi}(t_o, \hat{S}, t_1) \begin{bmatrix} x_o \\ \bar{x}_o \end{bmatrix} \quad (6.15)$$

Il problema a questo punto è formalmente risolto. Tuttavia (6.13) non lega $u_{ot}(t)$ ad $x(t)$ ed a $\bar{x}(t)$ separatamente, come sarebbe utile per effettuare un controllo in "catena chiusa".

Se partizioniamo peraltro $\hat{K}$ in (6.14)

$$\hat{K} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{12}^T & K_{22} \end{bmatrix}, \quad K_{11} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

è immediato che (6.14) si spezza in un sistema di tre equazioni differenziali (vettoriali):

$$\begin{aligned}\frac{dK_{11}}{dt} &= -C^T Q C - A^T K_{11} - K_{11} A + K_{11} B R^{-1} B^T K_{11} ; \quad K_{11}(t_1) = C^T S C \\ \frac{dK_{12}}{dt} &= -C^T Q H - A^T K_{12} - K_{12} F + K_{11} B R^{-1} B^T K_{12} ; \quad K_{12}(t_1) = -C^T S H \\ \frac{dK_{22}}{dt} &= -H^T Q H - F^T K_{22} - K_{22} F + K_{12} B R^{-1} B^T K_{12} ; \quad K_{22}(t_1) = H^T S H\end{aligned}\quad (6.16)$$

la prima delle quali è l'equazione di Riccati associata al problema del controllore terminale delle uscite, la seconda è una equazione differenziale lineare in K_{12} quando si sia sostituita in essa la soluzione della prima, e la terza è una equazione differenziale lineare in K_{22} quando si sia introdotta in essa la soluzione della seconda.

Se Π_{11} , Π_{12} e Π_{22} sono le soluzioni di (6.16), risulta ovviamente

$$\hat{\Pi}(t, \hat{s}, t_1) = \begin{bmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} \\ \Pi_{12}^T & \Pi_{22} \end{bmatrix}$$

e quindi dalla (6.13) si ha (*)

$$u_{ot}(t) = -R^{-1} B^T \Pi_{11}(t, C^T S C, t_1) x(t) - R^{-1} B^T \Pi_{12}(t) \bar{x}(t) \quad (6.17)$$

e dalla (6.15):

$$J_{\min} = x_{011}^T(t_0, C^T S C, t_1) + 2 x_{011}^T(t_0) \bar{x}_0 + \bar{x}_0^T \Pi_{22}(t_0) \bar{x}_0$$

In conclusione l'ingresso ottimo è somma di due termini: il primo è legato allo stato in modo eguale a quello trovato per il controllore terminale delle uscite, il secondo è legato allo stato del sistema $\bar{x}$. La figura seguente illustra come possa essere ottenuto un tale asserimento, quando siano accessibili gli stati istantanei $x(t)$ ed $\bar{x}(t)$, usando un feedback lineare (non costante) sullo stato del sistema da asservire.

(*) Si è indicata con notazioni in tre argomenti la soluzione della equazione (6.16.1) perchè si tratta di un'equazione di Riccati.

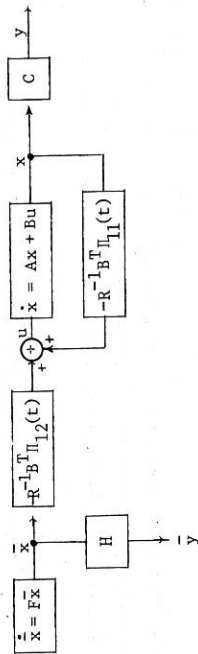


fig. 1

Si noti che l'equazione di Riccati viene integrata all'indietro in quanto le condizioni al contorno sono date in t_1 (istante finale). Non è quindi possibile calcolare $\Pi_{11}(t)$ e $\Pi_{12}(t)$ in tempo reale, cioè durante l'evoluzione del sistema dinamico, ma è necessario determinarne a priori l'andamento. D'altra parte Π_{11} e Π_{12} non dipendono dalle condizioni iniziali dei sistemi Σ e $\bar{\Sigma}$ ma solo dal costo J e dai parametri di Σ e di $\bar{\Sigma}$. Quindi esse possono essere calcolate a priori, una volta per tutte, indipendentemente dagli stati di partenza di Σ e $\bar{\Sigma}$.

Se ora deriviamo rispetto al tempo il prodotto $\Pi_{12} \bar{x}$, si ha:

$$\begin{aligned}\frac{d(\Pi_{12} \bar{x})}{dt} &= \dot{\Pi}_{12} \bar{x} + \Pi_{12} \dot{\bar{x}} = \\ &= C^T Q H \bar{x} - A^T \Pi_{12} \bar{x} - \Pi_{12} F \bar{x} + \Pi_{11} B R^{-1} B^T \Pi_{12} \bar{x} + \Pi_{12} C^T \bar{x} = \\ &= -(A - B R^{-1} B^T \Pi_{11}(t)) (\Pi_{12} \bar{x}) + C^T Q \bar{x}\end{aligned}\quad (6.18)$$

e pertanto il vettore

$$b = \Pi_{12} \bar{x}$$

soddisfa la equazione differenziale lineare (a coefficienti non costanti) (6.18), con la condizione finale $b(t_1) = -C^T S H \bar{x}(t_1)$. Quindi (6.17) diventa

$$u_{ot}(t) = -R^{-1} B^T \Pi_{11}(t, C^T S C, t_1) x(t) - R^{-1} B^T b(t) \quad (6.19)$$

dove b è soluzione dell'equazione

$$\frac{db}{dt} = -(A - BR^{-1}B^T \Pi_{11}(t))b + C^T Q \bar{y}; \quad b(t_1) = -C^T S \bar{y}(t_2) \quad (6.20)$$

Allora il controllo ottimo è realizzabile senza ricorrere ad una valutazione di $\bar{x}$: l'equazione (6.20) è risolta, all'indietro nel tempo, per ottenere $b(t)$, che è poi usato nell'implementazione della legge del controllo ottimo.

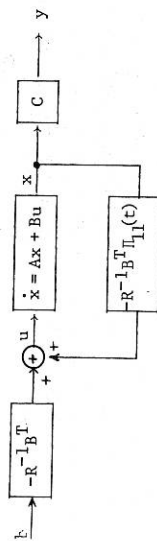


fig. 2

Le matrici F ed H non svolgono alcun ruolo nella determinazione di u_{ot} , quando $\bar{y}$ sia nota: infatti non contribuiscono ad individuare $\Pi_{11}(t)$, e non giocano neppure nell'equazione (6.20), che individua $b(t)$.

Ciò induce a pensare che (6.19) fornisca la soluzione al problema dell'inseguimento nel caso generale, e non soltanto in quello da noi visto, in cui $\bar{y}$ è l'uscita libera di un sistema lineare.

Per verificare che (6.19) risolve il problema dello inseguimento ottimo, procederemo in modo analogo a quello seguito per il lemma 1 ed il teor. 2 in par. 5. Si danno qui le linee della prova, lasciando come esercizio i dettagli.

Come primo passo, si verifica l'identità

$$\begin{aligned} x^T K x + 2x^T b \Big|_{t_0}^{t_1} &= \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \begin{bmatrix} 0 & B^T K & B^T \\ \bar{K} & \dot{K} + A^T K + K A & K B R^{-1} B^T \\ B & B R^{-1} B^T K & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ x \\ b \end{bmatrix} dt + 2x^T C^T \bar{y} \Big|_{t_0}^{t_1} \end{aligned} \quad (6.21)$$

valida per ogni matrice K derivabile su $[t_0, t_1]$, quando x, u, b, K sono legati dalle equazioni:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$\dot{b} = (-A^T + KB^T R^{-1} B^T)b + C^T Q \bar{y}$$

Si scriva il costo sotto la forma

$$\begin{aligned} J &= \int_{t_0}^{t_1} \begin{bmatrix} u^T & x^T & b^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & 0 & 0 \\ 0 & C^T Q C & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ x \\ b \end{bmatrix} dt + \\ &+ \begin{bmatrix} x^T(t_1) & \bar{y}^T(t_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C^T S & -C^T S \\ -SC & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t_1) \\ \bar{y}(t_1) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.22)$$

e si assuma che in (6.21) K sia soluzione dell'equazione di Riccati (6.16.1). E' immediata, da (6.21) e (6.22) la seguente formula

$$\begin{aligned} J &= \int_{t_0}^{t_1} \begin{bmatrix} u^T & x^T & b^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & B^T \Pi_{11} & B^T \\ \Pi_{11} B & \Pi_{11} B R^{-1} B^T \Pi_{11} & \Pi_{11} B R^{-1} B^T \\ B & B R^{-1} B^T \Pi_{11} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ x \\ b \end{bmatrix} dt + \\ &+ \begin{bmatrix} x^T(t_1) & \bar{y}^T(t_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C^T S & -C^T S \\ -SC & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t_1) \\ \bar{y}(t_1) \end{bmatrix} - (x^T \Pi_{11} x + 2x^T b) \Big|_{t_0}^{t_1} \end{aligned}$$

e ricordando che deve essere

$$x(t_0) = x_0, \quad b(t_1) = -C^T S \bar{y}(t_1), \quad \Pi_{11}(t_1) = C^T S C$$

si ottiene

$$\begin{aligned} J &= \int_{t_0}^{t_1} \begin{bmatrix} u^T & x^T & b^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & B^T \Pi_{11} & B^T \\ \Pi_{11} B & \Pi_{11} B R^{-1} B^T \Pi_{11} & \Pi_{11} B R^{-1} B^T \\ B & B R^{-1} B^T \Pi_{11} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ x \\ b \end{bmatrix} dt + \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} \begin{bmatrix} u^T & x^T & b^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & B^T \Pi_{11} & B^T \\ \Pi_{11} B & \Pi_{11} B R^{-1} B^T \Pi_{11} & \Pi_{11} B R^{-1} B^T \\ B & B R^{-1} B^T \Pi_{11} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ x \\ b \end{bmatrix} dt + \\ &+ 2x_0^T b(t_0) + \bar{y}^T(t_1) S \bar{y}(t_1) = \end{aligned}$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} (u + R^{-1} B^T \Pi_{11} x + R^{-1} B^T b)^T R (u + R^{-1} B^T \Pi_{11} x + R^{-1} B^T b) dt + \int_{t_0}^{t_1} (y^T Q y - b^T B R^{-1} B^T b) dt + x_0^T \Pi_{11} (t_1) x_0 + y^T (t_1) S y(t_1) \quad (6.23)$$

Poichè in (6.23) il termine $\int_{t_0}^{t_1} (y^T Q y + b^T B R^{-1} B^T b) dt + x_0^T \Pi_{11} (t_1) x_0 + 2x_0^T b(t_0) + y^T(t_1) S y(t_1)$ non dipende da u , J è minimo solo per quell'ingresso u che annulla il primo integrale di (6.23):

$$u_{ot}(t) = -R^{-1} B^T \Pi_{11} (t, C^T S C, t_1) x(t) - R^{-1} B^T b(t)$$

ed è

$$J_{\min} = \int_{t_0}^{t_1} y^T Q y - b^T B R^{-1} B^T b dt + x_0^T \Pi_{11} (t_1) x_0 + 2x_0^T b(t_0) + y^T(t_1) S y(t_1)$$

Osservazione: il risultato qui dimostrato vale, ovviamente, anche se $\bar{y}$ è l'uscita di un arbitrario sistema lineare in evoluzione libera. Pertanto la soluzione ottima al problema dell'asservimento vale anche quando non è $\text{rank } C = p$.

Si noti che la realizzazione dell'inseguimento ottimo con un feedback sullo stato richiede che lo stato sia in qualche modo "disponibile" all'ingresso del blocco di retroazione. In generale si pone perciò il problema di stimare lo stato x a partire da u ed y (che sono per noi le grandezze effettivamente misurabili), com'è indicato in fig. 3.

Noi qui non ci occuperemo di questo aspetto, peraltro fondamentale, del controllo, e rinviando ad altri corsi per una impostazione del problema dello stimatore.

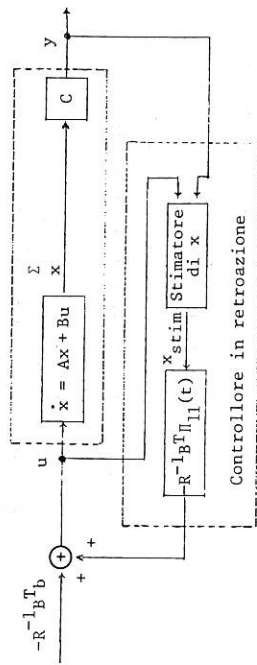


fig. 3

B) OTTIMIZZAZIONE CON STATO TERMINALE FISSATO

Una classe di problemi assai interessante riguarda il controllo ottimo (rispetto ad un costo da minimizzare) di un sistema lineare da uno stato iniziale $x(t_0) = x_0$ ad uno stato finale $x(t_1) = x_1$ pure fissato, oppure appartenente ad un fissato sottoinsieme dello spazio degli stati X .

Noi per semplicità supporremo

i) $x(t_1) = x_1$ fissato

ii) Σ completamente controllabile

Faremo inizialmente l'ulteriore assunzione:

iii) $\eta = \int_{t_0}^{t_1} u^T(t) u(t) dt$ (6.24)

Si dimostra allora il seguente

Teor.1 Sia W il gramiano di controllabilità del sistema $\Sigma = (A, B, C, -)$, ed il vettore ζ sia la soluzione dell'equazione

$$W(t_0, t_1) \zeta = x_0 - \exp(-A(t_0 - t_1)) x_1 \quad (6.25)$$

Allora l'ingresso

$$u_{ot}(t) = -B^T \exp(-A^T(t - t_0)) \zeta \quad (6.26)$$

porta il sistema dallo stato x_0 in t_0 allo stato x_1 in t_1 , ed è ottimo rispetto all'indice (6.24).

prova. Poichè Σ è completamente controllabile, il gramiano $W(t_0, t_1)$, ha rango completo se $t_1 > t_0$ (cfr. par. I-4) e (6.25) ha quindi l'unica soluzione

$$\zeta = W^{-1}(t_0, t_1) \left[x_0 - \exp(-A(t_0 - t_1)) x_1 \right]$$

Si ha poi

$$\begin{aligned} x(t_1) &= \exp A(t_1 - t_0) x_0 - \int_{t_0}^{t_1} \exp A(t_1 - \sigma) B B^T \exp(-A^T(\sigma - t_0)) \zeta d\sigma = \\ &= \exp A(t_1 - t_0) x_0 - \int_{t_0}^{t_1} \exp(-A(t_1 - t_0)) \exp(-A(\sigma - t_0)) B B^T \exp(-A^T(\sigma - t_0)) \zeta d(\sigma - t_0) \\ &= -\exp A(t_1 - t_0) x_0 - \exp(-A(t_1 - t_0)) \left[x_0 - \exp(-A(t_0 - t_1)) x_1 \right] = x_1 \end{aligned}$$

che prova che il controllo (6.26) pilota Σ in x_1 al tempo t_1 .

Resta da provare l'ottimalità di u_{ot} . Si consideri un controllo generico u che effettui il desiderato trasferimento da x_0 ad x_1 sull'intervallo $[t_0, t_1]$. Avremo allora

$$x_1 = \exp A(t_1 - t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t_1} \exp A(t_1 - \sigma)Bu(\sigma)d\sigma$$

$$x_1 = \exp A(t_1 - t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t_1} \exp A(t_1 - \sigma)Bu_{ot}(\sigma)d\sigma$$

Sottraendo membro a membro

$$0 = \int_{t_0}^{t_1} \exp A(t_1 - \sigma)B[u(\sigma) - u_{ot}(\sigma)]d\sigma$$

e premoltiplicando per $\zeta^T \exp A(t_1 - t_0)$

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{t_0}^{t_1} \zeta^T \exp(-A(\sigma - t_0))B[u(\sigma) - u_{ot}(\sigma)]d\sigma = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \zeta^T u_{ot}(t) \left[u(t) - u_{ot}(t) \right] dt \end{aligned}$$

si perviene a verificare che

$$\int_{t_0}^{t_1} u^T(t)u(t) - u_{ot}^T(t)u_{ot}(t)dt = \int_{t_0}^{t_1} [u(t) - u_{ot}(t)]^T [u(t) - u_{ot}(t)]dt$$

e quindi a provare l'ottimalità di u_{ot} , poichè il secondo membro è non negativo, e si annulla solo per $u = u_{ot}$.

Esercizio 1. Si verifichi che, se l'indice η ha la forma

$$\eta = \int_{t_0}^{t_1} u^T(t)Ru(t)dt, \quad R > 0,$$

allora $u_{ot} = -R^{-1}B^T \exp(-A^T(t - t_0))\bar{\zeta}$, dove $\bar{\zeta}$ è soluzione di $\int_{t_0}^{t_1} \exp(-A\sigma)BR^{-1}B^T \exp(-A^T\sigma)d\sigma \bar{\zeta} = x_0 - \exp(-A(t_0 - t_1))x_1$.
(Nel seguito, indicheremo $\int_{t_0}^{t_1} \exp(-A\sigma)BR^{-1}B^T \exp(-A^T\sigma)d\sigma$ con $W_R(t_0, t_1)$, e chiameremo gramiano di controllabilità anche $W_R(t_0, t_1)$: il contesto provvederà ad eliminare le ambiguità).

Esercizio 2. Si provi che, nel caso del teor. 1, il valore minimo del costo η è dato da

$$\eta_{\min} = \zeta^T W(t_0, t_1) \zeta$$

e nel caso dell'esercizio precedente da

$$\eta_{\min} = \zeta^T W_R(t_0, t_1) \zeta$$

Accenniamo soltanto ad un caso più generale, quello in cui è

$$\eta = \int_{t_0}^{t_1} u^T(t)u(t) + x^T(t)Qx(t)dt \quad (6.27)$$

Si dimostra che, se K_1 è una matrice simmetrica tale che risulti risolvibile su $[t_0, t_1]$ l'equazione di Riccati associata a (6.27)

$$\frac{dK}{dt} = -Q - A^T K - KA + KBB^T K \quad K(t_1) = K_1$$

allora minimizzare (6.27), con le condizioni

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu$$

$$x(t_0) = x_0$$

$$x(t_1) = x_1$$

equivale a minimizzare

$$\bar{\eta} = \int_{t_0}^{t_1} v^T(t)v(t)dt + x_0^T(t_0, K_1, t_1)x_0 - x_1^T K_1 x_1 \quad (6.28)$$

con le condizioni

$$\frac{dx}{dt} = [A - BB^T K_1(t_1, t_1)]x + Bv$$

$$x(t_0) = x_0$$

$$x(t_1) = x_1$$

e l'ingresso ottimo è

$$u_{ot} = v_{ot} - B^T \Pi(t, K_1, t_1) x \quad (6.30)$$

se v_{ot} indica la soluzione ottima per il problema (6.28).

Si noti che il problema (6.28) non fa riferimento ad un sistema stazionario: la sua soluzione può peraltro essere trovata sulle linee seguite per il caso stazionario, pur di sostituire $\exp(A(t-t_0))$ la matrice di transizione di stato $\phi(t, t_0)$ relativa al sistema non stazionario (6.29), ed al gramiano, quale dato per i sistemi stazionari, il gramiano

$$W(t_0, t) = \int_{t_0}^t \phi(t_0, \tau) B B^T \phi^T(t_0, \tau) d\tau$$

Si ha allora

$$v_{ot}(t) = -B^T \Pi^T(t_0, t) \zeta \quad (6.31)$$

dove ζ è soluzione di

$$W(t_0, t_1) \zeta = x_1 - \phi(t_0, t_1) x_0$$

Una prova completa delle cose qui accennate si trova in Brockett [B1].

Lo schema a blocchi di fig. 4 mostra come ottenere, con retroazione sullo stato, il controllo ottimo per il problema (6.27)

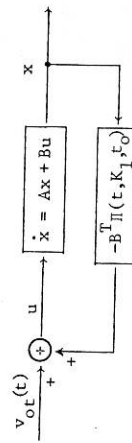


fig. 4

Esempio 1. BROCKETT [7]. Lo stato della rete di fig. 5 evolve secondo l'equazione:

$$\frac{dv_c}{dt} = j/c$$

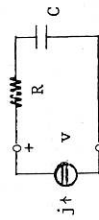


Fig. 5

e l'energia dissipata nella resistenza R nell'intervallo $[0, t_1]$ è

$$\eta = R \int_0^{t_1} j^2(t) dt$$

Se vogliamo determinare l'andamento di $j(t)$ in modo da avere $v_c(0) = v_0$ e $v_c(t_1) = v_1$ minimizzando l'energia dissipata in R , possiamo applicare il teor. 1. Il gramiano di controllabilità è

$$W(0, t_1) = \int_0^{t_1} \exp(-A\sigma) B^T B \exp(-A^T \sigma) d\sigma = \frac{t_1}{C^2}$$

cosicché l'andamento ottimo per j è costante:

$$j_{ot}(t) = \frac{C}{t_1} (v_1 - v_0)$$

L'energia dissipata sulla resistenza è

$$\frac{RC^2}{t_1} (v_1 - v_0)^2$$

e quella fornita dal generatore è facilmente determinabile in

$$\frac{RC^2}{t_1} (v_1 - v_0)^2 + \frac{C}{2} (v_1^2 - v_0^2)$$

Se, p.es., $v_0 = 0$, il rapporto fra l'energia immagazzinata nel condensatore e la totale energia fornita dal generatore è $1/(1 + \frac{2RC}{t_1})$ e questo rapporto limita l'efficienza del circuito come dispositivo per l'accumulo di energia.

7. Problemi di ottimo ed equazione algebrica di Riccati (A.R.E.)

L'equazione algebrica di Riccati è un'equazione algebrica nella matrice incognita K:

$$-Q - A^T K - KA + K R K = 0 \quad (7.1)$$

Si supporranno sempre simmetriche le matrici Q ed R.

L'equazione (7.1) si dirà "associata" all'equazione differenziale (5.1), che ad essa si riduce quando si ponga $K(t) = \text{cost.}$ E' anzi facile verificare che ogni soluzione $\bar{\Pi}$ di (7.1) è soluzione di (5.1) quando $\bar{\Pi}$ sia pensata come funzione matriciale costante e la condizione iniziale in (5.1) valga proprio $\bar{\Pi}$, e viceversa se (5.1) ammette una soluzione costante, essa è soluzione della (A.R.E.) associata.

Il corpo sul quale cerchiamo le (eventuali) soluzioni di (7.1) è R, dato che l'uso che faremo dei risultati lo richiede: è facile constatare che in generale su R non è garantita la esistenza di soluzioni, e che se $\bar{\Pi}$ è soluzione di (7.1), anche $\bar{\Pi}^T$ è soluzione di (7.1) (e esercizio).

L'equazione algebrica di Riccati è strettamente legata alla soluzione di un problema di minimo analogo a quello accennato nel par.5 ma su un intervallo di tempo infinito: tale problema, che nella letteratura va sotto il nome di "problema del regolatore" sarà qui accennato in breve, dal momento che questo paragrafo ha come scopo l'introduzione di strumenti e di tecniche che saranno utilizzati nello studio della passività e nella sintesi delle reti elettriche.

Si consideri un sistema lineare $\Sigma = (A, B, C, D_0)$

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + D_0 u \end{aligned} \quad (7.2)$$

e si definisca sullo spazio $\mathcal{U}_{[t_0, +\infty)} \times X$ il funzionale

$$\begin{aligned} \eta: \mathcal{U}_{[t_0, +\infty)} \times X &\rightarrow \mathbb{R}_+^e \\ \eta(u, x_0) &= \int_{t_0}^{+\infty} \begin{bmatrix} u^T & 0 \\ u^T & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} dt, \quad \boxed{Q \geq 0, R > 0} \end{aligned} \quad (7.3)$$

Assegnati u ed x_0 , x va inteso, al solito, come la soluzione di (7.2) corrispondente ad u ed alla condizione iniziale $x_0 = x(t_0)$. Si noti che, per ogni $t_1 > t_0$, è non negativo e crescente il costo

$$t_1 \int_{t_0}^{t_1} \begin{bmatrix} u^T & 0 \\ u^T & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} dt$$

(per u ed x_0 assegnate), essendo R e Q definita e semidefinita positiva rispettivamente, e quindi esiste il limite

$$\lim_{t_1 \rightarrow +\infty} t_1 \int_{t_0}^{t_1} \begin{bmatrix} u^T & 0 \\ u^T & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} dt = \eta(u, x_0) \quad (7.4)$$

Naturalmente tale limite può essere $+\infty$, e quindi η ha la sua immagine nei reali non negativi "estesi" col simbolo $+\infty$.

Il problema che qui ci proponiamo è quello di minimizzare η al variare di u in $\mathcal{U}_{[t_0, +\infty)}$, una volta che si sia fissato lo stato iniziale $x(t_0) = x_0$.

Osserviamo intanto che le ipotesi fatte su R e Q comportano la risolubilità del problema di minimo su ogni intervallo finito mapossono non essere sufficienti ad assicurare da sole la risolubilità sull'intervallo $[t_0, +\infty)$: può succedere infatti che il limite (7.4) diverga per ogni scelta di u. E'd'altra parte intuibile che la controllabilità di Σ sia sufficiente ad assicurare la risolubilità, in quanto qualsiasi controllo u che porti al valore zero lo stato al tempo $t_2 > t_0$, e sia nullo per tempi successivi vi a t_2 , dà luogo ad un valore finito per l'indice η .

Per provare che questa intuizione è corretta, abbiamo bisogno di alcuni fatti, contenuti nel seguente

Lemma 1 Se la coppia (A,B) è completamente controllabile, l'equazione algebrica di Riccati

$$-Q - A^T K - KA + K R K = 0$$

con $Q \geq 0, R > 0$, ha una soluzione semidefinita positiva che si ottiene dal limite

$$\lim_{t_1 \rightarrow +\infty} \Pi(t_0, 0, t_1) = \Pi_\infty \quad (7.5.1)$$

della soluzione all'equazione differenziale

$$\dot{K} = -Q - A^T K - KA + KBR^{-1}B^T K \quad K(t_1) = 0 \quad (7.6)$$

prova. Abbiamo visto, nel teor. 4 di par. 5, che l'equazione (7.6) è risolubile su ogni intervallo $[t_0, t_1]$, e pertanto risulta

$$x_0^T \Pi(t_0, 0, t_1) x_0 = \min_{u} \int_{t_0}^{t_1} u^T R u + x^T Q x \, d\tau, \quad \forall t_1 \geq t_0$$

$$x(t_0) = x_0$$

Poichè $\Sigma = (A, B, -)$ è contr., esiste un ingresso $\bar{u}$ limitato $(^\circ)$, che porta Σ dallo stato x_0 in t_0 nello stato zero per $\bar{t} > t_0$. Assumendo che $\bar{u}$ sia identicamente nullo sull'intervallo $(\bar{t}, +\infty)$, l'indice $\eta(\bar{u}, x_0)$ assume un valore finito, perchè per $t > \bar{t}$ l'argomento dell'integrale

$$\int_{t_0}^{+\infty} \bar{u}^T(\tau) R \bar{u}(\tau) + \bar{x}^T(\tau) Q \bar{x}(\tau) \, d\tau$$

è identicamente nullo.

Quindi, fissato il vettore $x_0 \in X$, $x_0^T \Pi(t_0, 0, t_1) x_0$ è funzione crescente di t_1 , limitata superiormente da $\eta(\bar{u}, x_0)$, e per il teorema delle funzioni monotone esiste finito il limite:

$$\lim_{t_1 \rightarrow +\infty} x_0^T \Pi(t_0, 0, t_1) x_0$$

Con il solito ragionamento di par. 5, teor. 3, essendo x_0 arbitrario, si dimostra che esiste finita la matrice limite

$$\Pi_\infty \triangleq \lim_{t_1 \rightarrow +\infty} \Pi(t_0, 0, t_1) = \lim_{t_1 \rightarrow +\infty} \Pi(0, 0, t_1) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \Pi(t, 0, 0)$$

La prova delle eguaglianze si ottiene utilizzando la stazionarietà. Passando al limite per $t \rightarrow +\infty$ in

$$\frac{d\Pi(t, 0, 0)}{dt} = -A^T \Pi(t, 0, 0) - \Pi(t, 0, 0)A - Q + \Pi(t, 0, 0)BR^{-1}B^T \Pi(t, 0, 0)$$

($^\circ$) $\bar{u}$ non è univocamente determinato. Comunque, esso dipende da x_0 e non è - in generale - ottimale.

si ottiene

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{d}{dt} \Pi(t, 0, 0) = \text{cost}$$

ed essendo $\lim_{t \rightarrow -\infty} \Pi(t, 0, 0) = \Pi_\infty$, si vede che la costante è lo zero.

Quindi si ha

$$-A^T \Pi_\infty - \Pi_\infty A - Q + \Pi_\infty BR^{-1}B^T \Pi_\infty = 0 \quad (7.7)$$

e risulta

$$x_0^T \Pi_\infty x_0 = \lim_{t_1 \rightarrow +\infty} x_0^T \Pi(0, 0, t_1) x_0 = \lim_{t_1 \rightarrow +\infty} \left(\min_{u} \int_{t_0}^{t_1} u^T R u + x^T Q x \, d\tau \right)_{x_0 \rightarrow x_0} \quad (7.8)$$

Teor. 1 Se il sistema $\Sigma = (A, B, -)$ è controllabile, allora il problema del regolatore ha la soluzione ottima (in forma chiusa)

$$u_t^*(t) = -R^{-1}B^T \Pi_\infty x(t) \quad (7.9)$$

dove Π_∞ è la soluzione di A.R.E. introdotta nel lemma 1. In corrispondenza ad u_t^* si ottiene il costo minimo

$$\eta_{\min} = x_0^T \Pi_\infty x_0 \quad (7.10)$$

prova. Se sostituiamo la (7.9) entro la formula del costo relativa ad un intervallo finito $[t_0, t_1]$, otteniamo

$$\int_{t_0}^{t_1} u_{ot}^T R u_{ot} + x^T Q x \, d\tau = \int_{t_0}^{t_1} x^T (\Pi_\infty BR^{-1}B^T \Pi_\infty + Q) x \, d\tau \quad (7.11)$$

D'altra parte risulta

$$\begin{aligned} x_0^T \Pi_\infty x_0 &= \int_{t_0}^{t_1} x^T \Pi_\infty x + x^T \Pi_\infty^T \dot{x} \, d\tau = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} x^T (A - BR^{-1}B^T \Pi_\infty) \Pi_\infty x + x^T \Pi_\infty^T (A - BR^{-1}B^T \Pi_\infty) x \, d\tau = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} x^T (A \Pi_\infty + \Pi_\infty^T A) x - 2x^T \Pi_\infty^T BR^{-1}B^T \Pi_\infty x \, d\tau \end{aligned} \quad (7.12)$$

Ricordando che Π_∞ risolve A.R.E., in (7.12) $\Pi_\infty B^T \Pi_\infty$ può essere sostituito con $Q + \Pi_\infty A + A^T \Pi_\infty$. Confrontando (7.12) con (7.11) si ha subito:

$$\int_{t_0}^{t_1} u_{ot}^T R u_{ot} + x^T Q x \, d\tau = -x^T(t_1) \Pi_\infty x(t_1) + x^T(t_0) \Pi_\infty x(t_0) \leq x_0^T \Pi_\infty x_0 \quad (7.13)$$

in quanto Π_∞ è chiaramente semidefinita positiva.

Ma è anche

$$\int_{t_0}^{t_1} u_{ot}^T R u_{ot} + x^T Q x \, d\tau \geq x_0^T \Pi(t_0, 0, t_1) x_0, \quad (7.14)$$

cosicché, passando al limite per $t_1 \rightarrow +\infty$ in (7.13) e (7.14),

$$\int_{t_0}^{+\infty} u_{ot}^T R u_{ot} + x^T Q x \, d\tau = x_0^T \Pi_\infty x_0 \quad (7.15)$$

Tenendo conto di (7.8), (7.15) prova l'ottimalità di u_{ot} : se esiste un segnale u per cui fosse

$$\int_{t_0}^{+\infty} u^T R u + x^T Q x < x_0^T \Pi_\infty x_0 = \lim_{t_1 \rightarrow +\infty} x_0^T \Pi(t_0, 0, t_1) x_0,$$

per t_1 abbastanza grande avremmo:

$$\int_{t_0}^{+\infty} u^T R u + x^T Q x < x_0^T \Pi(t_0, 0, t_1) x_0,$$

$$\int_{t_0}^{t_1} u^T R u + x^T Q x < x_0^T \Pi(t_0, 0, t_1) x_0 \quad (7.16)$$

e (7.16) contrasta con il fatto che $x_0^T \Pi(t_0, 0, t_1) x_0$ è il costo minimo sull'intervallo $[t_0, t_1]$. ■

Il controllo ottimo in forma "aperta" si ricava facilmente: infatti da

$$\begin{aligned} u_{ot} &= -R^{-1} B^T \Pi_\infty x \\ \dot{x} &= Ax + Bu_{ot} \end{aligned}$$

si ottiene

$$\dot{x} = (A - BR^{-1} B^T \Pi_\infty) x \quad x(t_0) = x_0 \quad (7.17)$$

L'equazione differenziale lineare (7.17) ha coefficienti costanti e si risolve:

$$x(t) = \exp(A - BR^{-1} B^T \Pi_\infty)(t - t_0) x_0$$

Si perviene infine alla espressione esplicita di u_{ot} :

$$u_{ot}(t) = -R^{-1} B^T \Pi_\infty \exp(A - BR^{-1} B^T \Pi_\infty)(t - t_0) x_0 \quad (7.18)$$

Si noti che, quando lo stato x è accessibile (o stimabile), il regolatore può essere ottenuto con una reazione costante dallo stato all'ingresso del sistema, com'è indicato in fig. 1

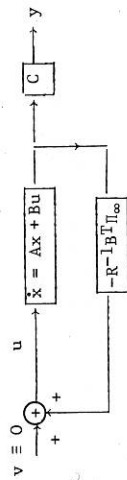


fig. 1

Quindi, mentre per i problemi di ottimizzazione del tipo considerato nel par. 5 la legge del controllo non è in generale costante, salvo casi eccezionali (quando $K(t_1) = K_1$ è soluzione della equazione algebrica di Riccati), per i problemi con intervallo di ottimizzazione infinito la legge del controllo è data dalla matrice costante di "guadagno" stato/ingresso $-R^{-1} B^T \Pi_\infty$.

Esercizio 1. Il teor. 1 può essere provato sotto ipotesi più generali. Si faccia vedere che il problema del regolatore ha soluzione ogniqualvolta esiste finito $\lim_{t \rightarrow +\infty} \Pi(t, 0, 0)$ della equazione differenziale di Riccati.

Esercizio 2. Si provi che la soluzione ottimale trovata in (7.9) è unica.

Esercizio 3. Si consideri il problema del regolatore, come posto in questo paragrafo, con $Q > 0$, $R > 0$.

Se la coppia (A, B) non è controllabile, ma risulta

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

con (A_{11}, B_1) controllabile e $\operatorname{Re} \lambda(A_{22}) < 0$, allora il problema ha ancora soluzione.

Come per l'ottimizzazione su intervallo finito, anche qui i risultati si estendono facilmente al caso in cui η ha l'espressione:

$$\eta = \int_{t_0}^{+\infty} \begin{bmatrix} T & T \\ u^T & x^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & P \\ P^T & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ x \end{bmatrix} dt$$

Basta esprimere η sotto forma

$$\eta = \int_{t_0}^{t_1} \begin{bmatrix} T & T & T & T \\ u & x & P & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & Q - P^T R^{-1} P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u + R^{-1} P x \\ x \end{bmatrix} dt$$

e ricordare che l'evoluzione di stato in $\hat{\Sigma} = (A - BR^{-1}P, B, -, -)$ corrispondente all'ingresso $u + R^{-1}P x$ coincide con l'evoluzione di stato in $\Sigma = (A, B, -, -)$ corrispondente ad u .

Se $Q - P^T R^{-1} P$ è semidefinita positiva, si ha:

$$u_{ot} = -R^{-1} (P + B^T \Pi_{\infty}) x$$

(7.19)

con Π_{∞} soluzione di A.R.E. associata a $\hat{\Sigma}$.

Esempio 1. Un motore in corrente continua è alimentato con corrente di armatura costante I_a . Se i denota la corrente nel circuito di eccitazione, la coppia istantanea sviluppata risulta:

$$T = k i I_a = \bar{k} i$$

dove k è una costante strutturale della macchina e $\bar{k} = k I_a$.

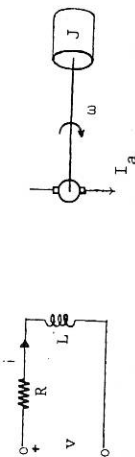


Fig. 2

Le equazioni dinamiche per il sistema di eccitazione e per il sistema meccanico sono allora rispettivamente

$$\frac{di}{dt} = -\frac{R}{L} i + \frac{v}{L}$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\bar{k}}{J} i$$

dove ω e J denotano la velocità angolare e il momento d'inerzia delle masse rotanti.

Consideriamo per il sistema

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R/L & 0 \\ k/J & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix} v$$

l'indice

$$\eta = \int_0^{+\infty} (i^2 + v^2 + \omega^2) dt \quad (7.20)$$

e ci proponiamo di minimizzare η agendo sulla tensione del circuito di eccitazione.

E' intuibile che la scelta di η dipenda fortemente da quali caratteristiche dinamiche del fenomeno intendiamo tenere sotto controllo e dal peso relativo che attribuiamo ad una caratteristica rispetto ad un'altra. Per esempio, assumendo l'indice (7.20) vogliamo frenare la macchina (se l'integrale converge, $\omega \rightarrow 0$ per $t \rightarrow +\infty$) senza spendere eccessiva energia nel circuito di eccitazione, senza utilizzare tensioni di comando molto intense, e nel contempo riducendo la velocità in un tempo convenientemente breve. Naturalmente i termini qualitativi: "eccessiva" energia, tensioni "molto intense", tempo "breve" sono da precisare con riferimento ad un problema specifico, e tale precisazione si concretterà nella scelta dei coefficienti per

$$\int_0^{+\infty} i^2 dt, \quad \int_0^{+\infty} \omega^2 dt, \quad \int_0^{+\infty} v^2 dt.$$

Noi qui abbiamo scelto unitari tutti i coefficienti per non complicare i calcoli.

Posto in forma matriciale, il problema è il seguente:

$$\min_v \int_0^{+\infty} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ i \\ \omega \end{bmatrix} dt$$

cosicchè, nelle notazioni consuete, è $R = 1 > 0$, $Q = I_2 > 0$. Poichè il sistema è controllabile, il problema ammette una soluzione, che possiamo ottenere risolvendo l'equazione algebrica di Riccati

$$0 = - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -R/L & \bar{k}/J \\ 0 & 0 \end{bmatrix} K - K \begin{bmatrix} -R/L & 0 \\ \bar{k}/J & 0 \end{bmatrix} + K \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix} K \quad (7.21)$$

Posto

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{12}^T & K_{22} \end{bmatrix}$$

(7.21) si riduce al seguente sistema di equazioni:

$$\begin{aligned} \frac{k_{12}^2}{L^2} - 1 &= 0 \\ \frac{k_{11}^2}{L^2} + 2k_{11} \frac{R}{L} - 2k_{12} \frac{\bar{k}}{J} - 1 &= 0 \end{aligned} \quad (7.22)$$

$$k_{12} \frac{R}{L} - k_{22} \frac{\bar{k}}{J} + \frac{k_{12} k_{11}}{L^2} = 0$$

che, possono essere risolte sequenzialmente. La soluzione non è unica, ma si può osservare che la matrice risolvibile Π_∞ deve essere definita positiva, perchè qualunque sia lo stato iniziale non nullo il corrispondente $\eta_{\min}$ è positivo e quindi la forma quadratica $[i \ \omega] \Pi_\infty \begin{bmatrix} i \\ \omega \end{bmatrix}$ è definita positiva.

E' immediato verificare che fra le soluzioni di (7.22) soltanto la terna $k_{11} = 1$, $k_{12} = 1$, $k_{22} = 2$ dà una matrice $\Pi_\infty > 0$: quindi

$$\eta_{\min} = \begin{bmatrix} i(0) & \omega(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i(0) \\ \omega(0) \end{bmatrix}$$

$$v_{ot} = -R^{-1} B^T \Pi_\infty \begin{bmatrix} i(0) \\ \omega(0) \end{bmatrix} = -\omega(t) - i(t).$$

8. La stabilità nel problema del regolatore

Riprendiamo ora lo schema di fig. 1 del precedente paragrafo, e lasciamo cadere l'ipotesi che l'ingresso v al sommatore sia un vettore identicamente nullo. E' chiaro che lo schema realizza allora un sistema stazionario lineare con ingresso v e con uscita quella del sistema iniziale $\Sigma = (A, B, C, 0)$ sollecitato dall'ingresso

$$u = v - R^{-1} B^T \Pi_\infty x_0.$$

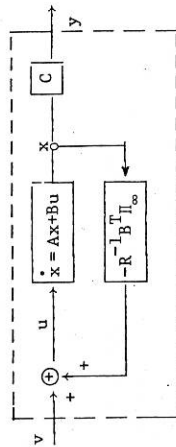


Fig. 1

L'equazione che regola la transizione di stato è ora

$$\dot{x} = (A - BR^{-1} B^T \Pi_\infty) x + Bv \quad (8.1)$$

e, per quanto già visto nel par. I.4, se (A, B) è controllabile, tale rimane $(A - BR^{-1} B^T \Pi_\infty, B)$.

E' intuibile peraltro che, per ovvi motivi, non siamo interessati soltanto alla controllabilità del nuovo sistema, ma anche alla sua stabilità.

L'analisi che svolgeremo concerne la stabilità asintotica del sistema reazionato $\hat{\Sigma} = (A - BR^{-1} B^T \Pi_\infty, B, C, -)$.

Ricordiamo dal corso di Teoria dei Sistemi che un sistema lineare $\Sigma = (A, B, C, D_0)$ è asintoticamente stabile quando l'evoluzione libera dello stato a partire da ogni stato iniziale $x(t_0) = x_0$ soddisfa

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0 \quad (8.2)$$

Ciò è equivalente a richiedere che ogni soluzione dell'equazione di transizione di stato sia, per $u \equiv 0$, infinitesima per $t \rightarrow +\infty$, e si trae in una ben nota condizione sugli autovalori della matrice A : $\Sigma = (A, -, -, -)$ è asintoticamente stabile se e solo se $\text{Re } \lambda(A) < 0$.

In generale, è intuibile che $\hat{\Sigma} = (A - BR^{-1}B^T \Pi_\infty, B, C)$ non debba risultare necessariamente stabile nella totalità delle situazioni che abbiamo esaminato. E' ben vero che lo stato $x(t)$ che introduciamo nel funzionale

$$\min_{u} \int_{t_0}^{+\infty} u^T R u + x^T Q x \, dt$$

è soluzione dell'equazione omogenea $\dot{\hat{x}} = (A - BR^{-1}B^T \Pi_\infty) \hat{x}$ a partire da uno stato generico x_0 , ma il convergere dell'integrale non ci assicura che x sia infinitesima per $t \rightarrow +\infty$, bensì ci assicura l'infinitesimalità del prodotto $x^T Q x$. Poichè Q non si è assunta definita (strettamente) positiva, essa non ha rango pieno, e l'integrale converge anche quando la proiezione di x sullo spazio nullo di Q diverge!

Proveremo qui che se la matrice Q è fattorizzata nella forma (nel par. 3 abbiamo visto che la fattorizzazione è possibile)

$$Q = H^T H \quad (8.3)$$

allora la osservabilità della coppia (A, H) è sufficiente ad assicurare la stabilità di $\hat{\Sigma}$. Poichè di fattorizzazioni (8.3) ne esistono molte, non è inutile mettere in evidenza che la osservabilità della coppia (A, H) non dipende dalla particolare fattorizzazione di Q . Per vederlo, si supponga che risulti

$$Q = H_1^T H_1 = H_2^T H_2$$

e che (A, H_1) sia osservabile ed (A, H_2) non sia osservabile. Allora, per quanto visto nel par. I-5, esiste un vettore $x_0 \neq 0$ tale che $H_2 \exp(At) x_0 = 0 \, \forall t$, ed abbiamo

$$0 = x_0^T \exp(A^T t) H_2^T H_2 \exp(At) x_0 = x_0^T \exp(A^T t) H_1^T H_1 \exp(At) x_0 \quad \forall t$$

e quindi $H_1 \exp(At) x_0 = 0 \, \forall t$ che contraddice la osservabilità di (A, H_1) .

L'assunzione che (A, H) è osservabile assicura che tutte le traiettorie nello spazio degli stati "contribuiscono" alla parte $x^T Q x$ dello integrando del costo. Poichè il costo ha a priori un valore finito, una volta applicata la reazione, è "plausibile" che tutte le traiettorie potenzialmente instabili siano stabilizzate dalla reazione stessa.

La prova della stabilità si fonda sui tre lemmi seguenti, il terzo dei quali è fondamentale nella teoria dei controlli.

Lemma 1 Si consideri il problema del regolatore

$$\min_{u} \int_{t_0}^{+\infty} u^T R u + x^T Q x \, dt \quad R > 0, \quad Q = H^T H \geq 0$$

per il sistema completamente controllabile $\Sigma = (A, B, --)$. Allora condizione necessaria e sufficiente perchè Π_∞ , quale è stata ottenuta in (7.5.1), sia definita positiva è che sia osservabile la coppia (A, H) .

prova. E' ovvio da (7.8) che $x_0^T \Pi_\infty x_0$ non può essere negativa per nessuna scelta di x_0 . Quindi Π_∞ è almeno semidefinita positiva.

Si supponga ora che per qualche $x_0 \neq 0$ risulti $x_0^T \Pi_\infty x_0 = 0$. Abbiamo allora, applicando l'ingresso u_{ot}

$$\int_{t_0}^{+\infty} u_{ot}^T R u_{ot} + x^T H^T H x \, dt = 0 \quad (8.4)$$

che implica, ovviamente, $u_{ot} = 0$ per $t \in [t_0, +\infty)$.

Di conseguenza lo stato del sistema Σ al tempo t , quando è applicato u_{ot} , risulta $\exp(A(t-t_0))x_0$.

Riscriviamo (8.4) :

$$0 = \int_{t_0}^{+\infty} x_0^T \exp(A^T(t-t_0)) H^T H \exp(A(t-t_0)) x_0 \, dt$$

ottenendo

$$0 = H \exp(A(t-t_0)) x_0 = 0 \, \forall t$$

che contraddice l'osservabilità della coppia (A, H) .

Per provare, viceversa, che $\Pi_\infty > 0$ implica la osservabilità di (A, H) , basta supporre per assurdo che esista uno stato $x_0 \neq 0$ i non osservabile, ossia tale che $H \exp(A(t-t_0))x_0 = 0 \forall t$, ed applicare all'ingresso $u(t) = 0$ al sistema Σ che parte dallo stato $x(t_0) = x_0$. Si ottiene così $\eta(0, x_0) = 0$, e poichè l'indice ottimo è limitato inferiormente da zero, segue $x_0^T \Pi_\infty x_0 = 0$, che implica la singolarità di Π_∞ . ■

Lemma 2 Siano $A, N \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\operatorname{Re} \lambda(A) < 0$. Allora l'equazione nella matrice incognita $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$A^T X + XA = -N \quad (8.5)$$

ha una ed una sola soluzione.

prova. Si consideri la matrice K definita ponendo

$$K = \int_0^{+\infty} \exp(A^T t) N \exp(At) dt \quad (8.6)$$

L'integrale converge, perchè l'integrando è somma di termini del tipo $\exp(\lambda_j t)$ con $\operatorname{Re} \lambda_j < 0$.

Derivando l'argomento dell'integrale (8.6), si ha

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\exp(A^T t) N \exp(At)) &= A^T (\exp(A^T t) N \exp(At)) + \\ &+ (\exp(A^T t) N \exp(At)) A \end{aligned}$$

ed integrando fra 0 e $+\infty$

$$-\int_0^{+\infty} \frac{d}{dt} (\exp(A^T t) N \exp(At)) dt = \exp(A^T t) N \exp(At) \Big|_0^{+\infty} = -N = A^T K + KA \quad (8.7)$$

Quindi (8.6) soddisfa l'equazione (8.5).

La soluzione è necessariamente unica.

Se esistessero infatti due soluzioni K_1 e K_2 a (8.5), troveremmo

$$(K_1 - K_2)A + A^T(K_1 - K_2) = 0$$

Poichè (8.5) qualunque sia N ha almeno una soluzione, la mappa lineare

$$\phi: \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}: X \mapsto A^T X + XA$$

è suriettiva, e quindi

$$n^2 = \dim(\ker \phi) + \dim(\operatorname{Im} \phi) = \dim(\ker \phi) + n^2$$

Allora $\ker \phi = \{0\}$ e c'è soltanto la matrice nulla che soddisfa l'equazione $XA + A^T X = 0$.

Perciò (8.7) può valere solo se $K_1 - K_2 = 0$. ■

Lemma 3 (LYAPUNOV). Si supponga che la coppia (A, C) sia completamente osservabile, e che L sia una matrice arbitraria con n righe, n essendo la dimensione di A . Allora $\operatorname{Re} \lambda(A) < 0$ se e solo se esiste una matrice K definita positiva soddisfacente la relazione

$$KA + A^T K = -C^T C - LL^T \quad (8.8)$$

prova. (8.8) $\Rightarrow \operatorname{Re} \lambda(A) < 0$.

Basterà far vedere che l'equazione differenziale

$$\frac{dx}{dt} = Ax \quad x(0) = x_0 \quad (8.9)$$

ha soluzioni infinitesime per $t \rightarrow +\infty$ qualunque sia x_0 .

Si consideri la funzione

$$V(x) = x^T K x \quad (8.10)$$

Quando x è soluzione di (8.9), $V(x)$ diventa una funzione derivabile del tempo, e si ha

$$\frac{dV}{dt} = x^T K x + x^T K \dot{x} = x^T (A^T K + KA)x = -x^T (C^T C + LL^T)x \leq 0 \quad \forall t$$

Poichè V è sempre positiva, eccetto che per $x = 0$, cui corrisponde $V(0) = 0$, e poichè è decrescente quando è valutata per t crescenti lungo la soluzione di (8.9), esiste e non è negativo il limite

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} V(x(t)) = \lim_{t \rightarrow +\infty} x^T(t) K x(t) \quad (8.11)$$

Si consideri ora un arbitrario $\varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned} \int_n^{(n+1)\varepsilon} \frac{dV}{dt} dt &= - \int_n^{(n+1)\varepsilon} x^T(t) (C^T C + LL^T) x(t) dt = \\ &= - \int_n^{(n+1)\varepsilon} x_0^T \exp(A^T t) (C^T C + LL^T) \exp(At) x_0 dt = \\ &= - \int_0^\varepsilon x^T(n\varepsilon) \int_0^\varepsilon \exp(A^T t) \vartheta(C^T C + LL^T) \exp(At) dt x(n\varepsilon) \end{aligned}$$

La osservabilità della coppia (A,C) implica che sia definita positiva la matrice

$$\int_0^\varepsilon \exp(A^T t) C^T C \exp(At) dt$$

e quindi, a maggior ragione, è definita positiva la matrice

$$W \triangleq \int_0^\varepsilon \exp(A^T t) (C^T C + LL^T) \exp(At) dt \quad (8.12)$$

Poiché risulta

$$V(x(n\varepsilon)) = V(x_0) + \sum_{n=0}^{N-1} \int_{n\varepsilon}^{(n+1)\varepsilon} \dot{V} dt$$

si ha anche

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} V(x(t)) = V(x_0) + \sum_{n=0}^{\infty} \int_{n\varepsilon}^{(n+1)\varepsilon} \dot{V} dt \quad (8.13)$$

e l'esistenza del limite (8.11) assicura l'infinitesimalità dei termini della serie (8.13) quando si diverge:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{n\varepsilon}^{(n+1)\varepsilon} \dot{V} dt = 0$$

Ma allora è

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x^T(n\varepsilon) W x(n\varepsilon) = 0$$

e poiché W è definita positiva $x(n\varepsilon) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow +\infty$.
Per l'arbitrarietà di ε

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$$

$$\operatorname{Re} \lambda(A) < 0 \Rightarrow (8.8).$$

Per il lemma 2, la matrice

$$K = \int_0^{+\infty} \exp(A^T t) (C^T C + LL^T) \exp(At) dt$$

soddisfa l'equazione (8.8).

Inoltre

$$K \geq \int_0^{+\infty} \exp(A^T t) C^T C \exp(At) dt > 0$$

per l'osservabilità della coppia (A,C). ■

Teor. 1 Se il sistema lineare $\Sigma = (A, B, -, -)$ è completamente controllabile e se la matrice Q dell'indice n , fattorizzata nella forma $Q = H^T H$, dà luogo ad una coppia (A,H) osservabile, allora il sistema reazionato $(A - BR^{-1}B^T \Pi_\infty, B, -)$ risultante dalla soluzione ad anello chiuso del problema del regolatore è asintoticamente stabile.

prova. La osservabilità della coppia (A,H) implica che Π_∞ è definita positiva, e quindi invertibile.

Inoltre Π_∞ soddisfa la relazione

$$\Pi_\infty (A - BR^{-1}B^T \Pi_\infty) + (A^T - \Pi_\infty B R^{-1} B^T) \Pi_\infty = -\Pi_\infty B R^{-1} B^T \Pi_\infty - H^T H$$

e quindi Π_∞^{-1} soddisfa la relazione

$$(A^T - \Pi_\infty B R^{-1} B^T) \Pi_\infty^{-1} + \Pi_\infty^{-1} (A - \Pi_\infty B R^{-1} B^T) = -B R^{-1} B^T - \Pi_\infty^{-1} H^T H \Pi_\infty^{-1} \quad (8.14)$$

Ora, la controllabilità di (A,B) implica la osservabilità di (A^T, B^T) e quindi l'osservabilità di $(A^T - \Pi_\infty B R^{-1} B^T, B^T)$ e di $(A^T - \Pi_\infty B R^{-1} B^T, H^T B^T)$.

Basta applicare il lemma di Lyapunov per concludere. ■

Esercizio 1. Se la matrice M è def. positiva, esiste una matrice $N > 0$, tale che $N^2 = M$. N si indica con $\sqrt{M}$ [Sugg.: si consideri il problema del regolatore per il sistema $\Sigma = (0, I, -)$, prendendo $\dot{\eta} = \int u^T u + x^T M x$ dt. La soluzione della A.R.E. associata fornisce la radice cercata. L'unicità della radice definita positiva deriva, p. es., dall'unicità della soluzione definita positiva di A.R.E. che stabiliremo in par. 97.

Esercizio 2. Se il sistema $\Sigma = (A, B, -)$ è controllabile e se

$$R > 0, Q = H^T H, H = \begin{bmatrix} 0 & H_2 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$$

allora (A, H) non è osservabile.

Se però (A_{22}, H_2) è osservabile, $\text{Re} \lambda(A_{11}) < 0$ è sufficiente perché $(A - B R^{-1} B^T \Pi_\infty, B, -)$ sia asintoticamente stabile.

9. Soluzioni di (A.R.E.) e soluzione del problema del regolatore

In generale, l'equazione algebrica di Riccati equivale ad un sistema di equazioni algebriche scalari del secondo ordine, e pertanto non ammette un'unica soluzione.

D'altra parte il problema del regolatore, così com'è stato posto nei precedenti paragrafi, ammette un'unica soluzione, cosicché una soltanto delle soluzioni della (A.R.E.) associata è significativa, e tutte le altre vanno scartate.

Una prima - ovvia - possibilità è quella di scegliere nell'insieme $\mathcal{S}$ delle soluzioni di (A.R.E.) quella che si ottiene come limite della soluzione dell'equazione differenziale: in par. 7 si è dimostrato che tale limite fornisce proprio la matrice Π_∞ del problema del regolatore.

Tuttavia di solito si cerca di evitare il passaggio attraverso l'equazione differenziale, che risulterebbe molto oneroso dal punto di vista computazionale.

Quando sono verificate le ipotesi del teor. 2 di par. 8, cioè

$$\begin{aligned} R &> 0 \\ Q &= H^T H \\ (A, B) &\text{ controllabile} \\ (A, H) &\text{ osservabile} \end{aligned} \quad (9.1)$$

la soluzione Π_∞ del problema del regolatore è definita positiva e quindi in $\mathcal{S}$ vanno considerate soltanto le matrici definite positive. Vogliamo qui provare che quando valgono (9.1) $\mathcal{S}$ contiene un'unica soluzione definita positiva.

Lemma 1. Esiste al più una soluzione reale simmetrica $\bar{\Pi}$ di (A.R.E.) tale che sia:

$$\text{Re} \lambda(A - B R^{-1} B^T \bar{\Pi}) < 0 \quad (9.2)$$

prova. Supponiamo esistere due soluzioni $\bar{\Pi}_1 \neq \bar{\Pi}_2$ reali simmetriche di (A.R.E.), per cui sia

$$\text{Re} \lambda(A - B R^{-1} B^T \bar{\Pi}_i) < 0 \quad i = 1, 2$$

Le soluzioni delle equazioni differenziali

$$\frac{dx}{dt} = (A - BR^{-1}B^T \Pi_1)x \quad i = 1, 2 \quad (9.3)$$

sono tutte infinitesime al tendere di t a $+\infty$, per ogni condizione iniziale.

Poichè si è assunto $\Pi_1 \neq \Pi_2$, esiste un vettore x_0 per cui risulta

$$x_0^T \Pi_1 x_0 \neq x_0^T \Pi_2 x_0$$

(la prova è lasciata come esercizio), e non è restrittivo supporre

$$x_0^T (\Pi_1 - \Pi_2) x_0 > 0$$

Indicando ora con $x(t)$ la soluzione di

$$\frac{dx}{dt} = (A - BR^{-1}B^T \Pi_2)x \quad x(0) = x_0 \quad (9.4)$$

si ricava, applicando il lemma 1 di par. 5:

$$x^T (\Pi_1 - \Pi_2) x \Big|_{t_0}^{t_1} = \int_{t_0}^{t_1} x^T \left[(A^T - \Pi_2^T BR^{-1}B^T) (\Pi_1 - \Pi_2) + (\Pi_1 - \Pi_2) (A - BR^{-1}B^T \Pi_2) \right] x dt$$

Tenendo conto che Π_1 e Π_2 risolvono (A.R.E.), si ha:

$$x^T (\Pi_1 - \Pi_2) x \Big|_{t_0}^{t_1} = \int_{t_0}^{t_1} x^T (\Pi_1 - \Pi_2) BR^{-1}B^T (\Pi_1 - \Pi_2) x dt \geq 0$$

Quindi, per ogni $t_1 > t_0$,

$$x^T(t_1) (\Pi_1 - \Pi_2) x(t_1) \geq x_0^T (\Pi_1 - \Pi_2) x_0 > 0 \quad (9.5)$$

che è manifestamente assurda perchè $\lim_{t_1 \rightarrow +\infty} x(t_1) = 0$. ■

Teor. 1 Nelle ipotesi (9.1) la soluzione Π_∞ del problema del regolatore è l'unica soluzione definita positiva di (A.R.E.).

prova. Se $\bar{\Pi} > 0$ è una qualsiasi soluzione definita positiva di A.R.E., si ha:

$$\bar{H}^T \bar{H} + \bar{A}^T \bar{\Pi} + \bar{\Pi} \bar{A} - \bar{\Pi} \bar{B} \bar{R}^{-1} \bar{B}^T \bar{\Pi} = 0$$

$$\bar{\Pi} (A - BR^{-1}B^T \bar{\Pi}) + (A^T - \bar{\Pi} BR^{-1}B^T) \bar{\Pi} = -\bar{H}^T \bar{H} - \bar{\Pi} BR^{-1}B^T \bar{\Pi}$$

Applicando il lemma di Lyapunov, si ottiene subito che ogni soluzione definita positiva di (A.R.E.) soddisfa la relazione

$$\operatorname{Re} \lambda(A - BR^{-1}B^T \bar{\Pi}) < 0$$

Combinando questo risultato col lemma 1, si conclude che, quando valgono le ipotesi (9.1), (A.R.E) ammette una sola soluzione definita positiva, ed essa è necessariamente la soluzione del problema del regolatore Π_∞ . ■