Capitolo 4

Popolazioni malthusiane - III (modello di Leslie - Lewis)

Questo capitolo è dedicato a un modello di popolazione a tempo discreto e con una scala discreta delle età. Si assumerà come ampiezza dell'unità di misura delle di età quella dell'intervallo di tempo che separa due istanti successivi nei quali viene campionata la popolazione (un anno, una settimana, ...). Nel seguito supporremo, per semplicità di linguaggio, che tale intervallo abbia la durata di un anno.
La probabilità di morte e il numero di figlie generate pro capite non dipendono dal particolare istante t in cui la popolazione viene descritta, né dal numero di individui presenti nelle diverse classi di età, ma possono differire da un'età all'altra.
Infine, si suppongono assenti fenomeni di migrazione.

4.1 Classi di età e modello di Leslie-Lewis

In ciascun istante $t = 0, 1, 2, \ldots$ nel quale la valutiamo, partizioniamo la popolazione in classi di età:

- $x_1(t)$ è il numero di individui[1] che all'istante t hanno un'età compresa nell'intervallo $[1, 2)$, cioè che hanno compiuto un anno di età;
- $x_2(t)$ è il numero di individui che all'istante t hanno un'età compresa in $[2, 3)$;
- ...
- $x_n(t)$ è il numero di individui che all'istante t hanno compiuto l'n-esimo anno di età.

Si ipotizza che gli individui dell'ultima classe non raggiungano l'$(n+1)$-esimo anno di età[2]
La popolazione all'istante t è allora rappresentata dal *vettore di popolazione* (privo degli individui di età minore di 1):

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n_+ \qquad t \in \mathbb{Z}$$

[1] $x_i(t)$ sarà chiamata indifferentemente "numerosità della classe i-esima", oppure "classe i-esima", oppure "coorte i-esima"

[2] in alternativa, si può ipotizzare che possano raggiungerla e superarla, non siano più fecondi e quindi non contribuiscano alla nascita delle successive generazioni. In entrambe le ipotesi $x_n(t)$ fornisce la numerosità della classe di età $[n, n+1)$, ma nel secondo caso possono esistere - e si trascurano - individui che hanno raggiunto o superato l'$(n+1)$-esimo anno di età.

e l'obiettivo che ci proponiamo è quello di descriverne l'evoluzione al crescere di t.

Indichiamo con $\mu_i,\ i = 1, \dots, n$ la probabilità che un individuo della classe i-esima al tempo t muoia in $[t, t+1)$ e quindi non appartenga alla classe $(i+1)$-esima al tempo $t+1$. Per le ipotesi fatte risulta $\mu_n = 1$ e si ha

$$x_{i+1}(t+1) = x_i(t) - \mu_i x_i(t) = (1-\mu_i)x_i(t) = \sigma_i x_i(t) \qquad i = 1, 2, \dots, n-1 \tag{4.1}$$

dove si è indicato con $\sigma_i = 1 - \mu_i$ il *coefficiente di sopravvivenza* della classe i-esima, ossia la quota di individui di età i che sopravvive per un anno, raggiungendo l'età $i+1$.
Indichiamo poi con $\nu_i,\ i = 1, 2, \dots, n-1, n$ il numero di figlie nate nell'intervallo unitario ad una femmina di età i. Supponiamo che la riproduzione avvenga in un brevissimo intervallo immediatamente prima del "censimento" attuato al tempo t, per cui all'istante t i nuovi nati sono

$$b(t) = \nu_1 x_1(t) + \cdots + \nu_n x_n(t) \tag{4.2}$$

e al tempo $t+1$, indicando con $\sigma_0 = 1 - \mu_0$ il coefficiente di sopravvivenza dei nuovi nati per un intervallo di ampiezza unitaria,

$$x_1(t+1) = \sigma_0 \sum_{i=1}^{n} \nu_i x_i(t) = \sigma_0 b(t). \tag{4.3}$$

OSSERVAZIONE Con questo approccio (riproduzione immediatamente prima del censimento)

il vettore di popolazione $\mathbf{x}(t)$ non include l'informazione circa i $b(t)$ nuovi nati effettivamente presenti, mentre riporta correttamente i valori delle classi costituite da individui che al tempo t hanno compiuto un anno, due anni, ...
In alternativa, si può supporre che la riproduzione avvenga immediatamente dopo l'istante t in cui si censisce la popolazione

In questo modo all'istante t i nuovi nati $b(t)$ non sono ancora presenti, ma alle classi $1, 2, \dots$ vengono attribuiti individui che stanno per compiere 1 anno, 2 anni, ... , ma non li hanno ancora compiuti.
In entrambi i casi $x_1(t)$ rappresenta la numerosità degli individui la cui età è molto prossima a 1, censiti in un istante t molto vicino (dopo o prima) all'istante in cui la popolazione si riproduce.
L'equazione (4.2) tiene comunque conto dei contributi alle nascite dovuti a tutte le classi di età, poiché si presume che, appena nati, gli individui $b(t)$ di età ≈ 0 non siano ancora in grado di riprodursi.

Riunendo in un'unica equazione vettoriale le equazioni scalari precedentemente introdotte, otteniamo il modello

$$\mathbf{x}(t+1) = \begin{bmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \\ \vdots \\ x_n(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_0\nu_1 & \sigma_0\nu_2 & \dots & \sigma_0\nu_{n-1} & \sigma_0\nu_n \\ \sigma_1 & & & & \\ & \sigma_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \sigma_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} = F\mathbf{x}(t) \tag{4.4}$$

nel quale la matrice $F \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$ è chiamata *matrice di Leslie* o *matrice di proiezione*.

4.2 Parametri del modello

Introduciamo alcuni parametri derivati dai tassi di mortalità e di natalità delle classi, che rappresentano l'equivalente "discreto" delle grandezze considerate nel paragrafo 3.1.

a) **Probabilità di sopravvivenza:** p_i
È la probabilità di vivere almeno fino a transitare nella i-esima classe di età. Abbiamo:

$$\begin{aligned} p_0 &= 1 \\ p_1 &= (1-\mu_0) = p_0\sigma_0 = \sigma_0 \\ p_2 &= (1-\mu_1)\sigma_0 = p_1\sigma_1 = \sigma_0\sigma_1 \\ &\vdots \\ p_n &= (1-\mu_{n-1})p_{n-1} = p_{n-1}\sigma_{n-1} = \prod_{i=0}^{n-1}\sigma_i \\ p_{n+1} &= 0 \end{aligned}$$

Ovviamente σ_i può essere espresso come $\frac{p_{i+1}}{p_i}$.
All'equazione $\frac{dp}{dx} = -\mu(x)p(x)$ del caso continuo corrisponde l'equazione alle differenze

$$p_{i+1} - p_i = p_i\sigma_i - p_i = -p_i(1-\sigma_i) = -\mu_i p_i = \prod_{k=0}^{i}\sigma_k - \prod_{k=0}^{i-1}\sigma_k = \prod_{k=0}^{i-1}(\sigma_k - 1).$$

b) **Distribuzione di età alla morte:** γ_i

La probabilità (alla nascita) di morire all'età i, ossia inell'intervallo $[i, i+1)$ è data da

$$\gamma_i = p_i\mu_i = p_i(1-\sigma_i) = p_i - p_i\sigma_i = p_i - p_{i+1}$$

Si noti che γ_0 coincide con μ_0.
γ_i è una densità discreta di probabilità. Infatti da $\gamma_i = p_i - p_{i+1}$ segue

$$\sum_{i=0}^{n}\gamma_i = (p_0 - p_1) + (p_1 - p_2) + (p_2 - p_3) + \cdots + (p_n - p_{n+1}) = p_0 = 1.$$

c) **Attesa di vita alla nascita:** $\tilde{e}(0)$
E' il valor medio dell'età di morte, valutato al momento della nascita:

$$\begin{aligned} \tilde{e}(0) &= \sum_{i=1}^{n} i\gamma_i \\ &= p_1 - p_2 + 2p_2 - 2p_3 + 3p_3 - 3p_4 + \cdots + (n-1)p_{n-1} - (n-1)p_n + np_n \\ &= p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_n \end{aligned}$$

(si ricordi che $p_{n+1} = 0$). Le formule corrispondono, nel caso continuo, agli integrali $\tilde{e}(0) = \int_0^\infty x\gamma(x)\,dx = \int_0^\infty p(x)\,dx$.

d) **Attesa di vita all'età** i**:** $\tilde{e}(i)$
La probabilità di sopravvivere fino all'età $i+k$ quando si è compiuto l'i-esimo anno è $\frac{p_{i+k}}{p_i}$, mentre la probabilità di morire all'età $i+k$ quando si è vissuti fino all'età i è $\dfrac{\gamma_{i+k}}{p_i}$.
Allora il valor medio della vita residua attesa quando si è raggiunta l'età i è

$$\begin{aligned} \tilde{e}(i) &= \frac{1}{p_i}\sum_{i=1}^{n-1} k\gamma_{i+k} \\ &= \frac{1}{p_i}[(p_i - p_{i+1}) + 2(p_{i+1} - p_{i+2}) + \cdots + (n-i)(p_n - p_{n+1})] \\ &= \frac{1}{p_i}(p_i + p_{i+1} + \cdots + p_n). \end{aligned}$$

Tale parametro corrisponde, nel caso continuo, a $\tilde{e}(x) = \frac{1}{p(x)}\int_x^\infty p(\sigma)\,d\sigma$.

e) **Funzione netta di maternità:** ϕ_i
Il valore ϕ_i della funzione netta di maternità è il numero di figlie che, alla nascita, una femmina si aspetta di generare all'età i. È espressa da

$$\phi_i = p_i \nu_i$$

Riscrivendo ϕ_i nella forma $(\sigma_i \sigma_2 \cdots \sigma_{i-1} \nu_i)\sigma_0$, esso si può anche interpretare come il numero di figlie che una madre di età 1 si aspetta di generare all'età i e che raggiungeranno l'età 1.

f) **Tasso netto di riproduzione:** R_0

$$p_1\nu_1 + \cdots + p_n\nu_n = \sum_{i=0}^{n} p_i\nu_i = R_0 = \sum_{i=0}^{n} \phi_i$$

È la somma del numero di femmine $\nu_i p_i,\ i = 1, 2, \ldots n$ che una femmina genera nelle successive classi di età.

g) **Età media (della madre) alla nascita delle figlie:** T_c
La probabilità di aver compiuto l'età i (ma non l'età $i+1$) alla nascita di una figlia è

$$\frac{\phi_i}{\sum_{i=0}^{n} \phi_i},$$

quindi il valore medio dell'età di una madre alla nascita di una figlia è

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{i\phi_i}{\sum_j \phi_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{i\phi_i\nu_i}{R_0}$$

Come nel caso continuo, T_c viene assunto come una stima della lunghezza media di una generazione.

4.3 Analisi del modello di Leslie

4.3.1 Polinomio caratteristico

Se si assume una nuova base nello spazio di stato prendendo

$$T = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \sigma_1 & & & \\ & & \sigma_1\sigma_2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_{n-1} \end{bmatrix} = \frac{1}{p_1} \begin{bmatrix} p_1 & & & & \\ & p_2 & & & \\ & & p_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & p_n \end{bmatrix}$$

come matrice di cambiamento di base, T induce una similarità su F, che assume la forma

$$\hat{F} = T^{-1}FT = \begin{bmatrix} p_1\nu_1 & p_2\nu_2 & p_3\nu_3 & \cdots & p_n\nu_n \\ 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 & \cdots & \phi_n \\ 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.5}$$

Osservazione Il vettore di popolazione nella nuova base diventa

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = T^{-1}\mathbf{x}(t) = p_1 \begin{bmatrix} p_1^{-1}x_1(t) \\ p_2^{-1}x_2(t) \\ \vdots \\ p_n^{-1}x_n(t) \end{bmatrix}$$

Per comprendere qual è il significato delle componenti del vettore $\hat{\mathbf{x}}$, si noti che dalla relazione

$$\hat{x}_i(t) = p_1 p_i^{-1} x_i(t) = \sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\ldots\sigma_{i-1}^{-1}x_i(t)$$

segue

$$\begin{aligned}
\sigma_{i-1}^{-1} x_i(t) &= x_{i-1}(t-1) \\
\sigma_{i-2}^{-1} x_{i-1}(t) &= x_{i-2}(t-2) \\
&\vdots \\
\sigma_1^{-1} x_2(t-i+2) &= x_1(t-i+1).
\end{aligned}$$

Perciò $\hat{x}_i(t)$ fornisce la numerosità della prima classe di età al tempo $t-i+1$, ossia la numerosità iniziale della coorte alla quale, al tempo t, appartengono gli individui di età i. Risulta quindi

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_1(t-1) \\ x_1(t-2) \\ \vdots \\ x_1(t-n+1) \end{bmatrix} \tag{4.6}$$

e l'equazione di aggiornamento nella nuova base $\hat{\mathbf{x}}(t+1) = \hat{F}\hat{\mathbf{x}}(t)$ trova immediata giustificazione quando si tenga conto di (4.6). Infatti la relazione che ne risulta

$$\hat{\mathbf{x}}(t+1) = \begin{bmatrix} x_1(t+1) \\ x_1(t) \\ x_1(t-1) \\ \vdots \\ x_1(t-n+3) \\ x_1(t-n+2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nu_1 p_1 & \nu_2 p_2 & \nu_3 p_3 & \cdots & \nu_{n-1} p_{n-1} & \nu_n p_n \\ 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_1(t-1) \\ x_1(t-2) \\ \vdots \\ x_1(t-n+2) \\ x_1(t-n+1) \end{bmatrix}$$

è ovvia per quanto riguarda le ultime $n-1$ componenti di $\hat{\mathbf{x}}(t+1)$, mentre per la prima componente

$$x_1(t+1) = \nu_1 p_1 x_1(t) + \nu_2 p_2 x_1(t-1) + \cdots + \nu_n p_n x_1(t-n+1),$$

basta notare che $p_i x_i(t-i+1)$ è il numero degli individui nati al tempo $t-i$ e sopravvissuti fino al tempo t, che al tempo t costituiscono la i-esima classe di età.

Poiché $\hat{F}$ è una matrice compagna, il suo polinomio caratteristico (che coincide con quello di F) è di immediata determinazione:

$$\begin{aligned}
\Delta_{\hat{F}}(z) = \Delta_F(z) &= z^n - \nu_1 p_1 z^{n-1} - \nu_2 p_2 z^{n-2} - \cdots - \nu_n p_n \\
&= z^n - \phi_1 z^{n-1} - \phi_2 z^{n-2} - \cdots - \phi_n
\end{aligned} \tag{4.7}$$

4.3.2 Dinamica asintotica

Nella discussione che segue, supporremo che nella matrice di Leslie esistano almeno due tassi di natalità non nulli e consecutivi, $\nu_i \neq 0$ e $\nu_{i+1} \neq 0$, si verifica facilmente che F è primitiva.

Come conseguenza di tale ipotesi, valgono alcune importanti proprietà:
- l'esistenza di un autovalore (detto "dominante") positivo, semplice e di modulo massimo,
- la positività di tutte le componenti del corrispondente autovettore "dominante",
- l'allineamento asintotico del vettore di popolazione $\mathbf{x}(t)$ con l'autovettore dominante, qualunque sia il vettore iniziale di popolazione $\mathbf{x}(0)$.

Le stesse conseguenze si possono trarre se F è una matrice primitiva, ovvero se, per qualche $h > 0$, tutti gli elementi della matrice F^h sono positivi[3]. Nei paragrafo 6 vedremo anche quali siano le caratteristiche dinamiche asintotiche della popolazione quando la matrice di Leslie sia irriducibile.

[3]si noti che una condizione necessaria perché la matrice di Leslie sia primitiva è che ϕ_n non sia nullo (e perciò la F che stiamo qui considerando può non essere primitiva) e d'altra parte F può essere primitiva anche se non vale la condizione $\phi_i \phi_{i+1} > o$

a) Verifichiamo anzitutto che F ha un *autovalore dominante positivo* λ_0, semplice e maggiore in modulo di ogni altro autovalore.
Per $z \neq 0$, risolvere l'equazione $\Delta_F(z) = 0$ equivale a risolvere l'equazione

$$1 = \frac{\phi_1}{z} + \frac{\phi}{z^2} + \cdots + \frac{\phi_n}{z^n} =: f(z). \tag{4.8}$$

Quando z è reale e positivo, la funzione $f(z)$ assume valori positivi, è strettamente decrescente (la derivata è negativa ovunque) e tende a $+\infty$ quando $z \to 0^+$, mentre tende a 0^+ quando $z \to +\infty$.
Quindi l'equazione $1 = f(z)$ ha un'unica soluzione reale e positiva $z = \lambda_0$, e λ_0 è uno zero del polinomio caratteristico $\Delta_F(z)$, ossia un autovalore di F.

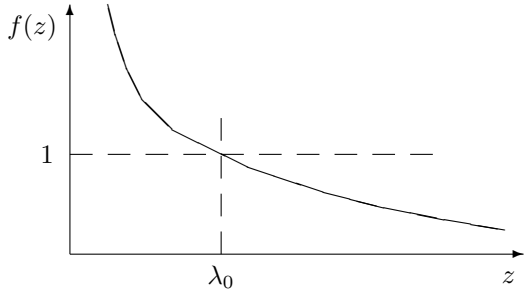


figura 5.3.1

- Esercizio 4.3.1 Mostrare che λ_0 è uno zero semplice di $\Delta_F(z)$

  ♯ *Suggerimento Se lo zero fosse almeno doppio, si avrebbe*

  $$\Delta_F(z) = z^n(1 - f(z)) = (z - \lambda_0)^2 p_{n-2}(z)$$

  con $p_{n-2}(z)$ polinomio di grado $n-2$. La derivata in λ_0 di $\Delta_F(z)$ sarebbe nulla, quindi si annullerebbe in λ_0 la derivata di $f(z)$, in disaccordo col fatto che gli addendi non nulli di $f(z)$ hanno in λ_0 derivata negativa.

Per verificare che ogni altro autovalore λ di F ha modulo minore di λ_0, si ponga $\lambda = re^{-j\theta}$.
L'eguaglianza $\Delta_F(\lambda) = 0$ si può riscrivere come

$$1 = f(re^{-j\theta}) = \phi_1 r^{-1} e^{j\theta} + \phi_2 r^{-2} e^{2j\theta} + \cdots + \phi_n r^{-n} e^{nj\theta}$$

e perch'e sia soddisfatta si deve avere

$$1 = \phi_1 r^{-1} \cos\theta + \phi_2 r^{-2} \cos 2\theta + \cdots + \phi_n r^{-n} \cos n\theta\,, \tag{4.9}$$

che implica

$$1 \leq \phi_1 r^{-1} + \phi_2 r^{-2} + \cdots + \phi_n r^{-n} = f(r) \tag{4.10}$$

Ma f è strettamente decrescente, quindi deve essere $r \leq \lambda_0$, ovvero $|\lambda| \leq \lambda_0$.
Se fosse $r = \lambda_0$ la (4.10) varrebbe come eguaglianza e, sottraendo (4.9) da (4.10), si otterrebbe

$$0 = \phi_1 r^{-1}(1 - \cos\theta) + \phi_2 r^{-2}(1 - \cos 2\theta) + \cdots + \phi_n r^{-n}(1 - \cos n\theta). \tag{4.11}$$

in cui gli addendi sono non negativi e quindi devono essere tutti nulli. Poiché due valori consecuitivi di ϕ sono positivi, per qualche i deve essere

$$\begin{aligned} 1 - \cos i\theta &= 1 - \cos(i+1)\theta = 0 \\ \cos i\theta &= \cos(i+1)\theta = 1 \\ i\theta = 2k\pi & \qquad (i+1)\theta = 2h\pi \\ \theta &= 2(h-k)\pi \\ \lambda &= re^{-j\theta} = \lambda_0 e^{-j2(h-k)} = \lambda_0 \end{aligned}$$

In conclusione, ogni autovalore di F diverso da λ_0 ha modulo minore di λ_0.

b) *L'autovettore dominante* $\mathbf{v}_0$ corrispondente a λ_0 ha componenti $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ che soddisfano l'equazione:

$$F\mathbf{v}_0 = \begin{bmatrix} \sigma_0\nu_1 & \sigma_0\nu_2 & \ldots & \ldots & \sigma_0\nu_n \\ \sigma_1 & & & & \\ & \sigma_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \sigma_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} = \lambda_0 \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}$$

ovvero

$$\sigma_{n-1}\xi_{n-1} = \lambda_0\xi_n, \quad \sigma_{n-2}\xi_{n-2} = \lambda_0\xi_{n-1}, \quad \sigma_{n-3}\xi_{n-3} = \lambda_0\xi_{n-2} \quad \ldots \quad \sigma_1\xi_1 = \lambda_0\xi_2.$$

Poiché un autovettore è definito a meno di una costante moltiplicativa, possiamo scegliere $\xi_n = 1$ ricavando

$$\mathbf{v_0} = \begin{bmatrix} \lambda_0^{n-1}\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\ldots\sigma_{n-1}^{-1} \\ \vdots \\ \lambda_0^2\sigma_{n-2}^{-1}\sigma_{n-1}^{-1} \\ \lambda_0\sigma_{n-1}^{-1} \\ 1 \end{bmatrix}$$

o, moltiplicandololo per $p_n\lambda_0^{-n} = \sigma_0\sigma_1\ldots\sigma_{n-1}\lambda_0^{-n}$,

$$\mathbf{v}_0 = \begin{bmatrix} p_1\lambda_0^{-1} \\ p_2\lambda_0^{-2} \\ p_3\lambda_0^{-3} \\ \vdots \\ p_n\lambda_0^{-n} \end{bmatrix}.$$

o ancora, normalizzandolo rispetto alla somma delle componenti,

$$\mathbf{v}_0 = \frac{1}{\sum_{i=1}^n p_i\lambda_0^{-i}} \begin{bmatrix} p_1\lambda_0^{-1} \\ p_2\lambda_0^{-2} \\ p_3\lambda_0^{-3} \\ \vdots \\ p_n\lambda_0^{-n} \end{bmatrix}. \tag{4.12}$$

(4.12) rappresenta l'autovettore dominante come un vettore stocastico[4] ossia come vettore di distribuzione[5] le cui componenti esprimono le quote dell'intera popolazione che appartengono alle varie classi di età.

c) Verifichiamo, infine, che qualunque sia la popolazione iniziale $\mathbf{x}(0)$, asintoticamente *il vettore di popolazione* $\mathbf{x}(t)$ *si allinea con l'autovettore dominante* $\mathbf{v}_0$. Il risultato è affatto generale, come vedremo nel paragrafo 6, ma ci limitiamo qui a supporre che F sia diagonalizzabile.

Sia $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}$ una base di autovettori relativi agli autovalori $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$, dove, come si è visto, $|\lambda_i| < \lambda_0$ per $i = 1, 2, \ldots, n-1$ e siano $\alpha_i,\ i = 0, 1, \ldots, n-1$ le componenti del vettore di popolazione $\mathbf{x}(0)$ nella nuova base

$$\mathbf{x}(0) = \alpha_0\mathbf{v}_0 + \alpha_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_{n-1}\mathbf{v}_{n-1}$$

[4] un vettore positivo con somma delle componenti pari a 1

[5] si confronti la distribuzione discreta (4.12) con la distribuzione invariante continua del modello di Lotka-Von Foerster : $\pi(x) = \frac{p(x)e^{-rx}}{\int p(x)e^{-rx}\,dx}$

Allora la componente α_0 è positiva[6] e la popolazione al tempo t si può esprimere nella forma

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t) = F^t\mathbf{x}(0) &= \alpha_0 F^t\mathbf{v}_0 + \alpha_1 F^t\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_{n-1}F^t\mathbf{v}_{n-1} \\ &= \alpha_0\lambda_0^t\mathbf{v}_0 + \alpha_1\lambda_1^t\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_{n-1}\lambda_{n-1}^t\mathbf{v}_{n-1} \\ &= \lambda_0^t\left\{\alpha_0\mathbf{v}_0 + \alpha_1\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)^t\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_{n-1}\left(\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_0}\right)^t\mathbf{v}_{n-1}\right\}. \quad (4.13)\end{aligned}$$

Risultando

$$\lim_{t\to\infty}\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_0}\right)^t = 0 \quad \text{per} \quad i = 1, 2, \ldots, n-1$$

il vettore di distribuzione diventa parallelo a $\mathbf{v}_0$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\pi}(t) = \begin{bmatrix}\pi_1(t)\\ \pi_2(t)\\ \vdots \\ \pi_n(t)\end{bmatrix} := \frac{\mathbf{x}(t)}{\sum_i x_i(t)} &= \frac{\lambda_0^t}{\sum_i x_i(t)}\left\{\alpha_0\mathbf{v}_0 + \alpha_1\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)^t\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_{n-1}\left(\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_0}\right)^t\mathbf{v}_{n-1}\right\} \\ &\longrightarrow \frac{1}{N(t)}\lambda_0^t\alpha_0\mathbf{v}_0. \quad (4.14)\end{aligned}$$

Se si prende per $\mathbf{v}_0$ un vettore stocastico, la distribuzione $\boldsymbol{\pi}(t)$ tende proprio a $\mathbf{v}_0$, mentre la dinamica della popolazione totale $\sum_i x_i(t) = N(t)$ è approssimata asintoticamente da una crescita (o decrescita) esponenziale $N(t) \cong \alpha_0\lambda_0^t$ con tasso di crescita λ_0.

4.3.3 Alcuni casi particolari

• Quanto abbiamo ricavato nel paragrafo precedente dipende fortemente dall'ipotesi che ci siano due tassi di natalità consecutivi diversi da zero (o, come vedremo più avanti, dal fatto che F sia una matrice primitiva).
Se tutti i tassi di natalità sono nulli, eccetto l'ultimo, la matrice di Leslie diventa

$$F = \begin{bmatrix} 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & \sigma_0\nu_n \\ \beta_1 & & & & & \\ & \beta_2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \beta_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

con polinomio caratteristico

$$\Delta_F(z) = z^n - \phi_n, \quad (\phi_n = p_n\nu_n).$$

In questo caso si ha $\lambda_0 = \sqrt[n]{\phi_n}$, ma λ_0 non è dominante perché gli altri autovalori sono $\lambda_k = \lambda_0 e^{j\frac{k}{2\pi n}}$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$.
Per il teorema di Cayley-Hamilton si ha $F^n = \phi_n I$ quindi, per ogni $t \geq 0$,

$$\mathbf{x}(t+n) = F^{t+n}\mathbf{x}(0) = F^n F^t\mathbf{x}(0) = F^n\mathbf{x}(t) = \phi_n\mathbf{x}(t).$$

É chiaro che se

$$\mathbf{x}(0), \quad \mathbf{x}(1) = F\mathbf{x}(0), \quad \ldots, \mathbf{x}(n-1) = F^{n-1}\mathbf{x}(0)$$

[6] per la dimostrazione si veda il paragrafo 4.6

sono i vettori di popolazione nei primi n istanti di rilevazione, nei successivi avremo

$$\begin{array}{cccc} \mathbf{x}(n) = \phi_n \mathbf{x}(0) & \mathbf{x}(n+1) = \phi_n \mathbf{x}(1) & \dots & \mathbf{x}(2n-1) = \phi_n \mathbf{x}(n-1) \\ \mathbf{x}(2n) = \phi_n^2 \mathbf{x}(0), & \mathbf{x}(2n+1) = \phi_n^2 \mathbf{x}(1) & \dots & \mathbf{x}(3n-1) = \phi_n^2 \mathbf{x}(n-1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

In altri termini, il comportamento della popolazione è "pseudoperiodico" e una crescita geometrica con tasso ϕ_n può essere rilevata campionando i valori di popolazione ogni n istanti. Vedremo nel seguito come ogni matrice F irriducibile induca nella popolazione un comportamento asintoticamente pseudoperiodico; in (4.15) la matrice è un caso molto particolare di matrice irriducibile, e la pseudoperiodicità si instaura fino dall'istante iniziale.

•• Quando si modella una popolazione bisessuata con rapporto numerico unitario tra i sessi, è identica la distribuzione di età nei due sessi e nel modello di Leslie non è necessario trattarli separatamente. Se l'ipotesi di rapporto unitario non vale, è stato proposto un modello (Williamson 1959, riportato da Piélou) che può ancora essere visto come una modesta modifica del modello di Leslie:

1. Il vettore di popolazione al tempo t ha dimensione $2n$:

$$\begin{bmatrix} f_1(t) \\ m_1(t) \\ f_2(t) \\ m_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \\ m_n(t) \end{bmatrix}$$

   dove con f_i e con m_i si indicano rispettivamente le numerosità delle femmine e dei maschi nelle classi di età $i = 1, 2, \dots, n$.

2. Si ipotizza che il numero di maschi sia sempre sufficiente per garantire i tassi di fertilità delle femmine.

3. Si indicano con $\nu_i^{(f)}$ e $\nu_i^{(m)}$ i nati, femmine e maschi, a una femmina nella i-esima classe di età e sopravvissuti fino all'inizio dell'intervallo successivo.

4. Si indicano con $\sigma_i^{(f)}$ e $\sigma_i^{(m)}$ i tassi di sopravvivenza di femmine e maschi nell'i-esima classe di età.

ottenendo

$$\begin{bmatrix} f_1(t+1) \\ m_1(t+1) \\ f_2(t+1) \\ m_2(t+1) \\ \vdots \\ \vdots \\ f_n(t+1) \\ m_n(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_0^{(f)}\nu_1^{(f)} & 0 & \sigma_0^{(f)}\nu_2^{(f)} & 0 & \dots & \dots & \sigma_0^{(f)}\nu_n^{(f)} & 0 \\ \sigma_0^{(m)}\nu_1^{(m)} & 0 & \sigma_0^{(m)}\nu_2^{(m)} & 0 & \dots & \dots & \sigma_0^{(m)}\nu_n^{(m)} & 0 \\ \sigma_1^{(f)} & & & & & & & \\ & \sigma_1^{(m)} & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & \ddots & & & & \\ & & & & \sigma_{n-1}^{(f)} & & 0 & 0 \\ & & & & & \sigma_{n-1}^{(m)} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(t) \\ m_1(t) \\ f_2(t) \\ m_2(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ f_n(t) \\ m_n(t) \end{bmatrix}$$

4.4 Modello a classi di crescita

Quando si studia una popolazione di piante, in genere è difficile determinarne l'età prima dell'abbattimento. Altre grandezze correlate con l'età, quali il diametro di un albero o la

sua biomassa, possono essere valutate più facilmente nel corso della sua vita e dal punto di vista economico in generale sono più interessanti.
Il modello che considereremo in questo paragrafo e che assume come variabili di stato le "classi di crescita", anziché le classi di età, si basa sulle ipotesi seguenti:

1. alla classe 1 appartengono le piante di dimensione più piccola, e alle classi successive piante di dimensioni via via crescenti;

2. con il trascorrere del tempo le piante transitano attraverso classi di indice crescente (non si considera l'eventualità che una pianta possa ridurre le sue dimensioni).

3. nell'unità di tempo, una pianta può transitare alla classe immediatamente successiva, oppure rimanere nella classe a cui appartiene, ma non è contemplato il caso che, nell'unità di tempo, una pianta compia il passaggio alle altre classi superiori.

Se $x_i(t)\,,\ i = 1, \ldots, n-1$ denota il numero di piante che all'istante t appartengono alla classe i-esima, indichiamo con

- σ_i il tasso di sopravvivenza nella classe i, ossia la frazione di individui che all'inizio dell'intervallo di tempo appartengono alla classe i e che, essendo sopravvissuti durante tutto l'intervallo, risultano in vita all'inizio dell'intervallo successivo;

- c_i, con $0 < c_i \leq 1$ la frazione dei sopravvissuti della classe i-esima che appartengono alla classe i all'inizio dell'intervallo e che transitano nella classe $i+1$, appartenendovi all'inizio dell'intervallo successivo.

L'equazione di aggiornamento è allora, per $i = 1, \ldots, n-1$

$$x_{i+1}(t+1) = c_i\sigma_i x_i(t) + (1 - c_{i+1})\sigma_{i+1}x_{i+1}(t).$$

Per quanto riguarda la classe n-esima, che comprende tutti gli alberi di dimensione massima, da essa un albero esce solo per morte naturale o per taglio:

$$x_n(t+1) = c_{n-1}\sigma_{n-1}x_{n-1}(t) + \sigma_n x_n(t) \quad (c_n = 0).$$

Infine la classe iniziale x_1 comprende al tempo $t+1$

- gli individui che al tempo t appartengono alla classe $x_1(t)$ e sopravvivono fino a $t+1$ senza transitare nella classe di taglia successiva, ovvero $\sigma_1(1-c_1)x_1(t)$;

- i nuovi nati al tempo t, ai quali le varie classi di crescita contribuiscono con tassi pro capite $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$: la quantità $\nu_i x_i(t)$ comprende gli individui generati in $[t, t+1)$ dalla i-esima classe di crescita e che sopravvivono[7] fino all'istante $t+1$.

Complessivamente

$$x_1(t+1) = [\sigma_1(1-c_1) + \nu_1]x_1(t) + \nu_2 x_2(t) + \cdots + \nu_n x_n(t)$$

Il modello lineare $\mathbf{x}(t+1) = F\mathbf{x}(t)$ assume allora la forma

$$\begin{bmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \\ x_3(t+1) \\ \\ \vdots \\ \\ x_n(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-c_1)\sigma_1 + \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 & \cdots & \nu_n \\ c_1\sigma_1 & (1-c_2)\sigma_2 & & & \\ & c_2\sigma_2 & (1-c_3)\sigma_3 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & c_{n-1}\sigma_{n-1} & \sigma_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ \\ \vdots \\ \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

[7] per semplicità, il coefficiente σ_0 è qui riassorbito nei tassi di natalità ν_i

A differenza del modello di Leslie, la diagonale di F può contenere elementi positivi oltre il primo: quando un'unità di tempo è trascorsa, una pianta può mantenere invariata la classe di crescita (ovviamente non la classe di età!). Inoltre i tassi di sopravvivenza σ_i, di crescita c_i e di natalità ν_i sono riferiti alle classi di crescita, non a quelle di età.

La matrice F può riscriversi come combinazione di tre matrici, ciascuna contenente i parametri che caratterizzano i tre fenomeni fondamentali della crescita, della sopravvivenza e della rigenerazione:

$$F = \underbrace{\begin{bmatrix} 1-c_1 & & & & \\ c_1 & 1-c_2 & & & \\ & c_2 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & c_{n-1} & 1 \end{bmatrix}}_{\textit{matrice di crescita}} \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_n \end{bmatrix}}_{\textit{matrice di sopravvivenza}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_1 & \nu_2 & \dots & \dots & \nu_n \end{bmatrix}}_{\textit{matrice di rigenerazione}}$$

4.5 Matrici non negative e sistemi positivi

Il modello di Leslie costituisce un esempio molto significativo di un sistema positivo.
Chiamiamo "positivi" i sistemi dinamici nei quali le variabili di stato, così come quelle di ingresso e di uscita, se presenti, possono assumere soltanto valori non negativi. I sistemi lineari positivi a tempo discreto sono descritti da matrici non negative e, in particolare, l'aggiornamento del loro vettore di stato in evoluzione libera è indotto da matrici quadrate non negative.
Si intuisce perciò che lo studio delle proprietà[8] delle matrici quadrate non negative consenta di trarre interessanti conclusioni circa l'evoluzione di popolazioni la cui dinamica possa essere rappresentata da un modello lineare discreto.

4.5.1 Definizioni e notazioni

Nel seguito ricorreremo ad una nomenclatura apposita per matrici e vettori i cui elementi siano non negativi. Se $M = [m_{ij}] \in \mathbb{R}_+^{p\times m}$, porremo

- $M \gg 0$ se $m_{ij} > 0$ per ogni i, j: in questo caso diremo che la matrice è *strettamente positiva*;
- $M > 0$ se $m_{ij} \geq 0$ per ogni i, j e almeno un elemento della matrice è positivo: in questo caso la matrice M è *positiva*;
- $M \geq 0$ se $m_{ij} \geq 0$ per ogni i, j, senza escludere il caso che possa aversi $M = 0$: la matrice M è in questo caso *non negativa*.

Se M ed N sono matrici (in particolare vettori) di eguali dimensioni, porremo $M \gg N$, oppure $M > N$, oppure $M \geq N$, a seconda che $M - N$ sia strettamente positiva, positiva o non negativa.
Se F è una matrice in $\mathbb{R}_+^{n\times n}$, il ricorso a trasformazioni di similarità non conserva in generale il suo carattere non negativo La classe delle trasformazioni che possono applicarsi a F per indagarne la struttura è perciò molto meno generale del gruppo di similarità e include (ma non coincide con) la classe delle trasformazioni indotte da matrici di permutazione.
Alla permutazione

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_{n-1} & i_n \end{pmatrix}$$

si può associare la *matrice di permutazione*

$$\Pi_\sigma := [\mathbf{e}_{i_1}\mathbf{e}_{i_2}\dots\mathbf{e}_{i_n}], \quad \mathbf{e}_i \; i-\text{esimo vettore della base canonica di } \mathbb{R}^n,$$

che trasforma la base "vecchia" $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ nella base "nuova"

$$(\mathbf{v}_{i_1}, \mathbf{v}_{i_2}, \dots, \mathbf{v}_{i_n}) = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)\Pi_\sigma..$$

Il vettore rappresentato nella base vecchia dalla colonna $\mathbf{x} = \begin{bmatrix}\xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_n\end{bmatrix}^T$ è rappresentato nella base nuova (o "permutata") dalla colonna

$$\Pi_\sigma^{-1}\begin{bmatrix}\xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_n\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}\xi_{i_1} & \xi_{i_2} & \cdots & \xi_{i_n}\end{bmatrix}^T.$$

[8] per informazioni più dettagliate, per le dimostrazioni dei teoremi e per alcuni approfondimenti si rinvia ai capitoli 10-12 degli Appunti di Teoria dei Sistemi, che contengono anche una bibliografia sull'argomento

Analogamente, la trasformazione lineare rappresentata nella base $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ dalla matrice $F = [f_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$, nella base permutata è rappresentata dalla matrice

$$\Pi_\sigma^T F \Pi_\sigma = \begin{bmatrix} f_{i_1,i_1} & f_{i_1,i_2} & \cdots & f_{i_1,i_n} \\ f_{i_2,i_1} & f_{i_2,i_2} & \cdots & f_{i_2,i_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{i_n,i_1} & f_{i_n,1_2} & \cdots & f_{i_n,i_n} \end{bmatrix}$$

ottenuta applicando la medesima permutazione σ alle colonne e alle righe di F.

Due matrici che differiscono per una similarità indotta da una matrice di permutazione (e quindi per una medesima permutazione operata sulle righe e sulle colonne) si dicono *cogredienti*. La cogredienza preserva le proprietà di non negatività, nonché il numero e il valore delle componenti positive di righe o colonne che si corrispondono nella permutazione.

Accenniamo infine alle *matrici monomie* (dette anche matrici di permutazione generalizzate), che si ottengono dalle matrici di permutazione moltiplicandole (a destra o a sinistra) per matrici diagonali positive non singolari. Le similarità indotte da matrici monomie corrispondono a permutazioni dei vettori di base accompagnate dalla moltiplicazione di ciascuno di essi per una costante positiva, quindi ad un riordino delle variabili di stato e ad un cambiamento delle unità di misura utilizzate per determinarne i valori. Il gruppo delle matrici monomie è il più grande che preserva per similarità la non negatività delle matrici.

4.5.2 Proprietà combinatorie

Alcune proprietà dei sistemi positivi dipendono soltanto dal fatto che gli elementi presenti nelle varie posizioni delle matrici siano o non siano diversi da zero, e non dai particolari valori assunti dagli elementi positivi. Tali proprietà sono dette *combinatorie*.

Definizione 4.5.1 Una matrice F in $\mathbb{R}_+^{n\times n}$ si dice

- **primitiva** se esiste un intero $h > 0$ per cui risulta $F^h \gg 0$, ovvero se $[F^h]_{rs} > 0, \ \forall r, s \in \{1, 2, \ldots, n\}$;
- **irriducibile** se in corrispondenza ad ogni $r, s \in \{1, 2, \ldots, n\}$ esiste un esponente h (che dipende in genere da r ed s) per cui risulta $[F^h]_{rs} > 0$;
- **riducibile** se esistono r ed s tali che, per ogni $h > 0$, in F^h si abbia $[F^h]_{rs} = 0, \ \forall h \geq 0$.

Le matrici quadrate strettamente positive sono primitive, le primitive sono irriducibili e l'insieme delle matrici riducibili complementa quello delle matrici irriducibili. D'altra parte

$$F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

sono primitiva ma non strettamente positiva la prima e irriducibile ma non primitiva la seconda.
Una matrice quadrata F con una riga o una colonna nulla è sempre riducibile, poiché la riga o la colonna rimangono nulle in ogni potenza positiva della matrice.

La seguente proposizione riporta alcune caratterizzazioni della irriducibilità.

Proposizione 4.5.2 Sia $F \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$ con $n \geq 2$. Le seguenti condizioni sono equivalenti :

1) F è irriducibile;
2) non esiste alcuna matrice di permutazione Π per cui si abbia
$$\bar{F} = \Pi^T F \Pi = \begin{bmatrix} \bar{F}_{11} & 0 \\ \bar{F}_{21} & \bar{F}_{22} \end{bmatrix}$$
dove $\bar{F}_{11}$ e $\bar{F}_{22}$ sono sottomatrici quadrate non vuote;
3) la matrice $(I + F + \cdots + F^{n-1})$ è strettamente positiva.

Il ricorso a trasformazioni di cogredienza consente di approfondire lo studio delle matrici riducibili:

Proposizione 4.5.3 Sia $F \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$ una matrice non negativa riducibile di dimensione $n > 1$. Esiste allora una matrice di permutazione Π che per cogredienza porta la matrice F nella seguente *forma normale*

$$\bar{F} = \Pi^T F T = \left[\begin{array}{cccc|ccc} \bar{F}_{1,1} & & & & & & \\ 0 & \bar{F}_{2,2} & & & & & \\ & & \ddots & & & \mathrm{O} & \\ 0 & \cdots & & \bar{F}_{h,h} & & & \\ 0 & 0 & \cdots & & & & \\ \hline & & & & \bar{F}_{h+1,h+1} & & \\ \star & \star & \cdots & \star & & & \\ \star & \star & \cdots & \star & \star & \ddots & \\ \star & \star & \cdots & \star & \star & \star & \bar{F}_{k,k} \end{array}\right] \tag{4.16}$$

in cui k è maggiore di 1 e ciascun blocco diagonale $\bar{F}_{i,i},\ i = 1, 2, \ldots, k$ è una matrice irriducibile, o la matrice nulla di dimensione 1 per 1.
Inoltre, se risulta $h < k$, in ciascuna riga a blocchi successiva alla h-esima uno almeno dei blocchi fuori diagonale e indicati con $\star$ è una matrice positiva[9]. I blocchi $\bar{F}_{i,i},\ \ i = 1, 2, \ldots, h$, sono detti *blocchi isolati*.

4.5.3 Proprietà spettrali

Molte proprietà spettrali di una matrice non negativa dipendono dalla sua struttura "combinatoria". Nelle proposizioni a seguire vedremo come esse si modifichino, indebolendosi, quando si passa dalla classe delle matrici primitive a quella più ampia delle matrici irriducibili e infine a quella delle matrici non negative generiche.

Proposizione 4.5.4 Se $F \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$ è una matrice primitiva, allora

i) [Autovettore e autovalore strettamente positivi][10] esistono un numero reale $\lambda_0 > 0$ e un vettore $\mathbf{v}_0 \gg \mathbf{0}$,
$$F\mathbf{v}_0 = \lambda_0\mathbf{v}_0;$$

ii) [Massimalità di λ_0] per ogni altro autovalore $\lambda \in \Lambda(F)$ si ha $|\lambda| < \lambda_0$;

iii) [Spettro periferico] λ_0 è radice semplice del polinomio caratteristico di F, ossia è un autovalore con molteplicità algebrica 1;

iv) [Unicità dell'autovettore positivo e base di Jordan] $\mathbf{v}_0$ è, a meno di un fattore di proporzionalità positivo, l'unico autovettore positivo della matrice F. Rispetto alla base di Jordan, ogni vettore $\mathbf{x} > \mathbf{0}$ ha componente positiva su $\mathbf{v}_0$;

v) [Monotonicità dell'autovalore dominante] Se $\bar{F}$ è maggiore di F, ossia $\bar{F} - F > 0$, il corrispondente autovalore positivo massimale $\bar{\lambda}_0$ soddisfa la diseguaglianza $\bar{\lambda}_0 > \lambda_0$.

Nel caso di matrici irriducibili, l'enunciato è più articolato: lo spettro "periferico", ovvero l'insieme degli autovalori aventi modulo eguale al raggio spettrale, può non contenere un solo elemento, ma ha una configurazione assai particolare, come assai particolare è la struttura degli autovettori corrispondenti agli autovalori periferici, secondo quanto sarà precisato nella successiva proposizione 4.5.6

Proposizione 4.5.5 Se $F \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$ è una matrice irriducibile, allora

i) [Autovettore e autovalore strettamente positivi][11] esistono un numero reale $\lambda_0 > 0$ e un vettore $\mathbf{v}_0 \gg \mathbf{0}$ tali che
$$F\mathbf{v}_0 = \lambda_0\mathbf{v}_0;$$

ii) [Massimalità di λ_0] per ogni altro autovalore $\lambda \in \Lambda(F)$ si ha $|\lambda| \leq \lambda_0$;

iii) [Spettro periferico e struttura generale dello spettro] ogni autovalore λ con $|\lambda| = \lambda_0$ è radice semplice del polinomio caratteristico; inoltre esiste un intero positivo η, detto "indice di imprimitività di F", per cui

- gli autovalori a modulo λ_0 sono tutti semplici e sono i numeri complessi dati da
$$\lambda_0 e^{j\frac{2\pi k}{\eta}}, \quad k = 0, 1, \ldots, \eta - 1\ ,$$

- l'intero spettro di F è invariante (molteplicità incluse) rispetto alla moltiplicazione per $e^{j\frac{2\pi}{\eta}}$;

- la matrice irriducibile F è primitiva se e solo se il suo indice di imprimitività η vale 1;

iv) [Unicità dell'autovettore positivo e base di Jordan] $\mathbf{v}_0$ è, a meno di un fattore di proporzionalità positivo, l'unico autovettore positivo della matrice F. Rispetto alla base di Jordan, ogni vettore $\mathbf{x} > \mathbf{0}$ ha componente positiva su $\mathbf{v}_0$;

v) [Monotonicità dell'autovalore dominante] Se $\bar{F}$ è maggiore di F, ovvero $\bar{F} - F > 0$, il corrispondente autovalore positivo $\bar{\lambda}_0$ soddisfa la diseguaglianza $\bar{\lambda}_0 > \lambda_0$.

Proposizione 4.5.6 Se $F \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$ è irriducibile, sia
$$\det(zI - F) = z^n + c_{n_{k-1}} z^{n_{k-1}} + c_{n_{k-2}} z^{n_{k-2}} + \cdots + c_{n_1} z^{n_1} + c_{n_0} z^{n_0}$$

[9] e quindi non nulla.
[10] detti autovettore e autovalore di Perron
[11] detti anch'essi autovettore e autovalore di Perron

il suo polinomio caratteristico, con $n = n_k > n_{k-1} > \cdots > n_2 > n_1 > n_0$.
Allora coincidono il numero degli autovalori periferici (ossia l'indice di imprimitività η) e il massimo comune divisore delle differenze di grado $n_i - n_{i-1}$

$$\eta = \text{MCD}\{n_1 - n_0 \ , \ n_2 - n_1 \ , \ \dots \ , \ n_{k-1} - n_{k-2} \ , \ n_k - n_{k-1}\}.$$

Quando per una matrice non negativa vien meno la condizione di irriducibilità, vale la seguente

Proposizione 4.5.7 Se $F \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$ è non negativa,

i) [Autovalore massimale non negativo, con autovettore positivo] esistono un numero reale $\lambda_0 \geq 0$ e un vettore $\mathbf{v}_0 > \mathbf{0}$ tali che $F\mathbf{v}_0 = \lambda_0\mathbf{v}_0$;

ii) [Struttura generale dello spettro] per ogni altro autovalore $\lambda \in \Lambda(F)$ si ha $|\lambda| \leq \lambda_0$;

iii) [Spettro periferico] esistono interi $\eta_1, \dots, \eta_g,\ g \leq n$ e radici dell'unità $\theta_1 = e^{j\frac{2\pi}{\eta_1}}, \theta_2 = e^{j\frac{2\pi}{\eta_2}}, \dots \theta_g = e^{j\frac{2\pi}{\eta_g}}$ per cui gli autovalori periferici (cioè a modulo λ_0) sono i numeri complessi

$$\lambda_0\theta_1^{\nu_1},\ \nu_1 = 0, 1, \dots, \eta_1 - 1; \quad \lambda_0\theta_2^{\nu_2},\ \nu_2 = 0, 1, \dots, \eta_2 - 1; \quad \dots \quad ; \lambda_0\theta_g^{\nu_g},\ \ \nu_g = 0, 1, \dots, \eta_g - 1$$

iv) [Quando esiste un autovettore massimale strettamente positivo?] l'autospazio U_{λ_0}, corrispondente all'autovalore massimale λ_0, comprende un autovettore $\mathbf{v}_0$ strettamente positivo se e solo se, nella forma normale (4.16), λ_0 è autovalore di tutti i blocchi isolati $\bar{F}_{i,i},\ i = 1, 2, \dots, h$, ma non è autovalore degli altri blocchi diagonali $\bar{F}_{i,i},\ i > h$;

v) [Monotonicità dell'autovalore massimale] se $\bar{F}$ è maggiore di F, ovvero $\bar{F} - F > 0$, i corrispondenti autovalori massimali non negativi $\bar{\lambda}_0$ e λ_0 soddisfano la diseguaglianza $\bar{\lambda}_0 \geq \lambda_0$.

L'autovalore massimale λ_0 di una matrice non negativa F è essenziale per verificare la stabilità asintotica del sistema positivo associato. Esso può essere stimato, e in taluni casi determinato con esattezza, a partire dalle somme degli elementi di riga o di colonna.

Proposizione 4.5.8 [Somme di riga o di colonna e autovalore massimale] Se $F = [f_{ij}] \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$ e se

$$c_j = \sum_{i=1}^{n} f_{ij},\ j = 1, 2, \dots n \quad \text{e} \quad r_i = \sum_{j=1}^{n} f_{ij},\ i = 1, 2, \dots n$$

sono le somme degli elementi che costituiscono rispettivamente la colonna j-esima e la riga i-esima di F, allora l'autovalore massimale non negativo λ_0 soddisfa le diseguaglianze

$$\min_j c_j \leq \lambda_0 \leq \max_j c_j \ ; \qquad \min_i r_i \leq \lambda_0 \leq \max_i r_i \tag{4.17}$$

Prova Non è restrittivo supporre che l'autovettore

$$\mathbf{v}_0 = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} > \mathbf{0}$$

corrispondente all'autovalore λ_0 sia stocastico, ovvero soddisfi $\sum_{i=1}^{n} \xi_i = 1$. Allora da

$$\begin{array}{rcl} f_{11}\xi_1 + f_{12}\xi_2 + \cdots + f_{1n}\xi_n & = & \lambda_0\xi_1 \\ f_{21}\xi_1 + f_{22}\xi_2 + \cdots + f_{2n}\xi_n & = & \lambda_0\xi_2 \\ \cdots\cdots & & \cdots \\ f_{n1}\xi_1 + f_{n2}\xi_2 + \cdots + f_{nn}\xi_n & = & \lambda_0\xi_n \end{array}$$

sommando per colonne si ottiene

$$\sum_{i=1}^{n} f_{i1}\xi_1 + \sum_{i=1}^{n} f_{i2}\xi_2 + \cdots + \sum_{i=1}^{n} f_{in}\xi_n = c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \cdots + c_n\xi_n = \lambda_0 \sum_{j=1}^{n} \xi_j = \lambda_0 \tag{4.18}$$

Dalle diseguaglianze

$$\min_j c_j[\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n] \leq c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \cdots + c_n\xi_n \leq \max_j c_j[\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n]$$

tenendo conto di (4.18) e del fatto che $\mathbf{v}_0$ è stocastico, segue

$$\min_j c_j \leq \lambda_0 \leq \max_j c_j \ .$$

Analogamente, ragionando sull'autovettore sinistro (o considerando la matrice F^T), si perviene a $\min_i r_i \leq \lambda_0 \leq \max_i r_i$. □

Esempio 4.5.1 Nel modello di Leslie la matrice $\hat{F}$ in (4.5) ha tutte le righe a somma unitaria, eccetto la prima che ha per somma $\sum_{i=1}^{n} \phi_i$, ossia il tasso medio di riproduzione R_0. Quindi la condizione $\lambda_0 > 1$ può essere soddisfatta solo se il tasso netto di riproduzione R è maggiore di 1.

- Esercizio 4.5.1 Nell'esempio precedente, si verifichi che $R_0 > 1$ è anche condizione sufficiente per avere $\lambda_0 > 1$.

  ♯ *Suggerimento: se $\phi_n > 0$, $\hat{F}$ è irriducibile. Si riduca allora ϕ_n di una quantità $\epsilon > 0$ così piccola da mantenere $R_0 > 1$ e $\phi_n - \epsilon > 0$ La nuova matrice è ancora irriducibile e per essa l'autovalore dominante è maggiore o eguale a 1. Si applichi allora la proprietà (v) della proposizione 4.5.5.*
  Se $\phi_n = 0$ e ϕ_k è l'ultimo valore positivo della funzione netta di maternità, si partizioni $\hat{F}$ e se ne consideri il sottoblocco $\hat{F}_{11}$ di dimensione $k \times k$.

- Esercizio 4.5.2 (i) La stima (4.17) dell'autovalore massimale può essere raffinata:

$$\max\{\min_j c_j, \min_i r_i\} \leq \lambda_0 \leq \min\{\max_j c_j, \max_i r_i\}$$

  (ii) In una matrice non negativa risulta $\max_i r_i \geq \min_j c_j$.
  ♯ *Suggerimento: si noti che $(r_1 + r_2 + \cdots + r_n) \leq n \max_i r_i$ e che $n \min_j c_j \leq (c_1 + c_2 + \cdots + c_n)$.*
  (iii) La diseguaglianza in (ii) vale per anche per matrici cui elementi hanno segno arbitrario?

4.6 Considerazioni conclusive sul modello di Leslie

4.6.1 Matrice di Leslie con $\nu_n = 0$

Nell'ipotesi che in F i tassi di sopravvivenza σ_i siano tutti positivi, la matrice di Leslie (4.4) è irriducibile se e solo se $\nu_n > 0$.
Per quanto riguarda i tassi di natalità, la situazione in cui ν_n è nullo risulta è piuttosto comune, dal momento che in molte popolazioni le ultime classi di età sono infeconde. In questo caso, se h è il valore massimo dell'indice a cui corrisponde un tasso di natalità positivo, la matrice F assume la forma normale

$$\left[\begin{array}{ccccc|ccccc} \sigma_0\nu_1 & \sigma_0\nu_2 & \cdots & \sigma_0\nu_{h-1} & \sigma_0\nu_h & & & & & \\ \sigma_1 & & & & & & & & & \\ & \sigma_2 & & & & & & O & & \\ & & \ddots & & & & & & & \\ & & & \sigma_{h-1} & 0 & & & & & \\ \hline & & & & \sigma_h & & 0 & & & \\ & & & & & \sigma_{h+1} & 0 & & & \\ & & & & & & \ddots & \ddots & & \\ & & & & & & & \sigma_{n-1} & 0 \end{array}\right] \tag{4.19}$$

nella quale tutti i blocchi diagonali, eccetto il primo che ha dimensione $h \times h$ ed è irriducibile, sono non isolati, nulli e di dimensione 1×1. Quindi, per il teorema 4.5.8,

- lo spettro della matrice F possiede
  - l' autovalore di Perron λ_0 del primo blocco diagonale, strettamente positivo e semplice,
  - altri autovalori periferici del primo blocco diagonale, se non primitivo,
  - eventuali altri autovalori a modulo minore di λ_0 del primo blocco diagonale,
  - l'autovalore nullo con molteplicità $n - h$, relativo ai blocchi scalari nilpotenti non isolati

- F ha un autovettore $\mathbf{v}_0$ strettamente positivo, unico a meno di fattori moltiplicativi essendo λ_0 un autovalore semplice.
  Se $\tilde{\mathbf{v}}_0 = \begin{bmatrix}\xi_1 & \xi_2 & \dots & \xi_h\end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^h_+$ è l'autovettore (destro) di Perron del primo blocco diagonale di F, l'autovettore (destro) $\mathbf{v}_0 \in \mathbb{R}^n_+$ è dato da

$$\mathbf{v}_0 = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_h \\ -- \\ \xi_{h+1} \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} \tag{4.20}$$

  con $\xi_{h+1} = \xi_h \sigma_h \lambda_0^{-1}$, $\xi_{h+2} = \xi_{h+1}\sigma_{h+1}\lambda_0^{-1}$. $\dots$
  In modo analogo si verifica che F possiede anche un autovettore sinistro $\mathbf{w}_0^T$ strettamente positivo

relativo all'autovalore λ_0. Se inoltre $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}$ formano, insieme con $\mathbf{v}_0$, una base di Jordan per la matrice F, risulta

$$\mathbf{w}_0^T \mathbf{v}_i \begin{cases} > 0 & \text{se } i = 0 \\ = 0 & \text{se } i = 1, 2, \ldots, n-1 \end{cases} \tag{4.21}$$

- Ogni vettore iniziale di popolazione $\mathbf{x}(0) > 0$ si esprime in modo unico come combinazione dei vettori della base di Jordan

$$\mathbf{x}(0) = \alpha_0 \mathbf{v}_0 + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \mathbf{v}_i \tag{4.22}$$

e, premoltiplicando (4.22) per $\mathbf{w}_0^T$, si verifica che α_0 deve essere un numero positivo.

- Esercizio 4.6.1 Si verifichi (4.21) e si dimostri che, rispetto a una base di Jordan, la componente α_0 del vettore $\mathbf{x}(0) > 0$ su $\mathbf{v}_0$ è positiva.

Se in (4.19) il primo blocco diagonale della matrice di Leslie è primitivo, λ_0 ha modulo strettamente maggiore di quello degli altri autovalori, perciò al divergere di t i vettori $\dfrac{F^t \mathbf{v}_i}{\lambda_0^t}$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$ sono infinitesimi. Il vettore di popolazione diventa asintoticamente parallelo a $\mathbf{v}_0$ e può essere approssimato come segue

$$\mathbf{x}(t) = F^t \mathbf{x}(0) = \alpha_0 \lambda_0^t \mathbf{v}_0 + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i F^t \mathbf{v}_i = \lambda_0^t \left\{ \alpha_0 \mathbf{v}_0 + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \frac{F^t \mathbf{v}_i}{\lambda_0^t} \right\} \sim \lambda_0^t \alpha_0 \mathbf{v}_0$$

- Esercizio 4.6.2 Se due tassi di natalità consecutivi ν_i e ν_{i+1} sono positivi, il primo blocco diagonale della matrice di Leslie (4.19) è primitivo.

4.6.2 Matrice di Leslie irriducibile

Supponiamo che nella matrice di Leslie si abbia $\nu_n > 0$, ossia $\phi_n > 0$. Allora

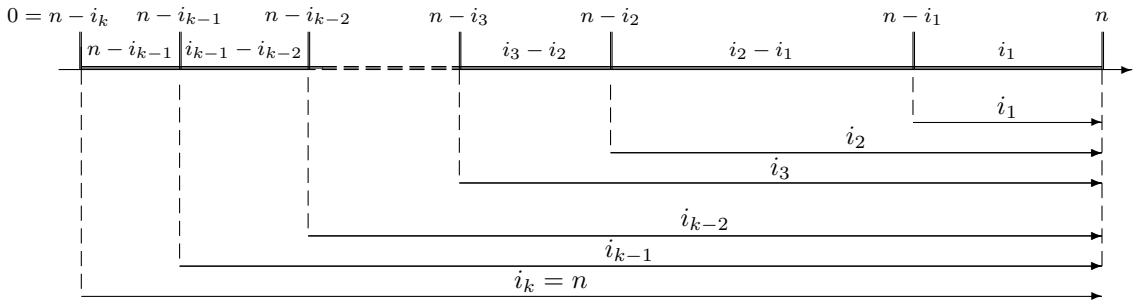
• F è irriducibile[12] e $\Delta_F(z) = z^n - \phi_1 z^{n-1} - \phi_2 z^{n-2} - \cdots - \phi_{n-1} z - \phi_n$ ottenuto in (4.7) ha negativo il termine costante;

• per la proposizione 4.5.7, l'indice di imprimitività di F si può calcolare a partire dai gradi dei monomi non nulli di $\Delta_F(z)$: se $\phi_{i_1}, \phi_{i_2}, , \phi_{i_k} = \phi_n$ sono i valori non nulli della funzione netta di maternità, con $i_1 < 1_2 < \cdots < i_k = n$, il polinomio caratteristico è

$$\det(zI - F) = z^n - \phi_{i_1} z^{n-i_1} - \phi_{i_2} z^{n-i_2} - \cdots - \phi_{i_{k-1}} z^{n-i_{k-1}} - \phi_{i_k} z^{n-n}$$

e di conseguenza abbiamo

$$\begin{aligned} \eta &= \text{M.C.D.}\{n-(n-i_1), (n-i_1)-(n-i_2), (n-i_2)-(n-i_3), \ \ldots \ (n-i_{k-1})-(n-i_k)\} \\ &= \text{M.C.D.}\{i_1, \ i_2 - i_1, \ i_3 - i_2 \ , \ \ldots, i_k\} \\ &= \text{M.C.D.}\{i_1 \ , i_2 \ , \ldots \ , i_{k-1} \ , i_k = n\} \end{aligned} \tag{4.23}$$



ovvero l'indice di imprimitività è il M.C.D. (degli indici) dei tassi di natalità positivi. La matrice di Leslie è primitiva se e solo se il M.C.D. in (4.23) è unitario, quindi, in particolare, quando sono non nulli due due tassi di natalità consecutivi.

[12] se sono soddisfatte ulteriori ipotesi, che preciseremo nel seguito, F può essere anche primitiva

4.6.3 Onde di popolazione

Quando l'indice di imprimitività η di F è maggiore di 1, si innescano, come vedremo, *onde di popolazione*, cioè distribuzioni di popolazione periodiche (se $\lambda_0 = 1$) o pseudoperiodiche.

Sia $\mathbf{v}_0$ è l'autovettore di Perron della matrice di Leslie, irriducibile e con indice di imprimitività $\eta > 1$.
Poniamo $\theta := e^{j2\pi/\eta}$ e indichiamo con $\mathbf{v}_h\,,\ h = 0, 1, \ldots, \eta - 1$, gli autovettori corrispondenti agli autovalori periferici $\theta^h\lambda_0$.
Denotiamo con $\mathbf{v}_h\,,\ h = \eta, \eta + 1, \ldots, n - 1$, gli altri autovettori e autovettori generalizzati della base di Jordan, relativi quindi ad autovalori con modulo minore di λ_0.
Qualsiasi sia la popolazione iniziale

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 = \sum_{h=0}^{\eta-1} \alpha_h \mathbf{v}_h + \sum_{k=\eta}^{n} \alpha_h \mathbf{v}_h,$$

la popolazione $\mathbf{x}(t)$ al divergere del tempo soddisfa la relazione

$$\frac{\mathbf{x}(t)}{\lambda_0^t} \simeq \sum_{h=0}^{\eta-1} \alpha_h \mathbf{v}_h \theta^{ht}.$$

dal momento che tutti gli addendi della somma $\sum_{k=\eta}^{n} \alpha_h \mathbf{v}_h$ vengono trasformati da F^t in vettori di norma trascurabile rispetto a quella dei trasformati della somma $\sum_{h=0}^{\eta-1} \alpha_h \mathbf{v}_h$.
Poichè risulta $\theta^{ht} = \theta^{ht+\nu\eta}$ per ogni intero ν, se t è sufficientemente grande si ha

$$\frac{\mathbf{x}(t+\eta)}{\lambda_0^{t+\eta}} \simeq \sum_{h=0}^{\eta-1} \alpha_h \mathbf{v}_h \theta^{h(t+\eta)} = \sum_{h=0}^{\eta-1} \alpha_h \mathbf{v}_h \theta^{ht} \simeq \frac{\mathbf{x}(t)}{\lambda_0^t}$$

e quindi $\mathbf{x}(t+\eta) \simeq \lambda_0^\eta \mathbf{x}(t)$.
Sempre per grandi valori di t, in ciascun pseudoperiodo di durata η i vettori di stato descritti dalla popolazione sono proporzionali ai vettori

$$\sum_{h=0}^{\eta-1} \alpha_h \mathbf{v}_h,\ \ \sum_{h=0}^{\eta-1} \alpha_h \mathbf{v}_h \theta^h,\ \ \sum_{h=0}^{\eta-1} \alpha_h \mathbf{v}_h \theta^{2h},\ \ \ldots,\ \ \sum_{h=0}^{\eta-1} \alpha_h \mathbf{v}_h \theta^{(\eta-1)h},$$

quindi la distribuzione della popolazione nelle n classi di età ritorna ciclicamente (ogni η istanti) nella medesima configurazione. D'altra parte il livello della popolazione complessiva (i.e. la somma degli individui presenti nelle n classi di età) si accresce in un periodo secondo un fattore pari λ_0^η.

Osservazione Sebbene il vettore di popolazione e il livello complessivo di popolazione dopo un periodo siano pari a λ_0^η volte il vettore e il livello raggiunti all'inizio del periodo, non è necessariamente vero che in un passo il vettore o il livello di popolazione si accrescano di un fattore pari a λ_0 rispetto a quelli del passo precedente.