



## Capitolo 2

# Introduzione al controllo dei sistemi scalari

*[rev. 16 marzo 2010]*

*[gli argomenti asteriscati non fanno parte del programma 2009/10]*

Le nozioni di algebra introdotte nel capitolo precedente, e in particolare i risultati in termini di fattorizzazione ottenuti per gli anelli dei polinomi e delle funzioni razionali stabili, ci permettono di formulare e risolvere alcuni problemi di controllo in retroazione. Le problematiche prese in considerazione in questo capitolo saranno precipuamente quelle relative alla stabilizzazione dei sistemi a ingresso e uscita scalari: l'estensione ai sistemi multivariabili sarà presentata in un capitolo successivo.

Per ragioni di brevità, supporremo noti i concetti di base relativi alla modellizzazione di stato, introdotti nel corso di Teoria dei Sistemi.

### 2.1 Struttura dei sistemi retroazionati

Consideriamo il sistema dinamico di Figura 2.1, ottenuto collegando in catena chiusa la coppia di sistemi dinamici a un ingresso e un'uscita  $\Sigma_p$  e  $\Sigma_c$ .

Lo schema considerato si presta a descrivere varie situazioni di interesse. Adottando il punto di vista della regolazione,  $\Sigma_p$  può essere considerato come un impianto da controllare e  $\Sigma_c$  come il dispositivo di controllo che si intende progettare. Tipicamente si attribuisce a uno dei due ingressi  $v_1$  e  $v_2$  significato di segnale di riferimento e all'altro, ove presente, quello di disturbo. Similmente, una sola delle uscite  $y_1$  e  $y_2$  viene intesa come grandezza da controllare e l'altra, eventualmente, rappresenta una grandezza misurabile del sistema.

Più in generale,  $\Sigma_p$  e  $\Sigma_c$  possono essere interpretati come due sistemi interagenti, e lo schema di Figura 2.1 rappresenta la situazione tipica in cui ciascun sistema influenza ed è influenzato dall'altro. In questo caso  $v_1$  e  $v_2$  modellano l'azione dell'ambiente esterno sul sistema interconnesso, mentre  $y_1$  e  $y_2$  rappresentano le azioni che il sistema esercita sull'ambiente.

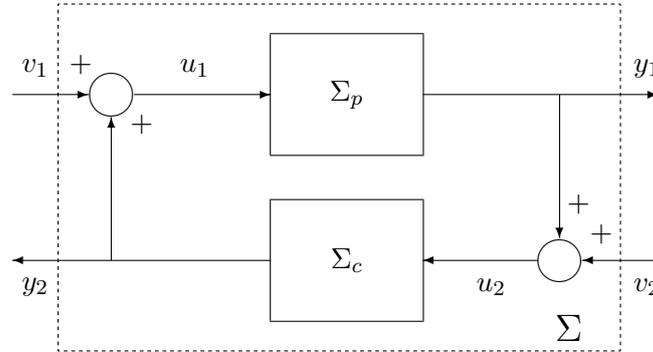


Fig. 2.1

Ci proponiamo di discutere anzitutto la struttura del sistema interconnesso  $\Sigma$  di Figura 2.1 quando i sistemi con un ingresso e un'uscita  $\Sigma_p$  e  $\Sigma_c$  sono discreti, lineari, tempo-invarianti, causali, e di studiare le condizioni che ne garantiscono la stabilità interna ed esterna (BIBO). Successivamente, i risultati ottenuti verranno utilizzati per la sintesi di un compensatore stabilizzante e per la parametrizzazione di tutti i compensatori di tale classe.

Se  $\Sigma_p = (F_1, G_1, H_1, J_1)$  e  $\Sigma_c = (F_2, G_2, H_2, J_2)$  sono i sistemi dinamici della connessione di Figura 2.1, descritti dalle equazioni

$$\mathbf{x}_i(t+1) = F_i \mathbf{x}_i(t) + G_i u_i(t) \quad (2.1)$$

$$y_i(t) = H_i \mathbf{x}_i(t) + J_i u_i(t), \quad i = 1, 2, \quad (2.2)$$

il primo di dimensione  $\nu_p$ , il secondo di dimensione  $\nu_c$ , le corrispondenti funzioni di trasferimento valgono

$$\begin{aligned} p(z) &= H_1(zI - F_1)^{-1}G_1 + J_1 \\ c(z) &= H_2(zI - F_2)^{-1}G_2 + J_2 \end{aligned}$$

### 2.1.1 Equazioni di stato di $\Sigma$

Le equazioni di stato del sistema di Figura 2.1 si ottengono tenendo conto dei *vincoli dell'interconnessione*: da

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_2 \\ y_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \left( \begin{bmatrix} 0 & H_2 \\ H_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & J_2 \\ J_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \right) \end{aligned}$$

si ottiene

$$\begin{bmatrix} 1 & -J_2 \\ -J_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & H_2 \\ H_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix}.$$

e nell'ipotesi in cui

$$\det \begin{bmatrix} 1 & -J_2 \\ -J_1 & 1 \end{bmatrix} \neq 0^1 \quad (2.3)$$

si perviene a

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t+1) \\ \mathbf{x}_2(t+1) \end{bmatrix} &= \left( \begin{bmatrix} F_1 & 0 \\ 0 & F_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1 & 0 \\ 0 & G_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -J_2 \\ -J_1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & H_2 \\ H_1 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} G_1 & 0 \\ 0 & G_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -J_2 \\ -J_1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} &= \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -J_2 \\ -J_1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} H_1 & 0 \\ 0 & H_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -J_2 \\ -J_1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

**Proposizione 2.1.2** [RAGGIUNGIBILITÀ E OSSERVABILITÀ DI  $\Sigma$ ] *Il sistema  $\Sigma$  è rispettivamente raggiungibile o osservabile se e solo se lo sono simultaneamente i sistemi  $\Sigma_p$  e  $\Sigma_c$*

DIMOSTRAZIONE i) Se  $\Sigma_p$  e  $\Sigma_c$  sono raggiungibili, lo è  $\Sigma$ . Infatti, se gli ingressi  $u_1(\cdot)$  ed  $u_2(\cdot)$  pilotano rispettivamente il sistema  $\Sigma_p$  in  $\mathbf{x}_1(k) = \bar{\mathbf{x}}_1$  e il sistema  $\Sigma_c$  in  $\mathbf{x}_2(k) = \bar{\mathbf{x}}_2$  con movimenti  $\mathbf{x}_1(\cdot)$  e  $\mathbf{x}_2(\cdot)$  e se  $y_1(\cdot)$  e  $y_2(\cdot)$  sono le corrispondenti uscite dei due sistemi, perché  $\Sigma$  raggiunga lo stato  $[\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2]$  basterà scegliere ingressi  $v_1(\cdot)$  e  $v_2(\cdot)$  soddisfacenti istante per istante la condizione

$$\begin{bmatrix} 1 & -J_2 \\ -J_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & H_2 \\ H_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix}.$$

Viceversa, se  $\Sigma$  è raggiungibile, per ogni stato  $\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_1 \\ \bar{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix}$  di  $\Sigma$ , esiste una coppia  $\begin{bmatrix} v_1(\cdot) \\ v_2(\cdot) \end{bmatrix}$  e di conseguenza una coppia  $\begin{bmatrix} u_1(\cdot) \\ u_2(\cdot) \end{bmatrix}$  che consente di raggiungerlo. Ma allora  $\bar{\mathbf{x}}_1$  ( $\bar{\mathbf{x}}_2$ ) è raggiungibile applicando a  $\Sigma_p$  (a  $\Sigma_c$ ) l'ingresso  $u_1(\cdot)$  ( $u_2(\cdot)$ ).

ii) Se  $\Sigma_p$  e  $\Sigma_c$  sono osservabili, lo è  $\Sigma$ . Infatti dalle coppie  $(v_1, v_2)$  e  $(y_1, y_2)$  otteniamo la coppia  $(u_1, u_2)$  e dalle coppie ingresso-uscita  $(u_1, y_1)$  e  $(u_2, y_2)$  relative a ciascuno dei sistemi  $\Sigma_p$  e  $\Sigma_c$  possiamo risalire ai corrispondenti stati iniziali  $\mathbf{x}_1(0)$  e  $\mathbf{x}_2(0)$ .

Viceversa, supponiamo che  $\Sigma$  sia osservabile. Ponendo  $v_1 = v_2 = 0$ , dalle uscite libere  $y_1$  e  $y_2$  di  $\Sigma$  si determina il suo stato iniziale. D'altra parte, vedendo  $y_2$  e  $y_1$  come ingresso e uscita di  $\Sigma_p$  si conclude che lo stato iniziale di  $\Sigma_p$  è determinabile quando si conoscano

<sup>1</sup>Il significato di questa condizione può essere facilmente compreso ipotizzando di applicare all'istante  $t = 0$  due valori di ingresso  $v_1(0) \neq 0$  e  $v_2(0) = 0$  al sistema a riposo. In tal caso si ha

$$u_1(0) = v_1(0) + y_2(0) = v_1(0) + J_1 J_2 u_1(0)$$

, quindi  $(1 - J_1 J_2)u_1(0) = v_1(0)$ . Se  $1 - J_1 J_2 = 0$ ,  $v_1(0)$  non potrebbe essere diverso da zero. In altri termini, e con riferimento al diagramma a blocchi, il segnale  $u_1(0)$  in ingresso a  $\Sigma_p$  è sempre uguale al segnale  $y_2(0) = J_1 J_2 u_1(0)$  in uscita da  $\Sigma_c$  e il segnale di controllo  $v_1(0)$  è vincolato ad essere nullo. Una interpretazione più completa di questa condizione emergerà nella successiva spiegazione.

l'ingresso applicato e l'uscita che ne consegue e quindi che  $\Sigma_p$  è osservabile. Lo stesso vale per  $\Sigma_c$ .

In conclusione,  $\Sigma$  è raggiungibile (osservabile) se e solo se sono raggiungibili (osservabili) simultaneamente  $\Sigma_p$  e  $\Sigma_c$ . ■

Al medesimo risultato si può pervenire applicando il criterio PBH al sistema  $\Sigma$ . I dettagli sono lasciati per esercizio.

### 2.1.3 Matrice di trasferimento di $\Sigma$

La matrice di trasferimento si ottiene a partire dalle funzioni di trasferimento  $p(z)$  e  $c(z)$  dei sottosistemi componenti, ponendo

$$\begin{bmatrix} \hat{y}_1(z) \\ \hat{y}_2(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p(z) & 0 \\ 0 & c(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{v}_1(z) \\ \hat{v}_2(z) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & p(z) \\ c(z) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{y}_1(z) \\ \hat{y}_2(z) \end{bmatrix}.$$

Da ciò segue

$$\begin{bmatrix} 1 & -p(z) \\ -c(z) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{y}_1(z) \\ \hat{y}_2(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p(z) & 0 \\ 0 & c(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{v}_1(z) \\ \hat{v}_2(z) \end{bmatrix},$$

e quindi, nell'ipotesi in cui sia  $1 - p(z)c(z) \neq 0$ ,

$$\begin{bmatrix} \hat{y}_1(z) \\ \hat{y}_2(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -p(z) \\ -c(z) & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} p(z) & 0 \\ 0 & c(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{v}_1(z) \\ \hat{v}_2(z) \end{bmatrix} = \frac{1}{1 - p(z)c(z)} \begin{bmatrix} p(z) & p(z)c(z) \\ p(z)c(z) & c(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{v}_1(z) \\ \hat{v}_2(z) \end{bmatrix}.$$

La matrice di trasferimento del sistema interconnesso è allora

$$W(z) := \frac{1}{1 - p(z)c(z)} \begin{bmatrix} p(z) & p(z)c(z) \\ p(z)c(z) & c(z) \end{bmatrix}, \quad (2.6)$$

o anche

$$W(z) = \begin{bmatrix} \frac{n_p(z)d_c(z)}{d_p(z)d_c(z) - n_p(z)n_c(z)} & \frac{n_p(z)n_c(z)}{d_p(z)d_c(z) - n_p(z)n_c(z)} \\ \frac{n_p(z)n_c(z)}{d_p(z)d_c(z) - n_p(z)n_c(z)} & \frac{n_c(z)d_p(z)}{d_p(z)d_c(z) - n_p(z)n_c(z)} \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

dove  $n_p(z)/d_p(z)$  e  $n_c(z)/d_c(z)$  sono rappresentazioni (non necessariamente irriducibili) di  $p(z)$  e  $c(z)$

**Proposizione 2.1.4** [MATRICE DI TRASFERIMENTO PROPRIA] *Siano  $p(z) = n_p(z)/d_p(z)$  e  $c(z) = n_c(z)/d_c(z)$  funzioni razionali proprie. Sono equivalenti i seguenti fatti:*

- (i)  $W(z)$  in (2.7) è una matrice razionale propria;
- (ii)  $\deg(d_p d_c - n_p n_c) = \deg(d_p d_c)$ ;
- (iii)  $1 - p(\infty)c(\infty) \neq 0$ .

**DIMOSTRAZIONE** (i)  $\Rightarrow$  (ii) Dal momento che  $\deg n_p \leq \deg d_p$  e  $\deg n_c \leq \deg d_c$ , certamente  $\deg(d_p d_c - n_p n_c) \leq \deg(d_p d_c)$ . Se fosse  $\deg(d_p d_c - n_p n_c) < \deg(d_p d_c)$ , dovrebbe esserci un'elisione tra i monomi di grado massimo di  $n_p n_c$  e  $d_p d_c$ , e quindi si avrebbe  $\deg(n_p n_c) = \deg(d_p d_c)$ . Ma allora la componente in posizione (1, 2) di  $W(z)$  non sarebbe propria.

(ii)  $\Rightarrow$  (iii) Dal momento che

$$1 - p(z)c(z) = \frac{d_p(z)d_c(z) - n_p(z)n_c(z)}{d_p(z)d_c(z)},$$

dall'ipotesi (ii) segue che numeratore e denominatore hanno lo stesso grado e quindi, passando al limite per  $z \rightarrow \infty$ , troviamo  $1 - p(\infty)c(\infty) \neq 0$ .

(iii)  $\Rightarrow$  (i) Facciamo riferimento all'espressione di  $W(z)$  in (2.6). Dalla (iii) segue che  $1/(1 - p(z)c(z))$  è una funzione razionale propria; inoltre, poiché  $p$  e  $c$  sono proprie, la matrice

$$\begin{bmatrix} p(z) & p(z)c(z) \\ p(z)c(z) & c(z) \end{bmatrix}$$

è propria; ma allora tutte le componenti di  $W(z)$ , in quanto prodotti di funzioni proprie, sono proprie. ■

Si noti che, qualunque siano le realizzazioni  $\Sigma_p$  e  $\Sigma_c$  delle funzioni di trasferimento  $p(z)$  e  $c(z)$ , si ha  $J_1 = p(\infty)$  e  $J_2 = c(\infty)$ . Di conseguenza la (iii) della precedente proposizione coincide con la condizione di consistenza  $1 - J_1 J_2 \neq 0$ , ed esprime la possibilità di connettere in retroazione la coppia di sistemi  $\Sigma_p$  e  $\Sigma_c$  ottenendo un sistema dinamico proprio.

## 2.2 Analisi della stabilità dei sistemi retroazionati

Un sistema lineare è detto *esternamente stabile* se per ogni ingresso limitato la corrispondente uscita *forzata* è limitata. La stabilità esterna, detta anche stabilità BIBO (*bounded input/bounded output*) è pertanto una proprietà del legame ingresso/uscita forzata, ovvero della matrice di trasferimento  $W(z)$  del sistema. Com'è noto da corsi precedenti, un sistema è BIBO stabile se e solo se tutti gli elementi di  $W(z)$  appartengono all'anello  $\mathcal{S}$  delle funzioni razionali stabili, descritto nel capitolo 1.

La stabilità esterna del sistema  $\Sigma$  rappresentato in figura 2.1 può essere ricondotta all'analisi della matrice (2.7), nel modo precisato dalla seguente proposizione.

**Proposizione 2.2.1** [STABILITÀ BIBO DI  $\Sigma$ ] *Siano*

$$p(z) = n_p(z)/d_p(z) \quad \text{e} \quad c(z) = n_c(z)/d_c(z) \tag{2.8}$$

*funzioni razionali proprie e irriducibili. Allora  $\Sigma$  è BIBO stabile (ovvero  $W(z) \in \mathcal{S}^{2 \times 2}$ ) se e solo se, simultaneamente,*

(i)  $W(z)$  in (2.7) è una matrice razionale propria, ovvero vale una qualsiasi delle condizioni equivalenti di Proposizione 2.1.1,

(ii) gli zeri del polinomio  $d_p(z)d_c(z) - n_p(z)n_c(z)$  appartengono tutti al disco unitario aperto  $\mathbb{D}$ .

*Le condizioni (i) e (ii) sono sufficienti per la stabilità BIBO anche se le (2.8) non sono irriducibili.*

**DIMOSTRAZIONE** Supponiamo che (2.8) siano irriducibili e che  $\Sigma$  sia BIBO stabile, ossia  $W(z) \in \mathcal{S}^{2 \times 2}$ .

Allora vale la (i), perché gli elementi della matrice  $W(z)$  sono in  $\mathcal{S}$ , quindi sono funzioni razionali proprie. Per verificare la (ii), supponiamo per assurdo che  $d_p(z)d_c(z) - n_p(z)n_c(z)$  abbia uno zero esterno a  $\mathbb{D}$ . Poiché tutti gli elementi di  $W(z)$  sono in  $\mathcal{S}$ ,  $d_p(z)d_c(z) - n_p(z)n_c(z)$  avrebbe un fattore irriducibile e instabile  $h(z)$  in comune con  $n_p(z)d_c(z)$ ,  $n_p(z)n_c(z)$  e  $n_c(z)d_p(z)$ .

Da  $h|(d_p d_c - n_p n_c)$  e  $h|n_p n_c$  segue  $h|d_p d_c$ . In virtù della coprimalità di  $n_p$  e  $d_p$ ,

$$\begin{aligned} h|n_c d_p \text{ e } h|n_p n_c &\Rightarrow h|n_c \\ h|n_p d_c \text{ e } h|d_p d_c &\Rightarrow h|d_c. \end{aligned}$$

Quindi  $n_c(z)$  e  $d_c(z)$  non sarebbero coprimi, avendo in comune il fattore  $h(z)$ .

Il viceversa è ovvio: se valgono (i) e (ii), a prescindere dalla riducibilità delle (2.8) le componenti di  $W(z)$  sono proprie e hanno gli zeri del denominatore stabili; quindi  $W(z) \in \mathcal{S}^{2 \times 2}$ . ■

Se si introducono particolari ipotesi sulle funzioni di trasferimento  $p(z)$  e  $c(z)$ , le condizioni di stabilità BIBO ora enunciate possono essere riformulate come segue.

**Proposizione 2.2.2** [STABILITÀ BIBO DI  $\Sigma$  CON  $c(z)$  E/O  $p(z)$  STABILI]

(i) Se  $c(z)$  è in  $\mathcal{S}$ , allora  $\Sigma$  è BIBO stabile se e solo se

$$\frac{p(z)}{1 - p(z)c(z)} \in \mathcal{S}. \quad (2.9)$$

(ii) Se  $p(z)$  e  $c(z)$  sono in  $\mathcal{S}$ , allora  $\Sigma$  è BIBO stabile se e solo se  $1 - p(z)c(z)$  è a fase minima.

**DIMOSTRAZIONE** (i) La funzione in (2.9) è l'elemento di posizione (1,1) nella matrice  $W(z)$ . Se  $\Sigma$  è BIBO stabile,  $W(z)$  è composta da funzioni in  $\mathcal{S}$  e quindi la funzione in (2.9) è in  $\mathcal{S}$ .

Viceversa, se  $c$  e la funzione in (2.9) sono in  $\mathcal{S}$ , allora sono in  $\mathcal{S}$  anche le funzioni

$$\frac{p(z)}{1 - p(z)c(z)} \cdot c(z), \quad c(z) \cdot \left(1 + \frac{p(z)c(z)}{1 - p(z)c(z)}\right) = \frac{c(z)}{1 - p(z)c(z)}.$$

Pertanto la matrice  $W(z)$  ha tutte le componenti stabili.

(ii) Se  $p$  e  $c$  sono in  $\mathcal{S}$  e  $1 - p(z)c(z)$  è a fase minima, l'inversa  $(1 - p(z)c(z))^{-1}$  è in  $\mathcal{S}$  e sono in  $\mathcal{S}$  tutti gli elementi di  $W(z)$ , in quanto prodotto di funzioni stabili.

Viceversa, se  $p, c$  e gli elementi di  $W(z)$  sono in  $\mathcal{S}$ , sono in  $\mathcal{S}$  sia

$$1 + \frac{p(z)c(z)}{1 - p(z)c(z)} = \frac{1}{1 - p(z)c(z)},$$

sia  $1 - p(z)c(z)$ . Quindi  $1 - p(z)c(z)$  è a fase minima. ■

Vogliamo ora affrontare il problema della stabilità interna del sistema  $\Sigma$  e analizzare come esso si riconnetta con la stabilità BIBO, e quindi con l'appartenenza a  $\mathcal{S}^{2 \times 2}$  della matrice di trasferimento  $W(z)$  ricavata in (2.7). Conviene a tale scopo determinare preliminarmente

- nell'ipotesi  $1 \neq J_1 J_2$  - la struttura del polinomio caratteristico  $\Delta_\Sigma(z)$  del sistema  $\Sigma$ . Ricorrendo anche all'identità matriciale  $\det(I - AB) = \det(I - BA)$ , si ricava

$$\begin{aligned}
\Delta_\Sigma(z) &= \det\left(\begin{bmatrix} zI - F_1 & 0 \\ 0 & zI - F_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} G_1 & 0 \\ 0 & G_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -J_2 \\ -J_1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & H_2 \\ H_1 & 0 \end{bmatrix}\right) \\
&= \det\begin{bmatrix} zI - F_1 & 0 \\ 0 & zI - F_2 \end{bmatrix} \det\left(\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (zI - F_1)^{-1}G_1 & 0 \\ 0 & (zI - F_2)^{-1}G_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -J_2 \\ -J_1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & H_2 \\ H_1 & 0 \end{bmatrix}\right) \\
&= \Delta_{\Sigma_p}(z)\Delta_{\Sigma_c}(z) \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & H_2(zI - F_2)^{-1}G_2 \\ H_1(zI - F_1)^{-1}G_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -J_2 \\ -J_1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\right) \\
&= \Delta_{\Sigma_p}(z)\Delta_{\Sigma_c}(z) \det\left(\begin{bmatrix} 1 & -J_2 \\ -J_1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & H_2(zI - F_2)^{-1}G_2 \\ H_1(zI - F_1)^{-1}G_1 & 0 \end{bmatrix}\right) \det\begin{bmatrix} 1 & -J_2 \\ -J_1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \\
&= \Delta_{\Sigma_p}(z)\Delta_{\Sigma_c}(z) \det\begin{bmatrix} 1 & -c(z) \\ -p(z) & 1 \end{bmatrix} \det\begin{bmatrix} 1 & -J_2 \\ -J_1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \\
&= \Delta_{\Sigma_p}(z)\Delta_{\Sigma_c}(z) \frac{1 - p(z)c(z)}{1 - J_1 J_2}. \tag{2.10}
\end{aligned}$$

È immediato che (2.10) non dipende dalle particolari rappresentazioni (riducibili o meno) adottate per  $p(z)$  e  $c(z)$ . Tuttavia, se  $p(z) = n_p(z)/d_p(z)$  e  $c(z) = n_c(z)/d_c(z)$  sono rappresentazioni irriducibili, i polinomi caratteristici dei sistemi  $\Sigma_p$  e  $\Sigma_c$  sono esprimibili come multipli rispettivamente di  $d_p(z)$  e di  $d_c(z)$ , quindi esistono polinomi  $h_p(z)$  e  $h_c(z)$  per cui si ha

$$\Delta_{\Sigma_p}(z) = h_p(z)d_p(z) \quad \text{e} \quad \Delta_{\Sigma_c}(z) = h_c(z)d_c(z)$$

e il polinomio caratteristico di  $\Sigma$  è espresso da

$$\Delta_\Sigma(z) = \frac{h_p(z)h_c(z)(d_p(z)d_c(z) - n_p(z)n_c(z))}{1 - J_1 J_2}.$$

Ricordando che  $\Sigma_p$  e  $\Sigma_c$  sono realizzazioni minime se e solo se  $\Delta_{\Sigma_p}(z)$  e  $\Delta_{\Sigma_c}(z)$  differiscono da  $d_p(z)$  e  $d_c(z)$  per costanti moltiplicative non nulle, otteniamo la seguente proposizione

**Proposizione 2.2.3** [POLINOMIO CARATTERISTICO DI  $\Sigma$ ] *Siano  $\Sigma_p = (F_1, G_1, H_1, J_1)$  e  $\Sigma_c = (F_2, G_2, H_2, J_2)$  i sottosistemi di Figura 2.1 e siano  $n_p/d_p$  e  $n_c/d_c$  rappresentazioni irriducibili delle corrispondenti f.d.t.  $p(z)$  e  $c(z)$ . Supponiamo inoltre  $1 - J_1 J_2 \neq 0$ .*

(i) Il polinomio caratteristico di  $\Sigma$  è espresso da

$$\Delta_{\Sigma}(z) = \frac{h_p(z)h_c(z)(d_p(z)d_c(z) - n_p(z)n_c(z))}{1 - J_1J_2}. \quad (2.11)$$

con  $h_p(z) = \Delta_{\Sigma_p}(z)/d_p(z)$  e  $h_c(z) = \Delta_{\Sigma_c}(z)/d_c(z)$ ;

(ii) Il polinomio caratteristico di  $\Sigma$  è dato da

$$\Delta_{\Sigma}(z) = \frac{d_p(z)d_c(z) - n_p(z)n_c(z)}{1 - J_1J_2}. \quad (2.12)$$

se e solo se  $\Sigma_p$  e  $\Sigma_c$  sono realizzazioni minime delle rispettive funzioni di trasferimento  $p(z)$  e  $c(z)$ .

**DIMOSTRAZIONE** (i) è già stata provata. Per la parte (ii), si osserva che  $\Sigma_p$  e  $\Sigma_c$  sono realizzazioni minime (i.e. raggiungibili e osservabili) delle proprie funzioni di trasferimento se e solo se  $\Delta_{\Sigma_p}(z) = d_p(z)$  e  $\Delta_{\Sigma_c}(z) = d_c(z)$ . Ciò prova la (2.12). ■

**Proposizione 2.2.4** [STABILITÀ INTERNA DI  $\Sigma$ ] *Se  $W(z)$  è una matrice razionale propria, il sistema  $\Sigma$  è internamente stabile se e solo se:*

(i)  $\Sigma$  è BIBO stabile;

(ii) i sistemi  $\Sigma_p$  e  $\Sigma_c$  sono entrambi stabilizzabili e rivelabili.

In particolare, se  $\Sigma_p$  e  $\Sigma_c$  sono realizzazioni minime, la stabilità interna e la stabilità BIBO di  $\Sigma$  si equivalgono.

**DIMOSTRAZIONE** Quando  $n_p(z)/d_p(z)$  e  $n_c(z)/d_c(z)$  sono rappresentazioni irriducibili, - per la Proposizione 2.2.1, la condizione (i) equivale al fatto che il polinomio  $d_p(z)d_c(z) - n_p(z)n_c(z)$  abbia soltanto zeri in  $\mathbb{D}$ .

- la stabilizzabilità e la rivelabilità di  $\Sigma_p$  e  $\Sigma_c$  sono equivalenti al fatto che i polinomi  $h_p(z) := \Delta_{\Sigma_p}(z)/d_p(z)$  e  $h_c(z) := \Delta_{\Sigma_c}(z)/d_c(z)$ , i cui zeri sono gli autovalori dei sottosistemi non raggiungibili e/o non osservabili, non si annullino fuori di  $\mathbb{D}$ .

Ma allora, attesa la (2.11), (i) e (ii) assieme equivalgono al fatto che  $\Delta_{\Sigma}(z)$  possa annullarsi soltanto in  $\mathbb{D}$ .

Nel caso in cui  $\Sigma_p$  e  $\Sigma_c$  siano realizzazioni minime,  $h_p(z)$  e  $h_c(z)$  sono costanti non nulle e il risultato è ovvio. ■

- **ESERCIZIO 2.2.1** Si provi che per ogni coppia di matrici  $A \in \mathbb{F}^{n \times m}$ ,  $B \in \mathbb{F}^{m \times n}$  vale l'identità  $\det(I_n + AB) = \det(I_m + BA)$ . (Suggerimento: si ponga

$$M_1 = \begin{bmatrix} I & A \\ -B & I \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} I & 0 \\ B & I \end{bmatrix}$$

e si usi l'identità  $\det(M_1M_2) = \det(M_2M_1)$ ).

## 2.3 Sintesi del compensatore: approccio polinomiale

L'obiettivo dei paragrafi precedenti è stato quello di analizzare la struttura del sistema in retroazione di Figura 2.1 sia in termini di modello di stato che dal punto di vista ingresso/uscita.

Basandoci sui risultati ottenuti e nell'ipotesi che soltanto il sistema  $\Sigma_p$  sia stato assegnato, affronteremo ora alcuni problemi di sintesi, riconducibili essenzialmente alla determinazione di un compensatore  $\Sigma_c$  tale da garantire la stabilità del sistema complessivo.

Come abbiamo visto, se  $\Sigma_p$  e  $\Sigma_c$  sono entrambi stabilizzabili e rivelabili, stabilità interna e stabilità esterna risultano equivalenti. Quindi il problema di costruire un compensatore  $\Sigma_c$ , che stabilizzi  $\Sigma$  dal punto di vista interno, può essere risolto nell'ambito delle funzioni di trasferimento (garantendo cioè l'appartenenza di  $W(z)$  a  $\mathcal{S}^{2 \times 2}$ ) purché l'impianto assegnato  $\Sigma_p$  sia stabilizzabile e rivelabile e purché la  $c(z)$  che andremo a determinare venga sintetizzata mediante una realizzazione  $\Sigma_c$  stabilizzabile e rivelabile.

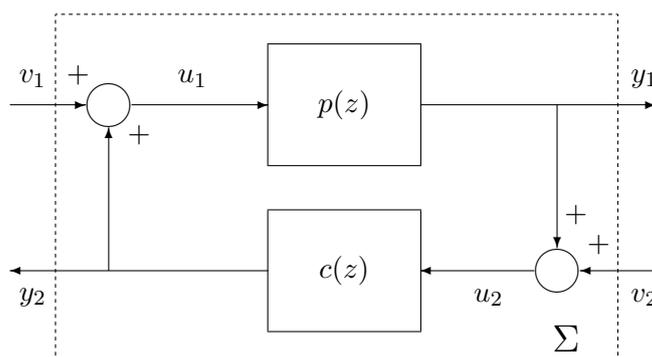


Fig. 2.2

Sia dunque assegnata  $p(z)$ , la funzione di trasferimento propria di un impianto lineare, tempo invariante e causale a tempo discreto e supponiamo che  $n_p(z)/d_p(z)$ , con  $n_p(z), d_p(z)$  in  $\mathbb{R}[z]$ , ne sia una rappresentazione irriducibile.

Qualunque sia la funzione di trasferimento del controllore lineare  $c(z) = n_c(z)/d_c(z)$ , non necessariamente espressa in forma irriducibile, le componenti della matrice di trasferimento  $W(z)$  del sistema  $\Sigma$  possono essere riscritte nella forma

$$\frac{n_p(z)n_c(z)}{\Delta(z)}, \quad \frac{n_c(z)d_p(z)}{\Delta(z)}, \quad \frac{n_p(z)d_c(z)}{\Delta(z)}, \quad (2.13)$$

con  $\Delta(z) = d_p(z)d_c(z) - n_p(z)n_c(z)$ .

Diciamo che  $c(z)$  **stabilizza**  $p(z)$  se  $c(z)$  è una funzione razionale **propria** tale che  $W(z)$  appartenga a  $\mathcal{S}^{2 \times 2}$ . In queste ipotesi, e sulla base della proposizione 2.2.4, possiamo concludere che il modello di stato  $\Sigma$  è internamente stabile se e solo se  $\Sigma_p$  è stabilizzabile e rivelabile e  $c(z)$  viene realizzata da un sistema  $\Sigma_c$  stabilizzabile e rivelabile.

**Problema 2.3.1** [PROBLEMA DELLA STABILIZZAZIONE] *Fissato un polinomio  $\Delta(z) \in \mathbb{R}[z]$  a zeri in  $\mathbb{D}$ , determinare una coppia di polinomi  $(n_c(z), d_c(z))$  tale che*

1. sia soddisfatta l'equazione diofantea

$$d_c(z)d_p(z) - n_c(z)n_p(z) = \Delta(z); \quad (2.14)$$

2. la funzione razionale  $n_c(z)/d_c(z)$  sia propria, ovvero

$$\deg n_c \leq \deg d_c; \quad (2.15)$$

3. gli elementi della matrice di trasferimento  $W(z)$

$$W(z) := \begin{bmatrix} \frac{n_p(z)d_c(z)}{\Delta(z)} & \frac{n_p(z)n_c(z)}{\Delta(z)} \\ \frac{n_p(z)n_c(z)}{\Delta(z)} & \frac{n_c(z)d_p(z)}{\Delta(z)} \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

siano propri (e quindi, attesa la scelta di  $\Delta(z)$ , siano in  $\mathcal{S}$ ).

**Osservazione** La formulazione del problema della stabilizzazione appena fornita potrebbe apparire restrittiva, dal momento che, per effetto di cancellazioni tra numeratore e denominatore di ciascuna delle funzioni razionali in (2.16), è possibile che  $W(z)$  sia una matrice stabile anche quando  $\Delta(z)$  contiene un fattore  $h(z)$  a zeri instabili. In realtà, il seguente lemma chiarisce che tale situazione si verifica soltanto se  $h(z)$  è un fattore comune a  $n_c(z)$  e  $d_c(z)$ . Di conseguenza, il medesimo compensatore stabilizzante e la medesima  $W(z)$  possono essere ottenuti risolvendo l'equazione diofantea (2.14) con polinomio noto (a zeri stabili)  $\Delta(z)/h(z)$ .

**Lemma 2.3.2** Se  $h(z) \in \mathbb{R}[z]$  è un fattore irriducibile comune a numeratore e denominatore di ciascuna delle funzioni in (2.13), allora  $h(z)$  è un fattore comune a  $n_c(z)$  e  $d_c(z)$ .

**DIMOSTRAZIONE** Se  $h|n_p n_c$  e  $h|\Delta$ . Tenendo conto della coprimialità di  $n_p(z)$  e  $d_p(z)$ , da  $h|d_p d_c$  e  $h|n_p d_c$  segue  $h|d_c$ . Analogamente, da  $h|n_p n_c$  e  $h|d_p n_c$  segue  $h|n_c$ . ■

Da un punto di vista puramente algebrico, l'equazione (2.14) è risolubile per ogni scelta di  $\Delta(z)$ , dal momento che la coprimialità di  $n_p(z)$  e  $d_p(z)$  assicura la risolubilità della (2.14) per  $\Delta(z) = 1$ . Non tutte le soluzioni  $(n_c, d_c)$  a cui si perviene, tuttavia, danno luogo a compensatori propri, nè in generale il corrispondente sistema in catena chiusa è proprio. La seguente proposizione mostra come opportune ipotesi sul grado di  $\Delta(z)$  assicurino l'esistenza di compensatori propri e stabilizzanti.

**Proposizione 2.3.3** [SOLUZIONE DEL PROBLEMA DEL COMPENSATORE] Sia  $(n_p(z), d_p(z))$  una coppia di polinomi coprimi, con

$$\deg n_p \leq \deg d_p =: \nu. \quad (2.17)$$

Per ogni  $\Delta(z) \in \mathbb{R}[z]$ , con  $\deg \Delta \geq 2\nu$ , esistono in  $\mathbb{R}[z]$  soluzioni  $(n_c(z), d_c(z))$  dell'equazione diofantea (2.14) tali che

i) è soddisfatta la condizione perché il compensatore sia proprio:

$$\deg n_c \leq \deg d_c; \quad (2.18)$$

ii) è soddisfatta la condizione perché  $W(z)$  sia matrice propria:

$$\deg(d_c d_p) = \deg(d_c d_p - n_c n_p); \quad (2.19)$$

iii)  $n_c(z)$  e  $d_c(z)$  sono coprimi.

Se gli zeri di  $\Delta(z)$  sono in  $\mathbb{D}$ , il compensatore è stabilizzante.

**DIMOSTRAZIONE** Per la coprimalità della coppia  $(n_p(z), d_p(z))$ , l'equazione diofantea è risolubile e, in base alla Proposizione 1.59, ammette una soluzione di grado minimo in  $n_c(z)$ ,

$$(\bar{n}_c(z), \bar{d}_c(z)), \quad \deg \bar{n}_c < \nu. \quad (2.20)$$

Da

$$\deg \bar{n}_c n_p \leq 2\nu - 1 < \deg \Delta, \quad (2.21)$$

consegue

$$\deg \bar{d}_c = \deg \Delta - \nu \geq \nu. \quad (2.22)$$

Quindi, per (2.20) e (2.22),  $\bar{c}(z) := \bar{n}_c(z)/\bar{d}_c(z)$  è un compensatore strettamente proprio, mentre da (2.21) si vede che è soddisfatta la condizione (2.19) perchè  $W(z)$  sia propria.

Se la coppia  $(\bar{n}_c(z), \bar{d}_c(z))$  così determinata è coprima, la prova della proposizione è conclusa. In caso contrario ricorriamo alla soluzione generale dell'equazione diofantea (2.14)

$$\begin{bmatrix} n_c(z) & d_c(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{n}_c(z) & \bar{d}_c(z) \end{bmatrix} + q(z) \begin{bmatrix} d_p(z) & n_p(z) \end{bmatrix}, \quad (2.23)$$

dove  $q(z)$  varia sull'anello dei polinomi, e proviamo che per qualche scelta di  $q(z)$  si ottiene una coppia coprima  $(n_c(z), d_c(z))$  che soddisfa le condizioni (2.18) e (2.19). A tale scopo è sufficiente far variare  $q(z)$  sull'insieme dei numeri reali *non nulli* e considerare le soluzioni del tipo

$$\begin{bmatrix} n_c(z) & d_c(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{n}_c(z) & \bar{d}_c(z) \\ d_p(z) & n_p(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & q \end{bmatrix} M(z), \quad q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (2.24)$$

Il determinante della matrice polinomiale quadrata  $M(z)$  in (2.24) coincide con  $-\Delta(z)$ , quindi si annulla solo su un sottoinsieme finito del piano complesso  $\mathbb{C}$

$$\mathcal{A} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r\}.$$

Per ogni  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{A}$ , risulta allora

$$\begin{bmatrix} n_c(z) & d_c(z) \end{bmatrix} \neq 0, \quad (2.25)$$

qualunque sia la scelta del parametro  $q$ .

D'altra parte, se  $z$  coincide con uno degli elementi  $\alpha_i \in \mathcal{A}$ , la matrice  $M(z)$  valutata in  $\alpha_i$  ha rango uno ed esiste quindi un unico valore  $q_i$  del parametro  $q$  in corrispondenza al quale

$$\begin{bmatrix} n_c(\alpha_i) & d_c(\alpha_i) \end{bmatrix} = 0.$$

Scegliendo  $q \in \mathbb{R} \setminus \{0, q_1, q_2, \dots, q_r\}$ , si garantisce allora che la coppia  $(n_c(z), d_c(z))$  non si annulli per alcun valore di  $z \in \mathbb{C}$  e sia pertanto una soluzione coprima di (2.14).

Rimane da verificare se il compensatore

$$c(z) = \frac{\bar{n}_c(z) + qd_p(z)}{\bar{d}_c(z) + qn_p(z)} \quad (2.26)$$

così ottenuto è proprio, e se è propria la matrice  $W(z)$ .

Per quanto riguarda la condizione che  $c(z)$  sia proprio, ovvero la condizione (2.18) sui gradi, il numeratore di (2.26) soddisfa

$$\deg(\bar{n}_c + qd_p) = \nu \leq \deg \Delta - \nu.$$

Quanto al denominatore, se  $\deg d_p = \nu > \deg n_p$ , ovvero se l'impianto è strettamente proprio, da (2.22) segue

$$\deg(\bar{d}_c + qn_p) \geq \nu \quad (2.27)$$

e (2.18) è soddisfatta.

Se  $\deg d_p = \nu = \deg n_p$  la condizione (2.18) è certamente soddisfatta nel caso in cui  $\deg \bar{d}_c > \deg n_p = \nu$ .

Nel caso in cui risulti  $\deg \bar{d}_c = \deg n_p = \nu$ , è sufficiente attribuire a  $q \in \mathbb{R} \setminus \{0, q_1, q_2, \dots, q_r\}$  un valore che permetta di evitare la cancellazione dei monomi di grado  $\nu$  in  $\bar{d}_c(z) + qn_p(z)$ . Quanto infine alla condizione (2.19), risulta

$$\begin{aligned} \deg [d_p(\bar{d}_c + qn_p) - n_p(\bar{n}_c + qd_p)] &= \deg \Delta = \deg [d_p\bar{d}_c - n_p\bar{n}_c] \\ &= \deg (d_p\bar{d}_c) = \deg [d_p(\bar{d}_c + qn_p)], \end{aligned}$$

dove la penultima eguaglianza dipende dalla condizione - imposta all'inizio - che  $\bar{n}_c(z)$  abbia grado minimo, e l'ultima dipende dalla scelta di  $q$ . ■

In base alla proposizione precedente, la stabilizzazione di  $p(z)$  mediante una funzione di trasferimento razionale propria  $c(z)$  è sempre possibile quando si richiede che il polinomio  $\Delta(z)$  abbia grado almeno doppio di  $\deg d_p$ . In tal caso, comunque scelto  $\Delta(z)$  con zeri in  $\mathbb{D}$ , esiste sempre una soluzione di (2.14) tale che  $n_c/d_c$  sia propria (e quindi realizzabile mediante un modello di stato).

Inoltre, la (2.19) garantisce che, in corrispondenza a tale soluzione, le funzioni razionali in  $W(z)$  siano tutte proprie e che, in conseguenza della Proposizione 2.1.1, ogni realizzazione  $\Sigma_c$  di  $c(z)$  possa essere connessa in retroazione con  $\Sigma_p$ .

**Osservazione 1** Nel caso in cui la coppia  $(n_c, d_c)$  sia coprima, le rappresentazioni irriducibili delle componenti di  $W(z)$  hanno  $\Delta(z)$  come m.c.m. dei loro denominatori e, se  $\Sigma_p$  e  $\Sigma_c$  sono realizzazioni minime di  $p(z)$  e  $c(z)$ , il polinomio  $\Delta(z)$  è (associato al) polinomio caratteristico di  $\Sigma$  e l'insieme dei suoi zeri fornisce lo spettro di  $\Sigma$ .

Se  $n_c(z)$  e  $d_c(z)$  non sono coprimi e  $h(z)$  è un loro M.C.D., esso è un fattore comune a numeratore e denominatore di tutte le funzioni in (2.13) e ai fini della stabilità BIBO del sistema risulta del tutto ininfluenza. Sottolineiamo ancora una volta che, in tal caso, è risolvibile l'equazione (2.14) con termine noto  $\Delta(z)/h(z)$  e che alla soluzione  $(n_c(z)/h(z), d_c(z)/h(z))$  corrisponde un compensatore stabilizzante di ordine dinamico inferiore.

**Osservazione 2** Se  $\deg \Delta$  è inferiore a  $2 \deg d_p$ , l'equazione (2.14) è ancora risolvibile ma può accadere che

- 1) l'insieme delle soluzioni non contenga coppie  $(n_c(z), d_c(z))$  con  $n_c(z)/d_c(z)$  propria;
- 2) nessuna soluzione  $(n_c(z), d_c(z))$  con  $n_c(z)/d_c(z)$  propria dia luogo ad una matrice  $W(z)$  propria.

Questi due tipi di inconveniente sono illustrati nei seguenti esempi.

**Esempio 2.3.1** Siano

$$n_p(z) = z - 3 \quad \text{e} \quad d_p(z) = (z - 1)(z - 2)$$

una coppia di polinomi coprimi. L'equazione diofantea (2.14) con  $\Delta(z) = z$  non ha soluzioni  $(n_c, d_c)$  con  $\deg n_c \leq \deg d_c$ . Infatti, per qualunque scelta di  $d_c \neq 0$ ,  $\deg(d_p d_c)$  è strettamente maggiore di  $\deg \Delta$  e quindi nella soluzione dell'equazione diofantea deve intervenire una elisione tra i termini di grado massimo di  $n_p(z)n_c(z)$  e  $d_p(z)d_c(z)$ . Perché ciò possa accadere, deve essere  $\deg n_c > \deg d_c$ , e quindi la soluzione  $n_c(z)/d_c(z)$  non è propria.

**Esempio 2.3.2** Siano  $n_p(z) = z^2$  e  $d_p(z) = z^2 + 1$  una coppia di polinomi coprimi. La soluzione generale dell'equazione diofantea

$$-n_c(z)z^2 + d_c(z)(z^2 + 1) = z^2$$

è data da

$$(n_c(z), d_c(z)) = \left( -1 + q(z)(z^2 + 1), \quad z^2 q(z) \right), \quad q(z) \in \mathbb{R}[z],$$

e per  $q(z) \in \mathbb{R}[z] \setminus \{0\}$  corrisponde ad una famiglia di compensatori stabilizzanti propri

$$c(z) = \frac{n_c(z)}{d_c(z)} = \frac{-1 + q(z)(z^2 + 1)}{z^2 q(z)}.$$

Tuttavia la matrice di trasferimento del risultante sistema in retroazione non è mai propria, dal momento che  $\deg(d_p d_c)$  è sempre maggiore di  $\deg \Delta = \deg(z^2) = 2$ .

- **ESERCIZIO 2.3.1** Sia  $(n_p(z), d_p(z))$  una coppia di polinomi coprimi. Dimostrare che se  $\deg d_p > \deg n_p$ , allora per ogni polinomio  $\Delta(z)$  con  $\deg \Delta \geq 2 \deg d_p - 1$  esiste una coppia  $(n_c(z), d_c(z))$  con  $\deg n_c \leq \deg d_c$  che risolve la (2.14).

A conclusione del paragrafo, si sottolinea che il controllo in retroazione è in grado di rendere stabile il sistema ad anello chiuso  $\Sigma$ , posizionando i poli della corrispondente matrice di trasferimento  $W(z)$  all'interno della regione di stabilità in modo completamente arbitrario e indipendente dalla posizione dei poli di  $p(z)$ . L'unico vincolo è relativo al numero dei nuovi poli, dal momento che il grado del polinomio risultante  $\Delta(z)$  deve essere sufficientemente elevato da garantire la risolubilità del problema di stabilizzazione con un controllore proprio.

Diversa, invece, è la situazione degli zeri delle funzioni componenti la matrice  $W(z)$ . È immediato rendersi conto dalla (2.16) che, a meno di eventuali cancellazioni, zeri e poli di  $p(z)$  si ritrovano immutati come zeri delle funzioni componenti la matrice  $W(z)$ .

Questa situazione richiama alla mente risultati ben noti sulla retroazione (statica) dallo stato discussi nel corso di Teoria dei Sistemi, e mette in evidenza alcuni limiti della struttura di controllo in retroazione di Figura 2.2.

## 2.4 << \* Sintesi del compensatore: approccio in $\mathcal{S}$

Il problema della stabilizzazione dello schema in retroazione di Figura 2.2 può essere affrontato in modo diverso, lavorando nell'anello  $\mathcal{S}$  delle funzioni razionali proprie e stabili e utilizzandone le proprietà discusse nel capitolo precedente. Questo approccio, per certi versi più astratto, ha due importanti vantaggi: da una parte permette una formulazione sintetica delle condizioni per l'esistenza di un compensatore  $c(z)$  proprio e stabilizzante, dall'altra consente di individuare condizioni necessarie e sufficienti per l'esistenza di un compensatore stabilizzante che sia (proprio e) stabile (*compensatore forte*).

Il punto di partenza consiste nel rappresentare le funzioni razionali in gioco come rapporti di funzioni di  $\mathcal{S}$ . Poiché l'analisi è ristretta alla stabilità BIBO, e prende quindi in considerazione soltanto le funzioni di trasferimento dei sistemi componenti e del sistema ad anello chiuso, non è restrittivo adottare per  $p(z)$  e  $c(z)$  rappresentazioni irriducibili in  $\mathcal{S}$ .

Se

$$\frac{f_p(z)}{g_p(z)} \quad \text{e} \quad \frac{f_c(z)}{g_c(z)} \quad f_p(z), f_c(z), g_p(z), g_c(z) \in \mathcal{S},$$

sono rappresentazioni irriducibili in  $\mathcal{S}$  di  $p(z)$  e  $c(z)$ , funzioni di trasferimento dell'impianto e del compensatore, la matrice di trasferimento  $W(z)$  del sistema ad anello chiuso  $\Sigma$  può essere riscritta come segue

$$W(z) := \begin{bmatrix} \frac{f_p(z)g_c(z)}{\Omega(z)} & \frac{f_p(z)f_c(z)}{\Omega(z)} \\ \frac{f_p(z)f_c(z)}{\Omega(z)} & \frac{f_c(z)g_p(z)}{\Omega(z)} \end{bmatrix}. \quad (2.28)$$

con  $\Omega(z) := g_p(z)g_c(z) - f_p(z)f_c(z)$ .

La seguente proposizione costituisce il risultato fondamentale per risolvere il problema della stabilizzazione.

**Proposizione 2.4.1** (BIBO STABILITÀ DI  $W(z)$ ) *Siano  $f_p(z)/g_p(z)$  e  $f_c(z)/g_c(z)$  due rappresentazioni irriducibili in  $\mathcal{S}$  delle funzioni razionali  $p(z)$  e  $c(z)$ . La matrice  $W(z)$  in (2.28) è a componenti in  $\mathcal{S}$  se e solo se  $\Omega(z) = g_p(z)g_c(z) - f_p(z)f_c(z)$  è una funzione a fase minima.*

**DIMOSTRAZIONE** Supponiamo che  $\Omega$  sia una funzione a fase minima. Dalla espressione della matrice di trasferimento fornita dalla (2.28), è immediato dedurre che tutte le componenti di  $W(z)$ , in quanto prodotti di elementi di  $\mathcal{S}$ , sono a loro volta in  $\mathcal{S}$ .

Viceversa, supponiamo che tutti gli elementi di  $W(z)$  siano in  $\mathcal{S}$ . Allora anche

$$1 + \frac{f_p(z)f_c(z)}{\Omega(z)} = \frac{g_p(z)g_c(z)}{\Omega(z)}$$

è un elemento di  $\mathcal{S}$  diverso da zero, e quindi sono in  $\mathcal{S}$  tutti gli elementi della matrice

$$Q(z) = \begin{bmatrix} g_p(z) \\ f_p(z) \end{bmatrix} \frac{1}{\Omega(z)} [g_c(z) \quad f_c(z)].$$

Per la coprimialità delle coppie  $(f_p(z), g_p(z))$  e  $(f_c(z), g_c(z))$ , esistono  $x_p(z)$ ,  $y_p(z)$  e  $x_c(z)$ ,  $y_c(z)$  in  $\mathcal{S}$  tali che

$$x_p(z)g_p(z) + y_p(z)f_p(z) = 1,$$

e

$$g_c(z)x_c(z) + f_c(z)y_c(z) = 1.$$

Ma allora

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Omega(z)} &= [x_p(z) \quad y_p(z)] \begin{bmatrix} g_p(z) \\ f_p(z) \end{bmatrix} \frac{1}{\Omega(z)} [g_c(z) \quad f_c(z)] \begin{bmatrix} x_c(z) \\ y_c(z) \end{bmatrix} \\ &= [x_p(z) \quad y_p(z)] Q(z) \begin{bmatrix} x_c(z) \\ y_c(z) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

è un elemento di  $\mathcal{S}$ .

Dal momento che anche  $\Omega(z)$  sta in  $\mathcal{S}$ ,  $\Omega(z)$  è un elemento invertibile in  $\mathcal{S}$ . ■

In base alla precedente proposizione il problema della stabilizzazione si riduce a quello di determinare  $f_c(z), g_c(z) \in \mathcal{S}$  che soddisfino l'equazione diofantea

$$g_p(z)g_c(z) - f_p(z)f_c(z) = 1 \quad (2.29)$$

con il vincolo aggiuntivo che  $f_c(z)/g_c(z)$  sia una funzione razionale propria. Tale vincolo nasce dalla necessità di poter realizzare  $c(z) = f_c(z)/g_c(z)$  mediante un sistema dinamico causale.

In generale, un'arbitraria soluzione di (2.29) non dà luogo necessariamente ad un compensatore causale; è tuttavia sempre possibile trovare una soluzione dotata di tale proprietà, come illustrato dalla seguente proposizione.

**Proposizione 2.4.2** (COMPENSATORE CAUSALE STABILIZZANTE) *Sia  $f_p(z)/g_p(z)$  una rappresentazione irriducibile in  $\mathcal{S}$  della funzione di trasferimento propria  $p(z)$  di un impianto. Allora*

(i) *il compensatore stabilizzante  $c(z) = f_c(z)/g_c(z)$  associato a una soluzione  $(f_c(z), g_c(z))$  dell'equazione (2.29) è una funzione razionale propria se e solo se  $v_\infty(g_c) = 0$ , ovvero  $g_c(z)$  è una funzione propria ad inversa propria.*

(ii) *Esistono sempre soluzioni  $(f_c(z), g_c(z))$  di (2.29) che soddisfano la precedente condizione.*

DIMOSTRAZIONE (i) Sia  $(f_c(z), g_c(z))$  una soluzione dell'equazione (2.29) con  $c(z) = f_c(z)/g_c(z)$  propria, ovvero

$$v_\infty(f_c) - v_\infty(g_c) \geq 0 \quad (2.30)$$

e quindi  $v_\infty(f_c) \geq v_\infty(g_c) \geq 0$ . Se fosse  $v_\infty(g_c) > 0$ , la disuguaglianza

$$0 = v_\infty(1) \geq \min\{v_\infty(f_c) + v_\infty(f_p), v_\infty(g_c) + v_\infty(g_p)\}. \quad (2.31)$$

associata a (2.29) non potrebbe essere soddisfatta. Necessariamente si ha allora  $v_\infty(g_c) = 0$ .

Supponiamo, viceversa, che  $v_\infty(g_c) = 0$ . Dal momento che  $f_c(z)$  è un elemento di  $\mathcal{S}$ , segue immediatamente  $v_\infty(f_c) \geq 0$  e quindi  $v_\infty(f_c/g_c) = v_\infty(f_c) - v_\infty(g_c) \geq 0$ . Pertanto  $f_c(z)/g_c(z)$  è propria.

(ii) Sia  $(\bar{f}_c(z), \bar{g}_c(z))$  una soluzione particolare di (2.29). Se  $v_\infty(\bar{g}_c) = 0$ , allora per quanto visto al punto precedente  $\bar{f}_c(z)/\bar{g}_c(z)$  è propria. Se invece  $v_\infty(\bar{g}_c) > 0$ , consideriamo la soluzione generale dell'equazione diofantea (2.29)

$$\begin{aligned} (f_c(z), g_c(z)) &= (\bar{f}_c(z), \bar{g}_c(z)) + s(z)(g_p(z), f_p(z)) \\ &= \left( \bar{f}_c(z) + s(z)g_p(z), \bar{g}_c(z) + s(z)f_p(z) \right), \end{aligned}$$

$s(z)$  un arbitrario elemento di  $\mathcal{S}$ . In base al punto (i) sarà sufficiente verificare che, per un'opportuna scelta di  $s(z)$  in  $\mathcal{S}$ ,  $v_\infty(\bar{g}_c + sf_p) = 0$ . Poiché tutte le valutazioni delle funzioni in  $\mathcal{S}$  sono non negative e  $v_\infty(\bar{g}_c) > 0$ , da (2.31) segue subito che  $v_\infty(f_p)$  deve essere 0. Allora è sufficiente prendere  $\bar{s}(z) \in \mathcal{S}$  con  $v_\infty(\bar{s}) = 0$  perché in

$$\frac{\bar{f}_c(z) + \bar{s}(z)g_p(z)}{\bar{g}_c(z) + \bar{s}(z)f_p(z)}$$

si abbia  $v_\infty(\bar{s}f_p) = 0 < v_\infty(\bar{g}_c)$  e, tenendo conto dell'esercizio 1.6.2,  $v_\infty(\bar{g}_c + \bar{s}f_p) = \min\{v_\infty(\bar{g}_c), v_\infty(\bar{s}f_p)\} = 0$  ■

**Corollario 2.4.3** (PARAMETRIZZAZIONE DEI COMPENSATORI CAUSALI STABILIZZANTI) *Se  $f_p(z)/g_p(z)$  è una rappresentazione irriducibile in  $\mathcal{S}$  della f.d.t.  $p(z)$  dell'impianto, la classe delle f.d.t. dei compensatori razionali propri che rendono stabile e propria la matrice del sistema  $W(z)$  è data da*

$$\mathcal{C} := \left\{ \frac{\bar{f}_c(z) + s(z)g_p(z)}{\bar{g}_c(z) + s(z)f_p(z)} : s(z) \in \mathcal{S}, \bar{g}_c(\infty) + s(\infty)f_p(\infty) \neq 0 \right\}, \quad (2.32)$$

dove  $(\bar{f}_c(z), \bar{g}_c(z))$  è una soluzione particolare dell'equazione diofantea (2.29).

**DIMOSTRAZIONE** In base alla precedente proposizione i compensatori razionali propri che rendono stabile e propria  $W(z)$  sono tutti e soli quelli con f.d.t. del tipo  $c(z) = f_c(z)/g_c(z)$  con  $(f_c(z), g_c(z))$  soluzione di (2.29) e  $v_\infty(g_c) = 0$ . Ma allora, dall'espressione generale della soluzione di (2.29)

$$[f_c(z), g_c(z)] = \left[ \bar{f}_c(z) + s(z)g_p(z), \bar{g}_c(z) + s(z)f_p(z) \right], \quad s(z) \in \mathcal{S},$$

e dal fatto che  $v_\infty(\bar{g}_c + sf_p) = 0$  se e solo se  $s(\infty)f_p(\infty) + \bar{g}_c(\infty) \neq 0$ , segue immediatamente la parametrizzazione data in (2.32). ■

È naturale a questo punto confrontare le soluzioni ottenute con l'approccio polinomiale e con l'approccio in  $\mathcal{S}$ , e domandarsi perché la progettazione di un compensatore proprio stabilizzante, che in ambito polinomiale passa per la risoluzione di un'equazione diofantea con vincoli specifici sul grado del termine noto, si presenti per così dire immediata e apparentemente priva di vincoli in  $\mathcal{S}$ .

In realtà, la problematica relativa al grado di  $\Delta(z)$  nell'equazione (2.14), perde di rilievo quando si opera in  $\mathcal{S}$ , dal momento che viene riportata interamente sui denominatori delle funzioni  $f_p(z)$ ,  $f_c(z)$ ,  $g_p(z)$  e  $g_c(z)$  che compaiono in (2.29) e sulle quali non vengono imposte condizioni.

Di fatto il problema del grado riemerge esplicitamente quando si vada a considerare la matrice di trasferimento  $W(z)$  del risultante sistema in catena chiusa, dal momento che i gradi dei denominatori delle  $f_p(z)$ ,  $f_c(z)$ ,  $g_p(z)$  e  $g_c(z)$  determinano il grado di  $\Delta(z)$ , una volta che si riconduca l'equazione (2.29) ad un'equazione polinomiale, e condiziona, quindi, la complessità del sistema  $\Sigma$ .

Risulta così confermato che il problema della stabilizzazione di  $p(z)$  attraverso un compensatore proprio è sempre risolubile a condizione di non imporre vincoli troppo severi sull'aumento di complessità del sistema risultante, che potrà avere dimensione anche doppia rispetto a quella dell'impianto da controllare.

## 2.5 Stabilizzazione forte

Un aspetto particolarmente interessante del problema che abbiamo studiato è quello di verificare se all'interno della classe dei compensatori (propri) stabilizzanti ne esistano di stabili, ovvero di cercare un compensatore  $c(z) \in \mathcal{S}$  tale che la risultante matrice di trasferimento  $W(z)$  sia ad elementi in  $\mathcal{S}$ .

Questo problema, noto in letteratura con il nome di *stabilizzazione forte*, è importante per diverse ragioni. Come abbiamo avuto modo di osservare in precedenza, lo schema a blocchi di Figura 2.2 si presta a descrivere varie situazioni di interesse pratico ed una delle più tipiche è quella in cui  $v_1$  rappresenta il segnale di controllo,  $v_2$  il disturbo agente sul sistema e  $y_1$  l'uscita misurata. Un approccio di impronta tradizionale al problema si preoccuperebbe di rendere stabile solo la f.d.t.  $w_{11}(z) = f_p(z)g_c(z)/\Omega(z)$  da  $v_1$  a  $y_1$ , ma anche quando questa funzione non costituisce l'unico obiettivo della stabilizzazione, essa tuttavia svolge un ruolo estremamente peculiare. Ai fini del buon funzionamento del sistema è necessario che  $w_{11}(z)$  non abbia altri zeri instabili all'infuori di quelli di cui è già dotata la f.d.t. dell'impianto  $p(z)$ , e questa situazione si verifica se e solo se il compensatore stabilizzante  $c(z)$  sta in  $\mathcal{S}$ .

Oltre a ciò l'interesse per il problema della stabilizzazione forte è legato al fatto che i risultati trovati in questo ambito permettono di risolvere altri problemi di rilievo quali la stabilizzazione simultanea di due impianti e il progetto di un controllore a due parametri, di cui ci occuperemo nel seguito.

Per cominciare analizziamo sotto quali condizioni un compensatore razionale stabilizzante ottenuto dalla risoluzione dell'identità di Bézout (2.29) in  $\mathcal{S}$  è proprio e stabile.

**Proposizione 2.5.1** (CARATTERIZZAZIONI DEI COMPENSATORI STABILIZZANTI STABILI) *Sia  $f_p(z)/g_p(z)$  una rappresentazione irriducibile in  $\mathcal{S}$  della funzione di trasferimento propria  $p(z)$  di un impianto e sia  $c(z) = f_c(z)/g_c(z)$  il compensatore stabilizzante associato a una soluzione  $(f_c(z), g_c(z)) \in \mathcal{S}^2$  dell'equazione (2.29). Sono equivalenti i seguenti fatti:*

- (i)  $c(z)$  appartiene ad  $\mathcal{S}$ ;
- (ii)  $\delta(g_c) = 0$ , ovvero  $v_\alpha(g_c) = 0$  per ogni  $\alpha \in \mathbb{C}_e \setminus \mathbb{D}$ , ovvero  $g_c(z)$  è a fase minima;
- (iii) gli zeri instabili di  $p(z)/(1+p(z)c(z))$  coincidono con gli zeri instabili di  $p(z)$ , ciascuno contato con la sua molteplicità.

DIMOSTRAZIONE Poiché la coppia  $(f_c, g_c)$  risolve (2.29), le valutazioni di  $f_c, g_c, f_p$  e  $g_p$  soddisfano per ogni  $\alpha \in \mathbb{C}_e$  la diseuguaglianza

$$v_\alpha(1) = 0 \geq \min\{v_\alpha(f_c) + v_\alpha(f_p), v_\alpha(g_c) + v_\alpha(g_p)\} \quad (2.33)$$

Conseguentemente, se  $f_p$  o  $f_c$  ( $g_p$  o  $g_c$ ) hanno valutazione positiva in  $\alpha$ , sia  $g_p$  che  $g_c$  (sia  $f_p$  che  $f_c$ ) hanno in  $\alpha$  valutazione nulla.

(i)  $\Rightarrow$  (ii) Se  $c(z) \in \mathcal{S}$ , per ogni  $\alpha \in \mathbb{C}_e \setminus \mathbb{D}$  risulta

$$v_\alpha(f_c) \geq v_\alpha(g_c) \geq 0 \quad (2.34)$$

Se fosse  $v_\alpha(g_c) > 0$ , per (2.34) sarebbe anche  $v_\alpha(f_c) > 0$ , in contraddizione con il vincolo imposto da (2.33). Quindi  $v_\alpha(g_c) = 0, \forall \alpha \in \mathbb{C}_e \setminus \mathbb{D}$ , e  $\delta(g_c) = 0$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (iii) Se  $\alpha \in \mathbb{C}_e$  è uno zero di  $p(z)$ , si ha

$$0 < v_\alpha(p) = v_\alpha(f_p) - v_\alpha(g_p) < v_\alpha(f_p).$$

Viceversa,  $v_\alpha(f_p) > 0$  implica, per (2.33),  $v_\alpha(g_p) = 0$  e quindi  $v_\alpha(p) > 0$ .

D'altra parte, tenendo conto dell'ipotesi  $v_\alpha(g_c) = 0$ , si ha che  $\alpha \in \mathbb{C}_e \setminus \mathbb{D}$  è uno zero di  $p/(1-pc)$  se e solo se

$$0 < v_\alpha\left(\frac{p}{1-pc}\right) = v_\alpha\left(\frac{f_p g_c}{\Omega}\right) = v_\alpha(f_p) + v_\alpha(g_c) = v_\alpha(f_p).$$

Quindi la condizione  $v_\alpha(f_p) > 0$  è condizione necessaria e sufficiente perché sia  $p(z)$ , sia  $p/(1-pc)$  abbiano uno zero instabile in  $\alpha$  e  $v_\alpha(f_p)$  fornisce il valore comune della sua molteplicità.

(iii)  $\Rightarrow$  (i) Se, per assurdo,  $c(z) = f_c(z)/g_c(z)$  non fosse stabile, per qualche  $\alpha \in \mathbb{C}_e \setminus \mathbb{D}$  sarebbe  $v_\alpha(g_c) > v_\alpha(f_c) \geq 0$  e quindi  $v_\alpha(f_c) = v_\alpha(f_p) = 0$ .

Ma allora risulterebbe

$$\begin{aligned} v_\alpha(p) &= v_\alpha(f_p) - v_\alpha(g_p) \leq 0 \\ v_\alpha(p/(1-pc)) &= v_\alpha(f_p) + v_\alpha(g_c) > 0 \end{aligned} \quad (2.35)$$

e  $\alpha$  sarebbe zero instabile di  $p(z)/(1-p(z)c(z))$  ma non di  $p(z)$ . ■

Dopo aver evidenziato le condizioni sulla coppia  $(f_c, g_c)$  che garantiscono al corrispondente compensatore stabilizzante  $c(z) = f_c(z)/g_c(z)$  di essere (proprio) e stabile, è importante analizzare quali ipotesi sulla f.d.t. del processo  $p(z)$  assicurano che un siffatto compensatore esista. A tal fine è utile premettere il seguente lemma tecnico, per la cui dimostrazione si rimanda a [1].

**Lemma 2.5.2** [D.C.Youla] *Siano  $\bar{g}_c(z)$  e  $f_p(z) \in \mathcal{S}$  funzioni razionali coprime, non nulle, e siano  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_\ell$  gli zeri reali instabili di  $f_p(z)$ , (incluso, eventualmente, lo zero all'infinito), ordinati in modo tale che per qualche intero  $t, 1 \leq t \leq \ell$ , valga*

$$1 \leq \sigma_1 < \sigma_2 < \dots < \sigma_t \leq +\infty \quad -\infty < \sigma_{t+1} < \sigma_{t+2} < \dots < \sigma_\ell \leq -1. \quad (2.36)$$

Se  $\bar{v}$  è il numero di variazioni di segno nella sequenza  $\{\bar{g}_c(\sigma_1), \bar{g}_c(\sigma_2), \dots, \bar{g}_c(\sigma_\ell)\}$ , allora

$$\min_{s \in \mathcal{S}} \delta(\bar{g}_c + s f_p) = \bar{v}. \quad (2.37)$$

Si noti che la divisione euclidea in  $\mathcal{S}$  di  $\bar{g}_c(z)$  per  $f_p(z)$  fornisce coppie quoziente/resto  $(-s, \bar{g}_c + s f_p)$  per le quali  $\delta(\bar{g}_c + s f_p) < \delta(f_p)$ , ma non garantisce l'unicità del quoziente e del resto. Il Lemma 2.5.2 fornisce precisamente il valore minimo che il grado della funzione resto può assumere al variare del quoziente  $s(z)$  in  $\mathcal{S}$ . ■

**Proposizione 2.5.3** (CONDIZIONI SU  $p(z)$  PER L'ESISTENZA DI UN COMPENSATORE STABILE STABILIZZANTE) *Siano  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_\ell$  gli zeri reali instabili di  $p(z)$ , ordinati in modo tale che per qualche intero  $t, 1 \leq t \leq \ell$ , valga*

$$1 \leq \sigma_1 < \sigma_2 < \dots < \sigma_t \leq +\infty \quad -\infty < \sigma_{t+1} < \sigma_{t+2} < \dots < \sigma_\ell \leq -1.$$

Sia  $n_i$  il numero dei **poli reali** di  $p(z)$ , contati con la loro molteplicità, compresi nell'intervallo  $(\sigma_i, \sigma_{i+1})$ , e sia  $N_{\text{disp}}$  il numero di interi dispari nella sequenza  $n_1, n_2, \dots, n_{\ell-1}$ .

Allora ogni compensatore  $c(z) \in \mathbb{R}(z)$  che stabilizzi  $p(z)$  ha almeno  $N_{\text{disp}}$  poli instabili, ed esiste almeno un compensatore stabilizzante che ne ha esattamente  $N_{\text{disp}}$ .

**DIMOSTRAZIONE** Se  $f_p/g_p$  è una rappresentazione irriducibile in  $\mathcal{S}$  di  $p(z)$  e  $(\bar{f}_c, \bar{g}_c) \in \mathcal{S}^2$  è una soluzione particolare della equazione diofantea

$$g_p g_c - f_p f_c = 1 \quad (2.38)$$

i compensatori stabilizzanti, non necessariamente propri, sono tutti e soli quelli dell'insieme

$$\mathcal{C}_s = \left\{ c(z) = \frac{\bar{f}_c(z) + s(z)g_p(z)}{\bar{g}_c(z) + s(z)f_p(z)}, s(z) \in \mathcal{S} \right\}$$

1) Dal momento che la coppia

$$g_c(z) = \bar{f}_c(z) + s(z)g_p(z), \quad f_c(z) = \bar{g}_c(z) + s(z)f_p(z)$$

è coprima in  $\mathcal{S}$  per ogni scelta di  $s(z)$ , gli (eventuali) zeri instabili di  $g_c(z) = \bar{g}_c(z) + s(z)f_p(z)$  coincidono con i poli instabili di  $c(z)$  e il loro numero complessivo, tenuto conto della molteplicità, è pari a  $\delta(\bar{g}_c + s f_p)$ .

2) Poiché la coppia  $(f_p(z), g_c(z))$  soddisfa (2.38), è coprima in  $\mathcal{S}$  e si può applicare il lemma di Youla: al variare di  $s(z)$  in  $\mathcal{S}$  il numero minimo degli zeri instabili di  $\bar{g}_c(z) + s(z)f_p(z)$ , ovvero dei poli instabili di  $c(z)$ , è dato da  $\bar{v}$ , il numero delle variazioni di segno della sequenza  $\{\bar{g}_c(\sigma_1), \bar{g}_c(\sigma_2), \dots, \bar{g}_c(\sigma_\ell)\}$ :

$$\bar{v} = \text{minimo numero di poli instabili di } c(z) \in \mathcal{C}_s$$

Per concludere, dovremo provare che  $\bar{v} = N_{\text{disp}}$ .

3) Per la coprimalità di  $f_p(z)$  e  $g_p(z)$ , gli zeri  $\sigma_i$  di  $p(z)$  sono gli zeri reali di  $f_p(z)$  appartenenti a  $\mathbb{C}_e \setminus \mathbb{D}$ ,  $i = 1, 2, \dots, \ell$ .

4) In  $\sigma_i$  ogni funzione di  $\mathcal{S}$  assume valore finito e si ha

$$\bar{g}_c(\sigma_i)g_p(\sigma_i) = \bar{g}_c(\sigma_i)g_p(\sigma_i) - \bar{f}_c(\sigma_i)f_p(\sigma_i) = 1. \quad (2.39)$$

Quindi  $\bar{g}_c(\sigma_i)$  e  $g_p(\sigma_i)$  assumono per ogni  $i$  il medesimo segno e il numero di cambiamenti di segno è  $\bar{v}$  in entrambe le sequenze

$$\{g_p(\sigma_1), g_p(\sigma_2), \dots, g_p(\sigma_\ell)\} \quad \text{e} \quad \{\bar{g}_c(\sigma_1), \bar{g}_c(\sigma_2), \dots, \bar{g}_c(\sigma_\ell)\}.$$

Il numero dei poli instabili di  $c(z)$  al variare di  $c(z) \in \mathcal{C}_s$  si può ridurre allora fino ad un minimo pari al numero delle variazioni di segno nella sequenza  $\{g_p(\sigma_1), g_p(\sigma_2), \dots, g_p(\sigma_\ell)\}$ .

5) Infine,  $g_p(\sigma_i)$  e  $g_p(\sigma_{i+1})$  hanno segno opposto se e solo se  $g_p(z)$ , pensata come funzione della variabile reale  $z$ , ha un numero dispari di zeri (contati con la loro molteplicità) in  $(\sigma_i, \sigma_{i+1})$ . Poiché gli zeri instabili di  $g_p(z)$  sono i poli instabili di  $p(z)$ ,  $g_p(\sigma_i)$  e  $g_p(\sigma_{i+1})$  hanno segno opposto se e solo se  $p(z)$  possiede un numero dispari di poli reali in  $(\sigma_i, \sigma_{i+1})$ . Ma allora  $N_{\text{disp}} = \bar{v}$ . ■

**Corollario 2.5.4** Siano  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_\ell$  gli zeri reali instabili di  $p(z)$ , ordinati in modo tale che per qualche intero  $t$ ,  $1 \leq t \leq \ell$ , valga

$$1 \leq \sigma_1 < \sigma_2 < \dots < \sigma_t \leq +\infty \quad -\infty < \sigma_{t+1} < \sigma_{t+2} < \dots < \sigma_\ell \leq -1.$$

Condizione necessaria e sufficiente perchè esista un compensatore (proprio e) stabile  $c(z)$  che rende il sistema  $\Sigma$  BIBO stabile è che la funzione di trasferimento dell'impianto  $p(z)$  goda della "parity interlacing property", ovvero tra ogni coppia di zeri reali instabili di  $p(z)$ ,  $\sigma_i$  e  $\sigma_{i+1}$ ,  $i = 1, 2, \dots, \ell - 1$  ci sia un numero pari di poli reali (ovviamente instabili) di  $p(z)$ . ■ \* >>

## 2.6 Riferimenti bibliografici

L'approccio polinomiale e in  $\mathcal{S}$  al problema del controllo e della stabilizzazione di sistemi dinamici (scalari e non) ha suscitato vivo interesse negli ultimi vent'anni e le pubblicazioni in cui compaiono risultati sull'argomento sono numerose.

Tra le monografie, menzioniamo qui

1. M.Vidyasagar "Control System Synthesis: a Factorization Approach" MIT Press, 1985
2. V.Kučera "Discrete Linear Control: the Polynomial Equation Approach" Wiley, 1979.

Una trattazione dettagliata di talune connessioni con il metodo delle variabili di stato si può reperire nei libri di più recente pubblicazione

3. V.Kučera "Analysis and Design of Discrete Linear Control Systems", Academia, Praga, 1991
4. P.Colaneri, A.Locatelli "Controllo in  $RH_2$  -  $RH_\infty$ " Pitagora Editrice, 1993