Capitolo 4

Matrici razionali

Lo studio delle matrici polinomiali svolto nel capitolo precedente consente di analizzare in modo sistematico le matrici di funzioni razionali, per affrontare poi i più importanti problemi di sintesi e di controllo dei sistemi dinamici multivariabili. Analogamente al caso scalare, in cui ogni funzione razionale può essere espressa come rapporto di polinomi, anche le matrici razionali possono essere rappresentate come "rapporti" di matrici polinomiali, ovvero come il prodotto (nell'ordine opportuno) di una matrice polinomiale e della matrice inversa di una matrice polinomiale.
Come sarà chiarito nel corso del capitolo, il concetto di rappresentazione irriducibile, quello di funzione razionale propria, le nozioni di zero e di polo, etc. trovano un parallelo nel caso matriciale, riferito alle proprietà delle matrici "numeratore" e "denominatore".

Ancora una volta, le operazioni elementari sulle righe e sulle colonne svolgono un ruolo determinante. Da esse dipende, in particolare, la costruzione della forma canonica di Smith-McMillan, che fornisce notevoli informazioni sulla struttura dinamica dei sistemi associati ad una matrice di trasferimento razionale.

4.1 Rappresentazioni matriciali fratte

Se $\mathbb{F}$ denota, come di consueto, un campo arbitrario, con la scrittura $\mathbb{F}(z)^{p\times m}$ indicheremo l'insieme delle matrici di dimensioni $p \times m$ a coefficienti nel campo $\mathbb{F}(z)$.

Data una coppia di matrici $(N(z), D(z)) \in \mathbb{F}[z]^{p\times m} \times \mathbb{F}[z]^{m\times m}$ con $D(z)$ non singolare possiamo associare ad essa la *frazione matriciale destra* $N(z)D^{-1}(z)$. Analogamente, ad una coppia $(Q(z), P(z)) \in \mathbb{F}[z]^{p\times p} \times \mathbb{F}[z]^{p\times m}$, $Q(z)$ non singolare, associamo la *frazione matriciale sinistra* $Q^{-1}(z)P(z)$. Poichè $D^{-1}(z)$

e $Q^{-1}(z)$ sono matrici di funzioni razionali, le frazioni matriciali destra e sinistra così ottenute sono elementi di $\mathbb{F}(z)^{p\times m}$. Viceversa, data una generica matrice $G(z) \in \mathbb{F}(z)^{p\times m}$, esistono coppie di matrici polinomiali $(N(z), D(z))$ e $(Q(z), P(z))$ tali che $G(z)$ sia rappresentabile nella forma

$$G(z) = N(z)D^{-1}(z) = Q^{-1}(z)P(z), \tag{4.1}$$

i.e. come frazione matriciale destra o come frazione matriciale sinistra: se $d(z)$ è il mcm dei denominatori dei suoi elementi, basta porre infatti

$$G(z) = M(z)[d(z)I_m]^{-1} = [d(z)I_p]^{-1}M(z), \tag{4.2}$$

per un'opportuna matrice polinomiale $M(z)$.

Faremo riferimento alle scritture $N(z)D^{-1}(z)$ e $Q^{-1}(z)P(z)$ come a *rappresentazioni matriciali fratte* (RMF, per brevità) rispettivamente destra e sinistra [1] di $G(z)$. Per analogia con il caso scalare, $N(z)$ e $P(z)$ verranno chiamate *matrici numeratore* mentre $D(z)$ e $Q(z)$ *matrici denominatore.*

Definizione 4.1.1 [GRADO DETERMINANTALE] *Chiamiamo grado determinantale di una frazione matriciale destra o sinistra il grado del determinante della sua matrice denominatore.*

Esempio 4.1.1 Sia $G(z)$ la matrice razionale

$$G(z) = \begin{bmatrix} \frac{1}{z} & z^2-1 & \frac{z}{z-1} \\ z & \frac{1}{z} & \frac{2z^2}{z-1} \end{bmatrix}$$

Una rappresentazione fratta destra è data da

$$M(z)[d(z)I_3]^{-1} = \begin{bmatrix} z^2-1 & z(z^2-1)^2 & z^2(z+1) \\ z^2(z^2-1) & z^2-1 & 2z^3(z+1) \end{bmatrix} [z(z^2-1)I_3]^{-1}$$

e una sinistra da

$$M(z)[d(z)I_3]^{-1} = [z(z^2-1)I_2]^{-1} \begin{bmatrix} z^2-1 & z(z^2-1)^2 & z^2(z+1) \\ z^2(z^2-1) & z^2-1 & 2z^3(z+1) \end{bmatrix}$$

Di un'assegnata matrice razionale si danno infinite rappresentazioni come frazione matriciale, sia destra che sinistra: ciò generalizza la ben nota non univocità della rappresentazione di una funzione razionale (scalare) come rapporto di polinomi. Nel seguito ci riferiremo alle rappresentazioni destre, essendo ovvio come definizioni e risultati si adattano alle rappresentazioni sinistre.

[1] In inglese "right" e "left matrix fraction descriptions".

Definizione 4.1.2 *Sia $G(z) \in \mathbb{F}(z)^{p\times m}$. Diciamo che $N_R(z)D_R^{-1}(z)$ è una rappresentazione fratta destra irriducibile (o coprima) di $G(z)$ se*

$$G(z) = N_R(z)D_R^{-1}(z),$$

e $N_R(z) \in \mathbb{F}[z]^{p\times m}$ e $D_R(z) \in \mathbb{F}[z]^{m\times m}$ sono matrici polinomiali coprime a destra.

Nel caso scalare, se

$$\frac{n_1(z)}{d_1(z)} \qquad \text{e} \qquad \frac{n_2(z)}{d_2(z)}$$

sono due rappresentazioni irriducibili della funzione razionale $g(z) \in \mathbb{F}(z)$, esiste una costante non nulla $u \in \mathbb{F}$ per la quale sono soddisfatte le eguaglianze

$$n_1(z) = n_2(z)\ u, \qquad d_1(z) = d_2(z)\ u. \tag{4.3}$$

Inoltre, una generica rappresentazione $n(z)/d(z)$ di $g(z)$ è legata a ciascuna delle rappresentazioni irriducibili, ad esempio alla $n_1(z)/d_1(z)$, dalla relazione

$$n(z) = n_1(z)p(z) \qquad d(z) = d_1(z)p(z), \tag{4.4}$$

con $p(z)$ un polinomio non nullo.
Risultati simili valgono per le frazioni matriciali, una volta che alle costanti non nulle si sostituiscano le matrici unimodulari.

Proposizione 4.1.3 [Relazioni fra le RMF destre di una matrice razionale] *(i) Per ogni matrice $G(z) \in \mathbb{F}(z)^{p\times m}$ esiste una rappresentazione fratta destra irriducibile $N_R(z)D_R^{-1}(z)$.*
(ii) Per ogni altra rappresentazione fratta destra irriducibile $N(z)D^{-1}(z)$ di $G(z)$, si ha

$$\begin{bmatrix} D(z) \\ N(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_R(z) \\ N_R(z) \end{bmatrix} U(z) \tag{4.5}$$

dove $U(z)$ è un'opportuna matrice unimodulare.
(iii) Se $N(z)D^{-1}(z)$ è un'arbitraria RMF destra di $G(z)$, si ha

$$\begin{bmatrix} D(z) \\ N(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_R(z) \\ N_R(z) \end{bmatrix} P(z) \tag{4.6}$$

per qualche $P(z) \in \mathbb{F}[z]^{m\times m}$ non singolare.

Dimostrazione (i) Se $N(z)D^{-1}(z)$ è un'arbitraria rappresentazione fratta destra di $G(z)$, ad esempio quella data in (4.2), esiste una matrice unimodulare $V(z)$ che riduce $\begin{bmatrix} D(z) \\ N(z) \end{bmatrix}$ in forma di Hermite

$$\begin{bmatrix} V_{11}(z) & V_{12}(z) \\ V_{21}(z) & V_{22}(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D(z) \\ N(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta(z) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Indicando con
$$W(z) = \begin{bmatrix} W_{11}(z) & W_{12}(z) \\ W_{21}(z) & W_{22}(z) \end{bmatrix}$$
la matrice unimodulare inversa di $V(z)$ si ottiene
$$\begin{bmatrix} D(z) \\ N(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_{11}(z) \\ W_{21}(z) \end{bmatrix} \Delta(z),$$
dove $W_{21}(z)$ e $W_{11}(z)$ sono coprime a destra, dal momento che $\begin{bmatrix} W_{11}(z) \\ W_{21}(z) \end{bmatrix}$ è completabile ad una matrice unimodulare, e $W_{11}(z)$ è non singolare essendo $D(z) = W_{11}(z)\Delta(z)$. Inoltre,
$$G(z) = N(z)D^{-1}(z) = [W_{21}(z)\Delta(z)][W_{11}(z)\Delta(z)]^{-1} = W_{21}(z)W_{11}^{-1}(z).$$
Abbiamo costruito così una rappresentazione fratta destra irriducibile $W_{21}(z)W_{11}^{-1}(z)$ di $G(z)$ a partire da una rappresentazione destra arbitraria.

(ii) e (iii) Se disponiamo di due rappresentazioni destre, $N_R(z)D_R^{-1}(z)$ e $N(z)D^{-1}(z)$, di $G(z)$, la prima delle quali irriducibile, da $N(z)D^{-1}(z) = N_R(z)D_R^{-1}(z)$ segue
$$\begin{bmatrix} D(z) \\ N(z) \end{bmatrix} D^{-1}(z) = \begin{bmatrix} D_R(z) \\ N_R(z) \end{bmatrix} D_R^{-1}(z)$$
e quindi
$$\begin{bmatrix} D(z) \\ N(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_R(z) \\ N_R(z) \end{bmatrix} [D_R^{-1}(z)D(z)].$$
Dal momento che $\begin{bmatrix} D_R(z) \\ N_R(z) \end{bmatrix}$ è prima a destra e $\begin{bmatrix} D(z) \\ N(z) \end{bmatrix}$ è una matrice polinomiale, per il punto vii) della Proposizione 3.19 $P(z) := D_R^{-1}(z)D(z)$ è polinomiale. Infine, se anche $N(z)D^{-1}(z)$ è irriducibile, valgono simultaneamente
$$\begin{bmatrix} D(z) \\ N(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_R(z) \\ N_R(z) \end{bmatrix} U(z) \qquad \text{e} \qquad \begin{bmatrix} D_R(z) \\ N_R(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D(z) \\ N(z) \end{bmatrix} Q(z)$$
per opportune matrici polinomiali quadrate $U(z)$ e $Q(z)$. Dalle equazioni precedenti segue
$$\begin{bmatrix} D(z) \\ N(z) \end{bmatrix} [I_m - U(z)Q(z)] = 0,$$
e poichè una matrice prima ha rango pieno, si ha $I_m = U(z)Q(z)$; pertanto $U(z)$ e $Q(z)$ sono unimodulari. ■

Esempio 4.1.2 La matrice razionale

$$G(z) = \begin{bmatrix} \frac{1}{z} & \frac{z+1}{z} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

è rappresentata dalla frazione matriciale destra

$$M(z)[d(z)I_2]^{-1} := \begin{bmatrix} 1 & z+1 \\ 0 & z \end{bmatrix} [zI_2]^{-1}.$$

Essa non è irriducibile dal momento che i minori di ordine massimo della matrice

$$\begin{bmatrix} d(z)I_2 \\ M(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & z \\ 1 & z+1 \\ 0 & z \end{bmatrix}$$

hanno z come fattore comune. Se consideriamo la forma di Hermite di tale matrice otteniamo

$$H(z) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & z \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & z+1 & -z & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & z \\ 1 & z+1 \\ 0 & z \end{bmatrix} =: U(z) \begin{bmatrix} d(z)I_2 \\ M(z) \end{bmatrix},$$

e quindi

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} d(z)I_2 \\ M(z) \end{bmatrix} &= U^{-1}(z)H(z) = \begin{bmatrix} z & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & z \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & z \end{bmatrix} \\ &=: \begin{bmatrix} D_R(z) \\ N_R(z) \end{bmatrix} \Delta(z), \end{aligned}$$

dove $\Delta(z)$ è un divisore comune destro massimo di $M(z)$ e $d(z)I_m$. Pertanto la frazione matriciale

$$N_R(z)D_R^{-1}(z) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

è una rappresentazione fratta destra irriducibile di $G(z)$.

Una conseguenza immediata della precedente proposizione è che nelle rappresentazioni fratte irriducibili $N_R(z)D_R^{-1}(z)$ di una matrice razionale $G(z)$ il determinante $\det D_R(z)$ della matrice denominatore è individuato univocamente a meno di una costante moltiplicativa non nulla, e per la (4.6) esso è divisore proprio di $\det D(z)$ per ogni rappresentazione destra non irriducibile $N(z)D^{-1}(z)$. Di conseguenza, le rappresentazioni irriducibili sono caratterizzabili come quelle a grado determinantale minimo.

Corollario 4.1.4 [DETERMINANTE DELLE MATRICI DENOMINATORE] *Siano $N_R(z)D_R^{-1}(z)$ e $N(z)D^{-1}(z)$ due rappresentazioni fratte destre della matrice*

$G(z) \in \mathbb{F}(z)^{p\times m}$, la prima delle quali irriducibile. Allora esiste $p(z) \in \mathbb{F}[z]$ tale che

$$\det D(z) = \det D_R(z)p(z),$$

e $N(z)D^{-1}(z)$ è irriducibile se e solo se $p(z)$ ha grado zero. ■

4.2 Relazioni tra rappresentazioni sinistre e destre e identità generalizzata di Bézout

Abbiamo analizzato finora le rappresentazioni fratte destre e rese esplicite le relazioni che le legano. In particolare, abbiamo visto che la rappresentazione fratta destra irriducibile di $G(z)$ è essenzialmente unica, essendo numeratore e denominatore individuati a meno di una matrice unimodulare, e che, a partire da una rappresentazione irriducibile $N_R(z)D_R^{-1}(z)$, tutte le rappresentazioni hanno struttura $[N_R(z)P(z)][D_R(z)P(z)]^{-1}$ con $P(z)$ un'arbitraria matrice non singolare. Poiché lo stesso può dirsi, ovviamente, per le rappresentazioni sinistre, il problema di correlare rappresentazioni destre e sinistre può dirsi risolto quando lo sia per le irriducibili. La seguente proposizione costituisce il primo passo verso tale obiettivo. Essa mostra come l'algoritmo della Proposizione 4.1.3 fornisca non solo una rappresentazione fratta destra irriducibile di $G(z)$ a partire da una destra arbitraria, ma anche una rappresentazione sinistra irriducibile di $G(z)$.

Proposizione 4.2.1 [Costruzione di una RMF sinistra da una RMF destra] *Sia $N(z)D^{-1}(z)$ una rappresentazione fratta destra di $G(z) \in \mathbb{F}(z)^{p\times m}$ e sia*

$$V(z) = \begin{bmatrix} V_{11}(z) & V_{12}(z) \\ V_{21}(z) & V_{22}(z) \end{bmatrix}$$

una matrice unimodulare che riduce $\begin{bmatrix} D(z) \\ N(z) \end{bmatrix}$ in forma di Hermite per colonne. Allora si ha

$$G(z) = -V_{22}^{-1}(z)V_{21}(z) \tag{4.7}$$

e la (4.7) è una frazione matriciale sinistra irriducibile.

Dimostrazione Come nella dimostrazione della Proposizione 4.1.3 si costruisce la forma di Hermite

$$\begin{bmatrix} V_{11}(z) & V_{12}(z) \\ V_{21}(z) & V_{22}(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D(z) \\ N(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta(z) \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{4.8}$$

e detta

$$W(z) = \begin{bmatrix} W_{11}(z) & W_{12}(z) \\ W_{21}(z) & W_{22}(z) \end{bmatrix}.$$

l'inversa di $V(z)$, dall'identità

$$\begin{bmatrix} D(z) \\ N(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_{11}(z) & W_{12}(z) \\ W_{21}(z) & W_{22}(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta(z) \\ 0 \end{bmatrix}$$

si ottiene

$$D(z) = W_{11}(z)\Delta(z) \tag{4.9}$$

che prova la non singolarità di $W_{11}(z)$. Dall'identità

$$\begin{bmatrix} I_m & V_{12}(z) \\ 0 & V_{22}(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{11}(z) & V_{12}(z) \\ V_{21}(z) & V_{22}(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_{11}(z) & 0 \\ W_{21}(z) & I_p \end{bmatrix},$$

si ricava poi

$$\det V_{22} = \det V \det W_{11}, \tag{4.10}$$

che dimostra la non singolarità di $V_{22}(z)$. Infine, dalla (4.8) si ricava

$$-V_{22}^{-1}(z)V_{21}(z) = N(z)D^{-1}(z) = G(z),$$

e la $-V_{22}^{-1}(z)V_{21}(z)$ è irriducibile dal momento che le righe di $[V_{21}(z)\ V_{22}(z)]$ appartengono alla matrice unimodulare $V(z)$. ■

Corollario 4.2.2 [Denominatori di RMF destre e di RMF sinistre irriducibili] *Siano $N_R(z)D_R^{-1}(z)$ e $Q_L^{-1}(z)P_L(z)$ rappresentazioni fratte irriducibili, rispettivamente destra e sinistra, della medesima matrice di trasferimento razionale $G(z) \in \mathbb{F}(z)^{p\times m}$. Allora $\det D_R$ e $\det Q_L$ coincidono a meno di una costante moltiplicativa (non nulla).*

Dimostrazione Si assuma nella precedente proposizione $N(z) := N_R(z)$ e $D(z) := D_R(z)$. Nella forma di Hermite (4.8), allora, la matrice $\Delta(z)$ è unimodulare e da (4.10) e (4.9) si ottiene

$$\det V_{22} = \det V \det W_{11} = \frac{\det V \det D_R}{\det \Delta} = k \det D_R,$$

con $k \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$. Dal momento che $V_{22}(z)$ è matrice denominatore in una RMF sinistra irriducibile, il risultato è provato. ■

Come conseguenza del precedente corollario, il grado determinantale minimo delle rappresentazioni destre e sinistre coincide, e può essere visto come un parametro caratteristico della matrice $G(z)$. Esso verrà indicato con la scrittura $\delta(G)$ e il suo significato in un contesto sistemistico verrà chiarito nei capitoli successivi. Qui ci limitiamo a preannunciare che $\delta(G)$ risulta strettamente legato alla forma canonica di Smith-McMillan della matrice $G(z)$, e fornisce, nel caso in cui $G(z)$ sia *propria*, ovvero le sue componenti siano tutte funzioni razionali proprie, la dimensione minima di un modello di stato (lineare e tempo invariante) avente $G(z)$ come matrice di trasferimento.

La risposta completa al problema di mettere in relazione tra loro rappresentazioni irriducibili di una assegnata matrice razionale $G(z)$ è fornita dall'*identità generalizzata di Bézout* di cui ci avvarremo nel seguito.

- Esercizio 4.2.1 Si supponga che i polinomi caratteristici delle matrici $F \in \mathbb{F}^{m\times m}$ e $A \in \mathbb{F}^{p\times p}$ siano coprimi (ossia, equivalentemente, le due matrici non hanno autovalori comuni nella chiusura algebrica di $\mathbb{F}$).

  (i) Si verifichi che l'equazione
  $$(zI_m - F)X = X(zI_p - A)$$
  nell'incognita $X \in \mathbb{F}^{m\times p}$ ammette soltanto la soluzione nulla.

  (Suggerimento. Se $N(z)D^{-1}(z)$ è una RMF destra irriducibile di $X(zI_p - A)^{-1}$, $\det D$ è un divisore del polinomio caratteristico di A. Da $N(z)D^{-1}(z) = (zI_m - F)^{-1}X$ segue che $\det D$ è anche divisore del polinomio caratteristico di F, quindi $D(z)$ è unimodulare. Allora si ha $X = (zI_m - F)N(z)D^{-1}(z) = (zI_m - F)\tilde{N}(z)$ con $\tilde{N}(z)$ polinomiale, e tale identità può essere soddisfatta da una matrice costante X se e solo se $X = \tilde{N}(z) = 0$)

  (ii) L'equazione $FX - XA = 0$ ammette soltanto la soluzione nulla.

  (iii) L'equazione $FX - XA = C$ ammette una e una sola soluzione per ciascun $C \in \mathbb{F}^{m\times p}$

  (Suggerimento: la mappa lineare $\psi : \mathbb{F}^{m\times p} \to \mathbb{F}^{m\times p} : X \mapsto FX - XA$ è iniettiva, quindi suriettiva)

  (iv) Per ogni matrice $C \in \mathbb{F}^{m\times p}$, sono simili le matrici
  $$\begin{bmatrix} F & 0 \\ C & A \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} F & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}$$
  (Suggerimento: si cerchi una matrice di cambiamento di base del tipo $\begin{bmatrix} I_m & 0 \\ X & I_p \end{bmatrix}$).

Proposizione 4.2.3 [Identità generalizzata di Bézout] *Siano $N_R(z)D_R^{-1}(z)$ e $Q_L^{-1}(z)P_L(z)$ rappresentazioni fratte irriducibili, rispettivamente destra e sinistra, della matrice di trasferimento razionale $G(z) \in \mathbb{F}(z)^{p\times m}$. Allora esistono matrici polinomiali $X(z), \tilde{X}(z), Y(z)$ e $\tilde{Y}(z)$, di opportune dimensioni, per le quali vale*
$$\begin{bmatrix} -X(z) & Y(z) \\ P_L(z) & Q_L(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -D_R(z) & \tilde{Y}(z) \\ N_R(z) & \tilde{X}(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix}. \tag{4.11}$$

Dimostrazione Se $N_R(z)D_R^{-1}(z)$ e $Q_L^{-1}(z)P_L(z)$ sono rappresentazioni fratte di $G(z)$ si ha
$$Q_L(z)N_R(z) - P_L(z)D_R(z) = 0$$

ovvero, in forma matriciale,

$$\begin{bmatrix} P_L(z) & Q_L(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -D_R(z) \\ N_R(z) \end{bmatrix} = 0. \tag{4.12}$$

Poiché $N_R(z)$ e $D_R(z)$ sono matrici coprime a destra, per la Proposizione 3.2.5 esistono matrici polinomiali $X(z)$ e $Y(z)$ tali che

$$X(z)D_R(z) + Y(z)N_R(z) = I_m. \tag{4.13}$$

Similmente, esistono matrici polinomiali $\hat{X}(z)$ e $\hat{Y}(z)$ per le quali si ha

$$P_L(z)\hat{Y}(z) + Q_L(z)\hat{X}(z) = I_p. \tag{4.14}$$

Mettendo assieme le (4.12), (4.13) e (4.14) si ricava

$$\begin{bmatrix} -X(z) & Y(z) \\ P_L(z) & Q_L(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -D_R(z) & \hat{Y}(z) \\ N_R(z) & \hat{X}(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m & V(z) \\ 0 & I_p \end{bmatrix},$$

con $V(z)$ matrice polinomiale. Postmoltiplicando entrambi i membri della precedente equazione per la matrice unimodulare

$$\begin{bmatrix} I_m & -V(z) \\ 0 & I_p \end{bmatrix},$$

si ottiene la (4.11) con $\tilde{X}(z) := \hat{X}(z) - N_R(z)V(z)$ e $\tilde{Y}(z) := \hat{Y}(z) + D_R(z)V(z)$.
■

4.3 Forma canonica di Smith-McMillan

Come abbiamo visto nel Capitolo 3, ogni matrice polinomiale $M(z)$ di dimensioni $p \times m$, può essere ridotta attraverso operazioni elementari su righe e colonne alla sua forma canonica di Smith, ovvero ad una struttura (pseudo)diagonale del tipo

$$\Gamma(z) = \left[\begin{array}{cccc|c} \gamma_1(z) & & & & \\ & \gamma_2(z) & & & 0 \\ & & \ddots & & \\ & & & \gamma_r(z) & \\ \hline & & 0 & & 0 \end{array}\right], \tag{4.15}$$

dove r è il rango di $M(z)$ e i $\gamma_i(z)$ sono i polinomi monici invarianti di $M(z)$ che soddisfano le condizioni di divisibilità $\gamma_i(z) \,|\gamma_{i+1}(z)$, $i = 1, 2, \dots, r-1$. Per comodità di notazione una matrice avente la struttura di $\Gamma(z)$ in (4.15) sarà denotata nel seguito con

$$\mathrm{diag}\{\gamma_1(z), \gamma_2(z), \dots, \gamma_r(z)\}_{p\times m}. \tag{4.16}$$

Se $G(z)$ è un'arbitraria matrice $p \times m$, ad elementi in $\mathbb{F}(z)$, è possibile trovare una famiglia finita di operazioni elementari, da applicare alle sue righe e alle sue colonne, così da portarla in forma diagonale. In questo caso gli elementi sulla diagonale sono razionali, e le condizioni di divisibilità coinvolgono sia i numeratori che denominatori delle loro rappresentazioni irriducibili. Se estendiamo a $\mathbb{F}(z)^{p\times m}$ la relazione di equivalenza $\sim$ introdotta nel precedente capitolo, ponendo $G(z) \sim F(z)$ se $G(z)$ ed $F(z)$ sono matrici razionali ottenute l'una dall'altra attraverso operazioni elementari sulle righe e sulle colonne, ogni classe di equivalenza in $\mathbb{F}(z)^{p\times m}/\sim$ contiene una ed una sola matrice diagonale del tipo sopra descritto, che sarà a buon diritto chiamata “forma canonica” di Smith-McMillan degli elementi della classe.

Teorema 4.3.1 [Forma canonica di Smith-McMillan] *Sia $G(z)$ una matrice in $\mathbb{F}(z)^{p\times m}$ di rango r. Allora esistono matrici unimodulari $U(z) \in \mathbb{F}[z]^{p\times p}$ e $V(z) \in \mathbb{F}[z]^{m\times m}$ tali che*

$$S(z) := U(z)G(z)V(z) = \mathrm{diag}\left\{\frac{\varepsilon_1(z)}{\psi_1(z)}, \frac{\varepsilon_2(z)}{\psi_2(z)}, \dots \frac{\varepsilon_r(z)}{\psi_r(z)}\right\}_{p\times m}, \tag{4.17}$$

dove $\varepsilon_1(z), \varepsilon_2(z), \dots, \varepsilon_r(z), \psi_1(z), \psi_2(z), \dots, \psi_r(z) \in \mathbb{F}[z]$ sono polinomi monici soddisfacenti le condizioni

- *$\varepsilon_i(z)$ e $\psi_i(z)$ sono coprimi, $i = 1, 2, ..., r$;*
- *$\varepsilon_i(z) \mid \varepsilon_{i+1}(z)$ e $\psi_{i+1}(z) \mid \psi_i(z)$, $i = 1, 2, ..., r-1$.*

Dimostrazione Se $d(z)$ è il mcm monico dei denominatori degli elementi di $G(z)$, $M(z) := d(z)G(z)$ è una matrice polinomiale di rango r ed esistono quindi matrici unimodulari $U(z)$ e $V(z)$ che, applicate a $M(z)$, la riducono in forma di Smith

$$U(z)M(z)V(z) = \mathrm{diag}\{\gamma_1(z), \gamma_2(z), \dots, \gamma_r(z)\}_{p\times m}, \tag{4.18}$$

dove $\gamma_i(z)$ sono i polinomi monici invarianti di $M(z)$. Dividendo entrambi i membri della (4.18) per $d(z)$ si ottiene

$$U(z)G(z)V(z) = \mathrm{diag}\left\{\frac{\gamma_1(z)}{d(z)}, \frac{\gamma_2(z)}{d(z)}, \dots, \frac{\gamma_r(z)}{d(z)}\right\}_{p\times m}. \tag{4.19}$$

Se $\varepsilon_i(z)/\psi_i(z)$ è una rappresentazione irriducibile di $\gamma_i(z)/d(z)$, con $\varepsilon_i(z)$ e $\psi_i(z)$ entrambi monici, dalle condizioni di divisibilità dei polinomi $\gamma_i(z)$ seguono subito quelle dei polinomi $\varepsilon_i(z)$ e $\psi_i(z)$. ■

Dall'unicità della forma canonica di Smith di una matrice polinomiale segue quella della forma canonica di Smith-McMillan. I dettagli della dimostrazione vengono lasciati per esercizio.

- Esercizio 4.3.1 Sia $G(z) \in \mathbb{F}(z)^{p\times m}$. Si dimostri che la sua forma canonica di Smith-McMillan è unica.

  (Suggerimento: chiaramente r è determinato dal rango di $G(z)$. Siano poi

  $$S(z) = U(z)G(z)V(z) = \mathrm{diag}\left\{\frac{\varepsilon_1(z)}{\psi_1(z)}, \frac{\varepsilon_2(z)}{\psi_2(z)}, \dots, \frac{\varepsilon_r(z)}{\psi_r(z)}\right\}_{p\times m}$$

  e

  $$\tilde{S}(z) = \tilde{U}(z)G(z)\tilde{V}(z) = \mathrm{diag}\left\{\frac{\tilde{\varepsilon}_1(z)}{\tilde{\psi}_1(z)}, \frac{\tilde{\varepsilon}_2(z)}{\tilde{\psi}_2(z)}, \dots, \frac{\varepsilon_r\tilde{(z)}}{\tilde{\psi}_r(z)}\right\}_{p\times m}$$

  due forme di Smith-McMillan di $G(z)$. Si noti che $S(z)\psi_1(z)\tilde{\psi}_1(z)$ e $\tilde{S}(z)\psi_1(z)\tilde{\psi}_1(z)$ sono entrambe polinomiali e in forma di Smith. Inoltre l'eguaglianza

  $$\begin{aligned}\psi_1(z)\tilde{\psi}_1(z)S(z) &= U(z)\left[\psi_1(z)\tilde{\psi}_1(z)G(z)\right]V(z)\\ &= U(z)\left[\tilde{U}^{-1}(z)\psi_1(z)\tilde{\psi}_1(z)\tilde{S}(z)\tilde{V}^{-1}(z)\right]V(z)\\ &= \left[U(z)\tilde{U}^{-1}(z)\right]\left[\psi_1(z)\tilde{\psi}_1(z)\tilde{S}(z)\right]\left[\tilde{V}^{-1}(z)V(z)\right]\end{aligned}$$

  implica che le due forme di Smith siano equivalenti, quindi uguali, ovvero

  $$\psi_1(z)\tilde{\psi}_1(z)\frac{\varepsilon_i(z)}{\psi_i(z)} = \psi_1(z)\tilde{\psi}_1(z)\frac{\tilde{\varepsilon}_i(z)}{\tilde{\psi}_i(z)}, \quad i = 1, 2, \dots, r.$$

  Ma allora si ha

  $$\frac{\varepsilon_i(z)}{\psi_i(z)} = \frac{\tilde{\varepsilon}_i(z)}{\tilde{\psi}_i(z)}, \quad i = 1, 2, \dots, r. \;)$$

- Esercizio 4.3.2 i) Se $G(z) \in \mathbb{F}(z)^{p\times m}$ è propria, allora nella sua forma di Smith-McMillan è propria la funzione razionale ε_1/ψ_1.

  (Suggerimento: se $d(z)$ è il mcm dei denominatori di $G(z)$, in $d(z)G(z) = M(z)$ si ha $\deg d \geq \deg m_{ij}$. Si usi $\varepsilon_1/\psi_1 = \mathrm{MCD}\{m_{ij}(z)\}/d(z)$)

  ii) Si dimostri che la forma di Smith-McMillan della matrice razionale propria

  $$\begin{bmatrix} \dfrac{1}{(z+1)^2} & \dfrac{1}{(z+1)(z+2)} \\ \dfrac{1}{(z+1)(z+2)} & \dfrac{z+3}{(z+2)^2} \end{bmatrix}$$

  è $\mathrm{diag}\{1/(z+1)^2(z+2)^2,\ z+2\}$, quindi non propria.)

Dalla forma canonica di Smith McMillan è immediato ottenere una particolare RMF destra (o sinistra) irriducibile di $G(z)$ e calcolare i polinomi invarianti delle matrici numeratore e denominatore di un'arbitraria RMF destra irriducibile di $G(z)$. Vale infatti la seguente

Proposizione 4.3.2 [Forma di Smith-McMillan e polinomi invarianti] *Siano*

$$S(z) = U(z)G(z)V(z) = \operatorname{diag}\left\{\frac{\varepsilon_1(z)}{\psi_1(z)}, \frac{\varepsilon_2(z)}{\psi_2(z)}, \cdots, \frac{\varepsilon_r(z)}{\psi_r(z)}\right\}_{p\times m}$$

la forma canonica di Smith-McMillan e $N_R(z)D_R^{-1}(z)$ una rappresentazione fratta destra irriducibile della matrice $G(z) \in \mathbb{F}(z)^{p\times m}$. Allora i polinomi $\varepsilon_1(z)$, $\varepsilon_2(z)$, $\ldots, \varepsilon_r(z)$ sono i polinomi invarianti di $N_R(z)$ e i polinomi non unitari nella lista $\psi_1(z), \psi_2(z), \ldots, \psi_r(z)$ sono i polinomi invarianti non unitari di $D_R(z)$.

Dimostrazione La matrice $S(z)$ può essere espressa come frazione matriciale destra nella forma

$$\begin{aligned} S(z) &= \operatorname{diag}\{\varepsilon_1(z), \varepsilon_2(z), \ldots, \varepsilon_r(z)\}_{p\times m}\operatorname{diag}\{\psi_1(z), \psi_2(z), \ldots, \psi_r(z), 1, \ldots, 1\}_{m\times m}^{-1} \\ &=: \mathcal{E}(z)\Psi^{-1}(z). \end{aligned} \tag{4.20}$$

Tale rappresentazione fratta è irriducibile. Infatti la coprimalità delle coppie di polinomi $(\varepsilon_i(z), \psi_i(z))$ implica l'esistenza di polinomi $x_i(z)$ e $y_i(z) \in \mathbb{F}[z]$ soddisfacenti le identità

$$x_i(z)\psi_i(z) + y_i(z)\varepsilon_i(z) = 1,$$

$i = 1, 2, \ldots, r$, e di conseguenza si ha

$$\begin{bmatrix} x_1(z) & & & & & y_1(z) & & & & \\ & \ddots & & & & & \ddots & & & \\ & & x_r(z) & & & & & y_r(z) & & \\ & & & 1 & & & & & 0 & \\ & & & & \ddots & & & & & \ddots \\ & & & & & 1 & & & & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi(z) \\ \mathcal{E}(z) \end{bmatrix} = I_m.$$

Pertanto $\mathcal{E}(z)$ e $\Psi(z)$ sono coprime a destra. Ma allora in

$$G(z) = U^{-1}(z)\left[\mathcal{E}(z)\Psi^{-1}(z)\right]V^{-1}(z) = [U^{-1}(z)\mathcal{E}(z)][V(z)\Psi(z)]^{-1}, \tag{4.21}$$

$[U^{-1}(z)\mathcal{E}(z)][V(z)\Psi(z)]^{-1}$ è una RMF irriducibile di $G(z)$, essendo prima a destra la matrice

$$\begin{bmatrix} U^{-1}(z)\mathcal{E}(z) \\ V(z)\Psi(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U^{-1}(z) & 0 \\ 0 & V(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{E}(z) \\ \Psi(z) \end{bmatrix}.$$

Poichè numeratore e denominatore di due rappresentazioni destre irriducibili della stessa matrice differiscono per il medesimo fattore destro unimodulare, esiste una matrice unimodulare $W(z)$ tale che

$$N_R(z) = [U^{-1}(z)\mathcal{E}(z)]W(z) \tag{4.22}$$

$$D_R(z) = [V(z)\Psi(z)]W(z). \tag{4.23}$$

Dalla (4.22) segue che $N_R(z)$ è una matrice equivalente a $\mathcal{E}(z)$, che è in forma canonica di Smith, ed $\varepsilon_i(z)$ sono i polinomi invarianti di $N_R(z)$.
La matrice $\Psi(z)$ non è in forma canonica di Smith, perché ciascun polinomio sulla diagonale divide il precedente, anziché il successivo. Per ottenere la forma canonica di Smith di $D_R(z)$ è sufficiente peraltro ricorrere a una permutazione righe-colonne. I polinomi $\psi_i(z)$ non costanti sono allora i polinomi invarianti non costanti di $D_R(z)$. ■

Ovviamente, $S(z)$ può essere rappresentata anche come frazione matriciale (irriducibile) sinistra ponendo

$$S(z) = \text{diag}\{\psi_1(z), \psi_2(z), \dots, \psi_r(z), 1, \dots, 1\}^{-1}_{p\times p}\text{diag}\{\varepsilon_1(z), \varepsilon_2(z), \dots, \varepsilon_r(z)\}_{p\times m}.$$

Quindi gli $\varepsilon_i(z)$ sono anche i polinomi invarianti della matrice numeratore e i $\psi_i(z)$ (completati eventualmente con elementi unitari) i polinomi invarianti della matrice denominatore di ogni rappresentazione matriciale fratta irriducibile sinistra di $G(z)$.

- Esercizio 4.3.3 Siano $N_R(z)D_R^{-1}(z)$ e $Q_L^{-1}(z)P_L(z)$ due RMF irriducibili di $W(z) \in \mathbb{F}(z)^{p\times m}$. Si provi che i polinomi invarianti non unitari di $D_R(z)$ e $Q_L(z)$ coincidono.
- Esercizio 4.3.4 Se $G(z) \in \mathbb{F}(z)^{p\times m}$ ha rango m, allora le seguenti condizioni sono equivalenti:

  i) $G(z)$ ammette un'inversa sinistra polinomiale;

  ii) se $\mathbf{u}(z) \in \mathbb{F}(z)^m$ è tale che $G(z)\mathbf{u}(z) \in \mathbb{F}[z]^p$, allora $\mathbf{u}(z) \in \mathbb{F}[z]^m$;

  iii) se $N(z)D^{-1}(z)$ è una RMF irriducibile di $G(z)$ allora $N(z)$ è prima a destra;

  iv) nella forma canonica di Smith McMillan di $G(z)$ si ha $\epsilon_i(z) = 1,\ i = 1, 2, \dots m$;

  (Suggerimento: i) $\Rightarrow$ ii) immediato
  ii) $\Rightarrow$ iii) Sia $\mathbf{v}(z) \in \mathbb{F}(z)^m$. Se $N(z)\mathbf{v}(z)$ è polinomiale, lo è $D(z)\mathbf{v}(z)$ per il punto (ii). Poiché $\begin{bmatrix} N(z) \\ D(z) \end{bmatrix}\mathbf{v}(z)$ è polinomiale e $\begin{bmatrix} N(z) \\ D(z) \end{bmatrix}$ è prima a destra, $\mathbf{v}(z)$ deve essere polinomiale. Quindi $N(z)$ soddisfa uno dei criteri di primalità a destra;
  iii) $\Leftrightarrow$ iv) in una rappresentazione matriciale irriducibile di $G(z)$ i polinomi invarianti di $N(z)$ coincidono con i numeratori $\varepsilon_i(z),\ i = 1, 2, \dots, m$ della forma canonica di Smith McMillan di $G(z)$. Se $N(z)$ è prima a destra, ha m polinomi invarianti unitari; viceversa, se $N(z)$ ha m polinomi invarianti unitari, è prima a destra.
  iii) $\Rightarrow$ i) Da $G(z) = N(z)D(z)^{-1}$, se $P(z)N(z) = I_m$ con $P(z)$ polinomiale, si ha $[D(z)P(z)][N(z)D(z)^{-1}] = I_m$).

4.4 << * Poli e zeri di una matrice razionale

Com'è noto, data una funzione razionale $g(z) \in \mathbb{F}(z)$ ed una sua rappresentazione irriducibile $n(z)/d(z)$, i poli e gli zeri di $g(z)$ (nella chiusura algebrica $\bar{\mathbb{F}}$ di $\mathbb{F}$) coincidono, rispettivamente, con gli zeri di $d(z)$ e di $n(z)$.
Nel caso di matrici razionali le nozioni di polo e di zero possono essere introdotte in modi diversi, non tutti equivalenti. Le definizioni adottate qui hanno, come vedremo, un concreto significato dal punto di vista sistemistico.

4.4.1 Indici strutturali

Definizione 4.4.1 [Zeri e poli di una matrice razionale] *Sia $G(z) \in \mathbb{F}(z)^{p\times m}$ e sia*

$$S(z) = \operatorname{diag}\left\{ \frac{\varepsilon_1(z)}{\psi_1(z)}, \frac{\varepsilon_2(z)}{\psi_2(z)}, \dots \frac{\varepsilon_r(z)}{\psi_r(z)} \right\}_{p\times m},$$

la sua forma canonica di Smith-McMillan. Il punto $\alpha \in \bar{\mathbb{F}}$ è uno zero della matrice $G(z)$ se è zero di almeno uno dei polinomi $\varepsilon_i(z)$, è un polo della matrice $G(z)$ se è zero di almeno uno dei polinomi $\psi_i(z)$.

Dalle condizioni di divisibilità sui polinomi $\varepsilon_i(z)$ e $\psi_i(z)$, $i = 1, 2, \dots, r$ è immediato che gli zeri di $G(z)$ coincidono con gli zeri di $\varepsilon_r(z)$, e i poli di $G(z)$ con gli zeri di $\psi_1(z)$. Va inoltre osservato che, a differenza di quanto accade nel caso scalare, l'insieme dei poli e quello degli zeri possono non essere disgiunti.

Esempio 4.4.1 Nella forma di Smith-McMillan

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{z-2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{z+1}{z-2} & 0 \\ 0 & 0 & (z+1)^2(z-2) \end{bmatrix}$$

$\alpha_1 = -1$ è uno zero, mentre $\alpha_2 = 2$ è sia zero che polo.

Nel caso scalare è possibile ricostruire una funzione razionale, a meno di una costante in $\mathbb{F}$, una volta che siano noti i suoi poli e i suoi zeri con la relativa molteplicità. Infatti ogni funzione razionale $g(z) \in \mathbb{F}(z)$ può essere espressa nella forma

$$g(z) = K(z-\alpha_1)^{\nu_1}(z-\alpha_2)^{\nu_2}\cdots(z-\alpha_t)^{\nu_t},$$

dove α_i sono elementi di $\bar{\mathbb{F}}$, $\nu_i \in \mathbb{Z}$ le valutazioni di $g(z)$ in α_i , $i = 1, 2, \dots, t$, e K è un elemento di $\mathbb{F}$.

Nel caso matriciale, la ricostruzione della forma canonica di Smith-McMillan (e quindi di $G(z)$ a meno di fattori unimodulari) richiede che in corrispondenza a ciascuno zero e polo di $G(z)$ venga assegnata la stringa dei suoi "indici strutturali", ovvero delle valutazioni delle funzioni razionali ε_j/ψ_j
Se $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t \in \bar{\mathbb{F}}$ sono gli zeri e i poli di $G(z) \in \mathbb{F}(z)^{p\times m}$ e la forma di Smith-McMillan $S(z)$ di $G(z)$ è

$$\operatorname{diag}\{(z-\alpha_1)^{\nu_1^{(1)}}\cdots(z-\alpha_t)^{\nu_t^{(1)}}, (z-\alpha_1)^{\nu_1^{(2)}}\cdots(z-\alpha_t)^{\nu_t^{(2)}}, ..., (z-\alpha_1)^{\nu_1^{(r)}}\cdots(z-\alpha_t)^{\nu_t^{(r)}}\}_{p\times m},$$

gli esponenti interi
$$\nu_i^{(1)} \;\le\; \nu_i^{(2)} \;\le\; \dots \;\le\; \nu_i^{(r)}, \qquad i = 1, 2, \dots, t,$$
sono detti *indici strutturali di* $G(z)$ *in* α_i.

Si noti che gli elementi di $\bar{\mathbb{F}}$ in corrispondenza ai quali gli indici strutturali assumono sia valori negativi che positivi sono simultaneamente zeri e poli di $G(z)$, mentre sono soltanto poli (zeri) quelli in corrispondenza ai quali gli indici strutturali assumono soltanto valori negativi, ed eventualmente nulli (positivi, ed eventualmente nulli).

Esempio 4.4.1 (cont.) Con riferimento all'esempio precedente, si ha $\alpha_1 = -1$ e $\alpha_2 = 2$. I corrispondenti indici strutturali sono
$$\begin{array}{lll} \nu_1^{(1)} = 0, & \nu_1^{(2)} = 1, & \nu_1^{(3)} = 2 \\ \nu_2^{(1)} = -1, & \nu_2^{(2)} = -1, & \nu_2^{(3)} = 1. \end{array}$$

4.4.2 Caratterizzazioni di poli e zeri

La definizione di poli e zeri che abbiamo dato è basata sulla forma canonica di Smith-McMillan. Dal momento che esistono vari modi di rappresentare la medesima matrice razionale, è utile disporre di definizioni equivalenti, adatte al particolare contesto in cui ci si trova ad operare. Ci proponiamo di descrivere qui di seguito poli e zeri di una matrice razionale $G(z)$ facendo riferimento alla sua rappresentazione come matrice di funzioni razionali e alle sue rappresentazioni fratte irriducibili.

Proposizione 4.4.2 [Struttura dei poli] *Sia* $N_R(z)D_R^{-1}(z)$ *una RMF destra irriducibile della matrice* $G(z) = [g_{ij}(z)] \in \mathbb{F}(z)^{p\times m}$ *e sia* α *un elemento di* $\bar{\mathbb{F}}$. *Sono fatti equivalenti:*

i) α *è un polo di* $G(z)$*;*

ii) α *è uno zero di* $\det D_R$*;*

iii) α *è un polo di qualche elemento* $g_{ij}(z)$ *di* $G(z)$.

Dimostrazione i) $\Leftrightarrow$ ii) Per la Peoposizione 4.3.5, $D_R(z)$ è equivalente alla matrice $\Psi(z)$, ovvero esistono matrici unimodulari $V(z)$ e $W(z)$ tali che
$$D_R(z) = V(z)\Psi(z)W(z),$$
e quindi $\det D_R = \det V \det \Psi \det W = k \cdot \det \Psi,\ k \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$. Ma allora $\det D_R$ si annulla in α se e solo se almeno uno dei polinomi $\psi_i(z)$ sulla diagonale di $\Psi(z)$ si annulla in α, ovvero se e solo se α è un polo di $G(z)$.

ii) $\Leftrightarrow$ iii) Sia $n_{ij}(z)/d_{ij}(z)$ una rappresentazione irriducibile del generico elemento $g_{ij}(z)$ di $G(z)$ e sia
$$d(z) := \mathrm{mcm}\{d_{ij}(z) : i = 1, 2, \dots, p;\ j = 1, 2, \dots, m\}.$$
La matrice $G(z)$ può essere espressa nella forma $G(z) = M(z)/d(z)$ per un'opportuna matrice polinomiale $M(z)$ e α è polo di qualche componente $g_{ij}(z)$ se e solo se è zero di qualche polinomio d_{ij}, avvero se e solo se è zero di $d(z)$. È sufficiente allora mostrare che $d(z)$ e $\det D_R(z)$ hanno gli stessi zeri (non necessariamente con la stessa molteplicità).

Dal momento che i polinomi dell'insieme $\{d(z), m_{11}(z) \dots m_{pm}(z)\}$ non hanno fattori comuni, esistono polinomi $y(z)$ e $x_{ij}(z),\ i = 1, \dots, p;\ j = 1, \dots, m$ tali che
$$\sum_{i.j} x_{ij}(z)m_{ij}(z) = 1 + d(z)y(z)$$

Dalla condizione

$$M(z)\frac{1}{d(z)} = N_R(z)D_R^{-1}(z) = N_R(z)\mathrm{adj}D_R(z)\frac{1}{\det D_R},$$

denotando con $p_{ij}(z)$ gli elementi della matrice polinomiale $N_R(z)\mathrm{adj}D_R(z)$ segue allora $1 + d(z)y(z)\det D_R = (\sum_{ij} x_{ij}(z)p_{ij}(z))d(z)$ ovvero

$$d(z)[\sum_{ij} x_{ij}(z)p_{ij}(z) - y(z)\det D_R] = \det D_R.$$

Ma allora, se α è uno zero di $d(z)$, lo è anche di $\det D_R$.
D'altra parte dall'eguaglianza

$$G(z) = N_R(z)D_R^{-1}(z) = M(z)[d(z)I_m]^{-1}$$

segue che $M(z)[d(z)I_m]^{-1}$ è una RMF destra di $G(z)$ e quindi, per il Corollario 4.5, esiste $p(z) \in \mathbb{F}[z]$ tale che

$$d(z)^m = p(z)\det D_R.$$

Pertanto se α è uno zero di $\det D_R$ lo è anche di $d(z)^m$, e quindi di $d(z)$. ■

Esempio 4.4.2 Consideriamo la matrice razionale

$$G(z) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{z-1}{z+4} & \frac{1}{z+4} & 0 \\ (z-1)^2 & 0 & (z-1)^2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}(z)^{3\times 3}.$$

Le componenti di $G(z)$ che hanno poli sono $g_{21}(z)$ e $g_{22}(z)$, il cui denominatore si annulla in -4. In accordo con ciò, il mcm dei denominatori è $d(z) = z + 4$.
La forma canonica di Smith-McMillan di $G(z)$ è

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{z+4} & 0 & 0 \\ 0 & z-1 & 0 \\ 0 & 0 & (z-1)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & z-1 & 0 \\ 0 & 0 & (z-1)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z+4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1},$$

e -4 è l'unico zero di $\psi_1(z) = z + 4$.
Infine una RMF destra irriducibile di $G(z)$ è data da

$$N_R(z)D_R^{-1}(z) = \begin{bmatrix} z+4 & z-1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (z-1)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ z+4 & z-1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1},$$

e $\det D_R = -(z + 4)$.

Come si è avuto modo di accennare nel corso della precedente dimostrazione, gli zeri dei polinomi $d(z)$ e $\det D_R$ sono i medesimi ma in generale hanno molteplicità diverse, come illustrato dal seguente esempio.

- **Esempio 4.4.3** Nella matrice razionale

$$G(z) = \begin{bmatrix} \frac{1}{z+1} & \frac{1}{z+1} \\ 0 & \frac{1}{z+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z+1 & 0 \\ 0 & z+1 \end{bmatrix}^{-1} = N_R(z)D_R^{-1}(z)$$

il mcm dei denominatori degli elementi di $G(z)$ è $d(z) = z+1$, mentre la frazione matriciale $N_R(z)D_R^{-1}(z)$ è irriducibile con $\det D_R = (z + 1)^2$.

- ESERCIZIO 4.4.1 Si dimostri che se $n_{ij}(z)/d_{ij}(z)$ è una rappresentazione irriducibile del generico elemento $g_{ij}(z)$ di $G(z)$ e $d(z) := \text{mcm}\{d_{ij}(z) : i = 1, 2, \dots, p; j =, 2, \dots, m\}$, allora $d(z) = \psi_1(z)$. Si sfrutti questo fatto per provare direttamente l'equivalenza dei punti i) e iii) della Proposizione 4.4.4.

La caratterizzazione degli zeri di una matrice razionale si basa sulla nozione di valutazione, di cui abbiamo discusso le principali proprietà nel primo capitolo. Il seguente lemma fornisce un legame fra le valutazioni dei minori di una matrice razionale e quelle dei minori della sua forma di Smith McMillan, e più in generale di ogni altra matrice razionale ad essa equivalente.

Lemma 4.4.3 *Sia*

$$S(z) = U(z)G(z)V(z) = \text{diag}\left\{\frac{\varepsilon_1(z)}{\psi_1(z)}, \frac{\varepsilon_2(z)}{\psi_2(z)}, \dots \frac{\varepsilon_r(z)}{\psi_r(z)}\right\}_{p\times m},$$

la forma canonica di Smith-McMillan della matrice $G(z) \in \mathbb{F}(z)^{p\times m}$. Per ogni intero positivo ℓ e per ogni coppia di ℓ-uple **i** *e* **j**, *indichiamo con $g^{(\ell)}_{\mathbf{ij}}$ e $s^{(\ell)}_{\mathbf{ij}}$ i minori di ordine ℓ, rispettivamente di $G(z)$ e di $S(z)$, ottenuti selezionando le righe i cui indici compaiono in* **i** *e le colonne i cui indici compaiono in* **j**. *Allora per ogni $\alpha \in \bar{\mathbb{F}}$ si ha*

$$\tilde{v}^{(\ell)}_\alpha := \min_{\mathbf{ij}} v_\alpha(s^{(\ell)}_{\mathbf{ij}}) = \min_{\mathbf{ij}} v_\alpha(g^{(\ell)}_{\mathbf{ij}}) =: v^{(\ell)}_\alpha. \tag{4.24}$$

DIMOSTRAZIONE Applicando il Teorema di Binet-Cauchy alla espressione $S(z) = U(z)G(z)V(z)$, si ottiene che per ogni intero positivo ℓ il generico minore di ordine ℓ di $S(z)$, $s^{(\ell)}_{\mathbf{ij}}$, è esprimibile nella forma

$$s^{(\ell)}_{\mathbf{ij}} = \sum_{\mathbf{h},\mathbf{k}} m^{(\ell)}_{\mathbf{ih}}(U)g^{(\ell)}_{\mathbf{hk}}m^{(\ell)}_{\mathbf{kj}}(V), \tag{4.25}$$

dove $m^{(\ell)}_{\mathbf{ih}}(U)$ e $m^{(\ell)}_{\mathbf{kj}}(V)$ sono minori di ordine ℓ delle matrici polinomiali unimodulari $U(z)$ e $V(z)$. Dalle proprietà della valutazione e dalla (4.25) segue

$$v_\alpha(s^{(\ell)}_{\mathbf{ij}}) \geq \min_{\mathbf{h},\mathbf{k}\in\mathbb{N}^\ell} v_\alpha(m^{(\ell)}_{\mathbf{ih}}(U)g^{(\ell)}_{\mathbf{hk}}m^{(\ell)}_{\mathbf{kj}}(V)) \geq \min_{\mathbf{h},\mathbf{k}\in\mathbb{N}^\ell} v_\alpha(g^{(\ell)}_{\mathbf{hk}}) = v^{(\ell)}_\alpha,$$

per ogni ℓ-upla ammissibile **i** e **j**, e quindi

$$\tilde{v}^{(\ell)}_\alpha \geq v^{(\ell)}_\alpha.$$

Applicando il Teorema di Binet-Cauchy alla espressione $G(z) = U^{-1}(z)S(z)\ V^{-1}(z)$, si ottiene la diseguaglianza opposta e il lemma è provato. ■

Proposizione 4.4.4 [STRUTTURA DEGLI ZERI] *Sia $N_R(z)D_R^{-1}(z)$ una RMF destra irriducibile della matrice razionale di rango r $G(z) = [g_{ij}(z)] \in \mathbb{F}(z)^{p\times m}$ e sia α un elemento di $\bar{\mathbb{F}}$. Sono fatti equivalenti:*

i) *α è uno zero di $G(z)$;*

ii) *il rango di $N_R(\alpha)$ è minore di r;*

iii) *la minima valutazione in α, $v^{(r)}_\alpha$, dei minori di ordine r di $G(z)$ è strettamente maggiore della minima valutazione in α, $v^{(r-1)}_\alpha$, dei minori di ordine $r-1$ di $G(z)$, ovvero*

$$v^{(r)}_\alpha > v^{(r-1)}_\alpha.$$

Dimostrazione i) $\Leftrightarrow$ ii) In base alla Proposizione 4.3.5, si ha $N_R(z) = U^{-1}(z)\mathcal{E}(z)W(z)$ con $U^{-1}(z)$ e $W(z)$ unimodulari. Pertanto per ogni $\alpha \in \bar{\mathbb{F}}$, $N_R(\alpha)$ ed $\mathcal{E}(\alpha)$ hanno lo stesso rango. Ma $\mathcal{E}(\alpha)$ ha rango minore di r se e solo se α è zero di $\varepsilon_r(z)$, e quindi zero di $G(z)$.

i) $\Leftrightarrow$ iii) Riferendoci alla forma di Smith McMillan di $G(z)$, con le notazioni del Lemma 4.4.8, abbiamo

$$\begin{aligned}\tilde{v}_\alpha^{(r)} &= v_\alpha\Big(\frac{\varepsilon_1(z)\varepsilon_2(z)\cdots\varepsilon_r(z)}{\psi_1(z)\psi_2(z)\cdots\psi_r(z)}\Big) = v_\alpha\Big(\frac{\varepsilon_1(z)\varepsilon_2(z)\cdots\varepsilon_{r-1}(z)}{\psi_1(z)\psi_2(z)\cdots\psi_{r-1}(z)}\Big) + v_\alpha\Big(\frac{\varepsilon_r(z)}{\psi_r(z)}\Big)\\ &= \tilde{v}_\alpha^{(r-1)} + v_\alpha\Big(\frac{\varepsilon_r(z)}{\psi_r(z)}\Big).\end{aligned}$$

Dal momento che α è uno zero di $G(z)$ se e solo se $\varepsilon_r(\alpha) = 0$, e quindi se e solo se $v_\alpha\big(\frac{\varepsilon_r(z)}{\psi_r(z)}\big)$ è strettamente positivo, ne consegue che

$$\tilde{v}_\alpha^{(r)} > \tilde{v}_\alpha^{(r-1)}$$

se e solo se α è uno zero di $G(z)$. Il risultato segue subito dal fatto che, per il Lemma 4.4.9, $\tilde{v}_\alpha^{(r)} = v_\alpha^{(r)}$ e $\tilde{v}_\alpha^{(r-1)} = v_\alpha^{(r-1)}$. $\quad * >>$ ■

4.5 Problemi di grado

In molti problemi che affronteremo nei successivi capitoli, le matrici di trasferimento dovranno corrispondere a sistemi realizzabili con modelli di stato causali, e quindi a matrici razionali proprie. Come ci si può aspettare dalla loro stessa definizione, tali matrici coinvolgono interessanti vincoli sui gradi di riga e/o di colonna delle rappresentazioni fratte.

4.5.1 Matrici razionali proprie

Una matrice razionale $G(z) = [g_{ij}(z)] \in \mathbb{F}(z)^{p\times m}$ è *propria* (*strettamente propria*) se lo sono tutte le sue componenti $g_{ij}(z)$. Il fatto che $G(z)$ sia una matrice propria impone alcune condizioni sui gradi di colonna delle matrici numeratore e denominatore di ogni sua rappresentazione matriciale fratta $N(z)D^{-1}(z)$. Tuttavia, il verificarsi di tali condizioni non garantisce, come vedremo, che $G(z)$ sia propria, a meno di non introdurre opportune ipotesi sulla matrice denominatore della rappresentazione. Si ha infatti il seguente risultato.

Proposizione 4.5.1 [RMF di una matrice razionale propria] *Sia $N(z)D^{-1}(z)$ una rappresentazione matriciale fratta della matrice $G(z) \in \mathbb{F}(z)^{p\times m}$.*

i) Se $G(z)$ è propria allora, per $i = 1, 2 \dots m$,

$$\deg \mathrm{col}_i N(z) \le \deg \mathrm{col}_i D(z), \tag{4.26}$$

e se è strettamente propria allora

$$\deg \mathrm{col}_i N(z) < \deg \mathrm{col}_i D(z). \tag{4.27}$$

ii) Se $D(z)$ è ridotta per colonne, (4.26) e (4.27) implicano, rispettivamente, che $G(z)$ è propria o strettamente propria.

Dimostrazione Indichiamo con $k_1, k_2, \ldots, k_m$ e $k'_1, k'_2, \ldots, k'_m$ rispettivamente i gradi di colonna[2] di $D(z) = [d_{ij}(z)]$ e di $N(z) = [n_{ij}(z)]$.
i) Da
$$N(z) = G(z)D(z) \tag{4.28}$$
segue, per ogni i e j,
$$n_{ij}(z) = \sum_{h=1}^{m} g_{ih}(z)d_{hj}(z).$$
Ricordiamo che per un polinomio $p(z)$ si ha $\deg(p) = -v_\infty(p)$ e che una funzione razionale $f(z)$ è propria (strettamente propria) se e solo se $v_\infty(f) \geq 0$ ($v_\infty(f) > 0$). Se $G(z)$ è propria (strettamente propria) valgono allora le diseguaglianze

$$\begin{aligned} -\deg n_{ij} &= v_\infty(n_{ij}) \geq \min_h v_\infty(g_{ih}d_{hj}) \geq \min_h v_\infty(d_{hj}) = -k_j \\ (-\deg n_{ij} &= v_\infty(n_{ij}) \geq \min_h v_\infty(g_{ih}d_{hj}) > \min_h v_\infty(d_{hj}) = -k_j). \end{aligned}$$

Ma allora si ha

$$\begin{aligned} k'_j &= \max_i \deg n_{ij} \leq k_j \\ (k'_j &= \max_i \deg n_{ij} < k_j). \end{aligned}$$

ii) Supponiamo ora che $D(z)$ sia ridotta per colonne, cosicchè $\deg\det D = \sum_{j=1}^m k_j$, e assumiamo $k_j \geq k'_j$ ($k_j > k'_j$) per $j = 1, 2, \ldots, m$. Dalla (4.28), evidenziando la riga i-esima delle matrici $G(z)$ e $N(z)$, segue

$$[g_{i1}(z)\ g_{i2}(z)\ \ldots\ g_{im}(z)]D(z) = [n_{i1}(z)\ n_{i2}(z)\ \ldots\ n_{im}(z)]. \tag{4.29}$$

Questa scrittura può essere interpretata come un sistema di equazioni lineari nelle incognite $g_{ij}(z)$, $j = 1, 2, \ldots, m$, risolubile in modo unico in $\mathbb{F}(z)$ dal momento che la matrice dei coefficienti $D(z)$ è non singolare. L'espressione esplicita della soluzione, secondo la regola di Cramer, è data da

$$g_{ij}(z) = \frac{\det D^{(ij)}(z)}{\det D(z)}, \tag{4.30}$$

[2]se una colonna di $N(z)$ è nulla, il suo grado viene convenzionalmente assunto pari a $-\infty$

dove $D^{(ij)}(z)$ è la matrice ottenuta sostituendo in $D(z)$ la riga j-esima con la riga i-esima di $N(z)$ (che svolge il ruolo di vettore riga dei termini noti).
Applicando l'espressione per il calcolo del determinante data in (3.39), si ottiene

$$\det D^{(ij)}(z) = \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma) d_{1,\sigma(1)} \dots d_{j-1,\sigma(j-1)} n_{i,\sigma(j)} d_{j+1,\sigma(j+1)} \dots d_{m,\sigma(m)}. \quad (4.31)$$

Poichè $\deg n_{i,\sigma(j)} \leq k'_{\sigma(j)}$, dall'ipotesi sui gradi di colonna di $N(z)$ e $D(z)$ segue

$$\deg\det D^{(ij)} \leq \sum_{i=1}^{m} k_i = \deg\det D \qquad \Big(\deg\det D^{(ij)} < \sum_{i=1}^{m} k_i = \deg\det D\Big),$$

Quindi in (4.30) $g_{ij}(z)$ è una funzione razionale propria (strettamente propria) per ogni j. Infine, per l'arbitrarietà della scelta della riga i-esima, si conclude che $G(z)$ è una matrice propria (strettamente propria). ■

L'ipotesi che la matrice denominatore nella rappresentazione sia ridotta per colonne non va intesa affatto come riduttiva. Se infatti $N(z)D^{-1}(z)$ è un'arbitraria RMF destra, è possibile operare su $D(z)$ nel modo descritto nel Capitolo 3 determinando una matrice unimodulare $U(z)$ tale che $D(z)U(z)$ sia ridotta per colonne. La frazione matriciale $[N(z)U(z)][D(z)U(z)]^{-1}$ fornisce allora una RMF destra con le proprietà desiderate, irriducibile se e solo se lo era la rappresentazione iniziale $N(z)D^{-1}(z)$.

Esempio 4.5.1 Si consideri la frazione matriciale

$$N(z)D^{-1}(z) = \begin{bmatrix} 2z^2+1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z^3+z & z \\ z^2+z+1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}.$$

I gradi di colonna di $N(z)$ sono $k'_1 = 2$ e $k'_2 = 0$, mentre i gradi di colonna di $D(z)$ sono $k_1 = 3$ e $k_2 = 1$. Pur essendo verificata la condizione $k'_i < k_i$, $i = 1, 2$, tuttavia la matrice non è strettamente propria e nemmeno propria, dal momento che vale

$$N(z)D^{-1}(z) = \begin{bmatrix} \dfrac{4z^2+2z+3}{-z^2} & \dfrac{4z^2+3}{z} \end{bmatrix}.$$

Di fatto $D(z)$ non è ridotta per colonne, visto che $k_1 + k_2 = 4$ mentre $\det D(z) = -z^2$ ha grado 2.

Data una matrice $G(z) \in \mathbb{F}(z)^{p\times m}$, si può effettuare la sostituzione $d = 1/z$ come nel caso scalare, ottenendo una matrice razionale $M(d) \in \mathbb{F}(d)^{p\times m}$, per la quale risulta

$$G(z) = M(1/z) \quad (4.32)$$

Per l'esercizio 1.6.3, la condizione che $G(z)$ sia propria (strettamente propria) si riporta in modo ovvio sugli elementi di $M(d)$, che devono ammettere una rappresentazione in cui il polinomio a denominatore (il polinomio a denominatore ma non quello a numeratore) ha il termine noto non nullo. Per quanto riguarda le rappresentazioni matriciali fratte di $M(d)$, vale la seguente

Proposizione 4.5.2 [Matrici proprie nelle RMF in d] *Sono equivalenti le affermazioni:*

i) $M(d) = M(1/z)$ *è una matrice propria in* z*;*

ii) In ogni RMF destra irriducibile $M(d) = P(d)Q(d)^{-1}$ *è invertibile la matrice* $Q(0)$.

Dimostrazione $(i) \Rightarrow (ii)$ Se $G(z) \in \mathbb{F}(z)^{p\times m}$ è propria e $N(z)D(z)^{-1}$ ne è una RMF destra con $D(z)$ ridotto per colonne e gradi di colonna $k_1, k_2, \dots k_m$, allora i gradi di colonna di $N(z)$ non superano quelli corrispondenti di $D(z)$. Pertanto

$$\begin{aligned}
G(z) &= \Big[N(z)\mathrm{diag}\{z^{-k_1}, z^{-k_2}, \dots z^{-k_m}\}\Big]\Big[D(z)\mathrm{diag}\{z^{-k_1}, z^{-k_2}, \dots z^{-k_m}\}\Big]^{-1} \\
&= \Big[N(z)\mathrm{diag}\{z^{-k_1}, z^{-k_2}, \dots z^{-k_m}\}\Big]\Big[D_{hc} + D_{rem}(z)\mathrm{diag}\{z^{-k_1}, z^{-k_2}, \dots z^{-k_m}\}\Big]^{-1} \\
&:= \tilde{P}(z^{-1})\tilde{Q}(z^{-1})^{-1} = \tilde{P}(d)\tilde{Q}(d)^{-1}
\end{aligned}$$

fornisce una RMF destra in $z^{-1} = d$ nella quale il denominatore soddisfa $\tilde{Q}(0) = D_{hc}$ e quindi $\tilde{Q}(d)$ è invertibile per $d = 0$.
Se $\tilde{P}(d)\tilde{Q}(d)^{-1}$ non è irriducibile e se $\Delta(d)$ è un MCD destro di $\tilde{P}(d)$ e $\tilde{Q}(d)$, dalle $\tilde{P}(d) = \bar{P}(d)\Delta(d)$ e $\tilde{Q}(d) = \bar{Q}(d)\Delta(d)$, si ottiene una rappresentazione irriducibile

$$M(d) = \bar{P}(d)\bar{Q}(d)^{-1}$$

nella quale l'invertibilità di $\tilde{Q}(0)$ implica quella di $\bar{Q}(0)$.
Per ogni altra rappresentazione irriducibile $M(d) = P(d)Q(d)^{-1}$ si ha $Q(d) = \bar{Q}(d)U(d)$ con $U(d)$ unimodulare, e quindi $Q(0) = \bar{Q}(0)U(0)$ è invertibile.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Se in $M(d) = P(d)Q(d)^{-1}$ il denominatore ha $Q(0)$ invertibile e se denotiamo con k_i il più grande fra i gradi delle colonne i-esime di $P(d)$ e di $Q(d)$, si ottiene

$$\begin{aligned}
G(z) &= P(z^{-1})Q(z^{-1})^{-1} \\
&= \Big[P(z^{-1})\mathrm{diag}\{z^{k_1}, z^{k_2}, \dots z^{k_m}\}\Big]\Big[Q(z^{-1})\mathrm{diag}\{z^{k_1}, z^{k_2}, \dots z^{k_m}\}\Big]^{-1}
\end{aligned}$$

in cui il denominatore è ridotto per colonne. Basta allora applicare la Proposizione 4.5.1. per concludere che $G(z)$ è propria. ■

- ESERCIZIO 4.5.1 Si provi che $M(d)$ è strettamente propria se vale la (ii) della Prop. 4.5.3 e inoltre è nulla la matrice $P(0)$ nelle RMF irriducibili $M(d) = P(d)Q(d)^{-1}$ (e quindi in qualsiasi RMF destra).
- ESERCIZIO 4.5.2 Si verifichi che se $M(d)$ è polinomiale, ridotta per colonne, con gradi di colonna $k_1, k_2, \dots, k_m$: allora $G(z) := M(z^{-1})$ è propria e la sua rappresentazione $N(z)\text{diag}\{z^{k_1}, \dots, z^{k_m}\}^{-1}$ è irriducibile. (Suggerimento: $N(0) = M_{hc}$ ha rango m)

4.5.2 Divisione di matrici

È noto dall'algebra elementare che un'arbitraria funzione razionale

$$g(z) = \frac{n(z)}{d(z)} \in \mathbb{F}(z)$$

può essere sempre espressa, in modo unico, come somma di una funzione razionale strettamente propria e di un polinomio. Infatti, dalla divisione euclidea di $n(z)$ per $d(z)$

$$n(z) = q(z)d(z) + r(z), \qquad \deg r < \deg d, \tag{4.33}$$

segue

$$g(z) = q(z) + \frac{r(z)}{d(z)}, \tag{4.34}$$

dove $q(z)$ è un polinomio e $r(z)/d(z)$ una funzione razionale strettamente propria. D'altra parte se $\bar{q}(z) + \bar{r}(z)/\bar{d}(z)$ è un'altra rappresentazione di $g(z)$ come somma di un polinomio e di una funzione razionale strettamente propria, si ha

$$q(z) - \bar{q}(z) = \frac{\bar{r}(z)}{\bar{d}(z)} - \frac{r(z)}{d(z)}, \tag{4.35}$$

che essendo un uguaglianza tra un'espressione polinomiale e una funzione razionale strettamente propria può essere verificata se e solo se i due membri sono entrambi nulli (in caso contrario, le valutazioni all'infinito dell'espressione di destra e di quella di sinistra in (4.35) sarebbero diverse). Pertanto $q(z) = \bar{q}(z)$ e $r(z)/d(z) = \bar{r}(z)/\bar{d}(z)$.

Risultati analoghi a (4.33) e (4.34) valgono anche nel caso di matrici polinomiali e razionali. Più precisamente, ogni matrice razionale $G(z)$ può essere espressa in uno ed un sol modo come somma di una matrice polinomiale e di una razionale strettamente propria. In particolare, se $G(z)$ è espressa come frazione matriciale, la sua parte strettamente propria è rappresentabile da una frazione matriciale con la medesima matrice denominatore.

Infine, la decomposizione (4.33) si estende al caso di due arbitrarie matrici rettangolari $N(z)$ e $\tilde{D}(z)$ con egual numero m di colonne, la seconda delle quali (il "divisore") a rango m, sostituendo alla condizione $\deg r < \deg d$ un vincolo sui gradi di colonna.

Proposizione 4.5.3 [Scomposizione delle matrici razionali e divisione delle matrici polinomiali] *i) Un'arbitraria matrice razionale* $G(z) = N(z)D^{-1}(z) \in \mathbb{F}(z)^{p\times m}$ *è esprimibile in modo unico nella forma*

$$G(z) = Q(z) + G_{sp}(z), \tag{4.36}$$

con $G_{sp}(z)$ *strettamente propria e* $Q(z)$ *in* $\mathbb{F}[z]^{p\times m}$*. Inoltre,* $G_{sp}(z)$ *ammette una rappresentazione matriciale fratta del tipo* $R(z)D^{-1}(z)$*.*
ii) Se $N(z) \in \mathbb{F}[z]^{p\times m}$ *e* $\tilde{D}(z) \in \mathbb{F}[z]^{\ell\times m}$*, con rango di* $\tilde{D}(z)$ *pari a* m*, esistono matrici polinomiali* $Q(z)$ *e* $R(z)$ *per cui vale*

$$N(z) = Q(z)\tilde{D}(z) + R(z), \quad \deg \mathrm{col}_i R < \deg \mathrm{col}_i \tilde{D},\ i = 1, 2, \ldots m. \tag{4.37}$$

Dimostrazione Esprimendo il generico elemento $g_{ij}(z)$ di $G(z)$ come somma di un polinomio e di una matrice razionale strettamente propria

$$g_{ij}(z) = q_{ij}(z) + \frac{n_{ij}(z)}{d_{ij}(z)},$$

si ha

$$G(z) = [q_{ij}(z)] + \left[\frac{n_{ij}(z)}{d_{ij}(z)}\right] =: Q(z) + G_{sp}(z),$$

con $G_{sp}(z)$ matrice razionale strettamente propria. Sostituendo a $G(z)$ la sua rappresentazione matriciale $N(z)D^{-1}(z)$ si ottiene

$$G_{sp}(z) = \Big[N(z) - Q(z)D(z)\Big]D^{-1}(z) =: R(z)D^{-1}(z),$$

che prova la i).
Inoltre, per la Proposizione 4.5.1, le colonne di $R(z)$ hanno tutte grado strettamente minore delle corrispondenti colonne di $D(z)$. Questo prova il punto ii) nel caso in cui $\tilde{D}(z)$ sia una matrice quadrata. Se $\tilde{D}(z)$ è rettangolare, scegliamo $S \in \mathbb{F}^{m\times \ell}$ in modo tale che $D(z) := S\tilde{D}(z)$ sia una matrice quadrata non singolare. Per il punto precedente, esistono matrici polinomiali $\tilde{Q}(z)$ ed $R(z)$ per cui vale la decomposizione

$$N(z) = \tilde{Q}(z)D(z) + R(z) = [\tilde{Q}(z)S]\tilde{D}(z) + R(z) =: Q(z)\tilde{D}(z) + R(z),$$

con $\deg \mathrm{col}_i R < \deg \mathrm{col}_i D = \deg(S\mathrm{col}_i \tilde{D}) \leq \deg \mathrm{col}_i \tilde{D}$, $i = 1, 2, \ldots, m$. ■

4.6 Applicazioni al controllo dead-beat

Si è visto nel capitolo precedente come un sistema Σ a tempo discreto, descritto dall'equazione

$$\mathbf{x}(t+1) = F\mathbf{x}(t) + G\mathbf{u}(t), \tag{4.38}$$

sia controllabile (a zero) se e solo se la matrice polinomiale

$$[I - dF \mid dG] \tag{4.39}$$

è prima a sinistra, ovvero, alla luce dei risultati di questo capitolo, se e solo se $(I-dF)^{-1}dG$ è una frazione matriciale irriducibile.

Una matrice costante K di retroazione dallo stato viene detta *controllore dead-beat* se la legge di controllo in catena chiusa $\mathbf{u}(t) = K\mathbf{x}(t)$ porta a zero lo stato del sistema Σ in un numero finito di passi, qualunque siano le condizioni iniziali, quindi se $F+GK$ è nilpotente. Come noto da corsi precedenti, per sistemi sul campo reale la condizione di controllabilità a zero è equivalente all'esistenza di un controllore dead-beat. In questo paragrafo estenderemo questo risultato a sistemi su campi arbitrari, e forniremo un procedimento, basato sull'identità generalizzata di Bézout e sull'algoritmo di divisione per matrici, che consente di costruire un controllore dead-beat K a partire dalla matrice (4.39).

• Sia (F,G) una coppia controllabile e sia $N_R(d)D_R^{-1}(d)$ una RMF destra irriducibile della matrice di trasferimento ingresso/stato $(I-dF)^{-1}dG \in \mathbb{F}(d)^{n\times m}$. Non è restrittivo assumere che $D_R(d)$ sia ridotta per righe: a tale situazione, infatti, ci si può sempre ricondurre mediante operazioni elementari di colonna effettuate simultaneamente su $N_R(d)$ e $D_R(d)$. Vale allora l'identità generalizzata di Bézout

$$\begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -X(d) & Y(d) \\ dG & I_n - dF \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -D_R(d) & \tilde{Y}(d) \\ N_R(d) & \tilde{X}(d) \end{bmatrix}. \tag{4.40}$$

• Dal momento che $D_R(d)$ è una matrice non singolare, in base alla (versione per righe della) proposizione 4.5.3 è possibile esprimere $\tilde{Y}(d)$ nella forma

$$\tilde{Y}(d) = D_R(d)Q(d) + R(d), \tag{4.41}$$

con $\deg \text{riga}_i R < \deg \text{riga}_i D_R =: h_i$ per $i = 1, 2, \ldots, m$. Ponendo

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} M(d) & L(d) \\ dG & I_n - dF \end{bmatrix} &:= \begin{bmatrix} I_m & -Q(d) \\ 0 & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -X(d) & Y(d) \\ dG & I_n - dF \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -D_R(d) & R(d) \\ N_R(d) & S(d) \end{bmatrix} &:= \begin{bmatrix} -D_R(d) & \tilde{Y}(d) \\ N_R(d) & \tilde{X}(d) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m & Q(d) \\ 0 & I_n \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

(4.40) si trasforma allora in

$$\begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M(d) & L(d) \\ dG & I_n - dF \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -D_R(d) & R(d) \\ N_R(d) & S(d) \end{bmatrix},$$

dove $D_R(d)$ è ridotta per righe con gradi di riga h_i, e $R(d)$ ha gradi di riga strettamente minori dei corrispondenti gradi di $D_R(d)$.

• Vogliamo provare che $L(d)$ e $M(d)$ sono entrambe matrici costanti. Da

$$\begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -D_R(d) & R(d) \\ N_R(d) & S(d) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M(d) & L(d) \\ dG & I_n - dF \end{bmatrix} \tag{4.42}$$

segue

$$R(d)(I_n - dF) = D_R(d)L(d), \tag{4.43}$$

I gradi di riga della matrice $R(d)(I_n - dF)$ non possono superare i gradi h_i delle righe corrispondenti in $D_R(d)$. In virtù del fatto che $D_R(d)$ è ridotta per righe, se $L(d)$ non fosse costante esisterebbe qualche $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ tale che nella matrice prodotto $D_R(d)L(d)$ la riga la i-esima avrebbe di grado strettamente maggiore di h_i (si veda l'esercizio 4.6.1). Ma allora l'equazione (4.43) non potrebbe essere soddisfatta. Quindi $L(d) := L$ è una matrice costante.
Analogamente, da (4.42) segue

$$R(d)dG - D_R(d)M(d) = I_m. \tag{4.44}$$

e da (4.44) segue che $M(d)$ è costante. Infatti i gradi h_i delle righe di $D_R(d)$ sono maggiori o eguali a quelli delle righe di $R(d)dG$, quindi, se $M(d)$ non fosse costante, per qualche $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ qualche riga di $D_R(d)M(d)$ avrebbe grado strettamente maggiore della corrispondente riga di $R(d)dG$. Ma allora il secondo membro di (4.44) non potrebbe avere grado 0.
Si noti che $M(d) := M$ è non solo una matrice costante, ma è anche invertibile, come si vede ponendo $d = 0$ nella (4.44).

• Poichè la matrice

$$\begin{bmatrix} M & L \\ dG & I_n - dF \end{bmatrix}$$

è unimodulare, sfruttando la formula per il calcolo del determinante di una matrice a blocchi, si ottiene che

$$\det M \det[I_n - dF - dGM^{-1}L]$$

è una costante non nulla, e quindi

$$\det[I_n - d(F + GM^{-1}L)] = 1.$$

Ma allora (si veda Esercizio 3.16) $(F + GM^{-1}L)$ è nilpotente, e $K := M^{-1}L$ è un controllore dead-beat. ■

- ESERCIZIO 4.6.1 Dimostrare il seguente risultato, di cui ci siamo avvalsi nel penultimo punto della costruzione precedente: se $D_R(d)$ è una matrice polinomiale quadrata ridotta per righe con gradi di riga $h_1, h_2, \dots, h_m$, e $\mathbf{v}(d)$ è un vettore polinomiale non costante, allora esiste un indice i tale che la componente i-esima del vettore $D_R(d)\mathbf{v}(d)$ ha grado maggiore di h_i. (Suggerimento: nel vettore $[\text{diag}\{d^{h_1}, d^{h_2}, \dots, d^{h_m}\}D_{hr}][\mathbf{v}_{hc}d^{\nu} + \mathbf{v}_{rem}(z)]$ si hanno componenti di grado $h_i + \nu$ nelle posizioni dove $D_{hr}\mathbf{v}_{hc}$ ha componenti non nulle).
  Il risultato si estende a matrici rettangolari ridotte per righe?
- ESERCIZIO 4.6.2 Se M è invertibile, si dimostri che
$$\det \begin{bmatrix} M & P \\ Q & N \end{bmatrix} = \det M \det(N - QM^{-1}P)$$
(Suggerimento: si verifichi che $\begin{bmatrix} M & P \\ Q & N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M & 0 \\ Q & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & M^{-1}P \\ 0 & N - QM^{-1}P \end{bmatrix}$).

4.7 Rappresentazioni matriciali fratte bilatere

In molti casi, ed in particolar modo nello studio dei modelli di stato, è conveniente ricorrere, oltre che a RMF sinistre e destre, a rappresentazioni matriciali fratte bilatere (RMFB).

Definizione 4.7.1 [RMF BILATERA] *Sia $G(z) \in \mathbb{F}(z)^{p\times m}$. Una terna di matrici polinomiali $(A(z), B(z), C(z))$ individua una rappresentazione matriciale fratta bilatera di $G(z)$ se $A(z)$ è quadrata non singolare, e $B(z), C(z)$ sono matrici di opportune dimensioni per le quali si verifica l'eguaglianza*
$$G(z) = C(z)A^{-1}(z)B(z). \tag{4.45}$$

È ovvio che ogni matrice razionale ammette rappresentazioni bilatere, dal momento che, ad esempio, una rappresentazione fratta destra $N(z)D^{-1}(z)$ può essere vista come una particolare RMFB, ovvero
$$N(z)D^{-1}(z)I_m. \tag{4.46}$$

Per analogia, ci riferiremo alla matrice $A(z)$ in (4.45) come alla matrice *denominatore* della RMFB e chiameremo *grado determinantale* della (4.45) il grado di $\det A(z)$.

Definizione 4.7.2 [RMF BILATERE IRRIDUCIBILI] *Una RMFB (4.45) è detta irriducibile (o bicoprima) se $A(z)$ e $C(z)$ sono coprime a destra, mentre $A(z)$ e $B(z)$ sono coprime a sinistra.*

Ogni matrice razionale ammette RMFB irriducibili, dal momento che per ogni sua RMF destra irriducibile $N(z)D^{-1}(z)$, (4.46) è una RMFB irriducibile. Inoltre, data una generica RMFB $C(z)A^{-1}(z)B(z)$ di una matrice $G(z)$ è possibile ricavarne una di irriducibile

(i) ricercando un MCD destro $\Delta(z)$ di $C(z)$ e $A(z)$

$$C(z) = \bar{C}(z)\Delta(z) \qquad A(z) = \bar{A}(z)\Delta(z);$$

(ii) ricercando un MCD sinistro $\nabla(z)$ di $\bar{A}(z)$ e $B(z)$

$$B(z) = \nabla(z)\bar{B}(z) \qquad \bar{A}(z) = \nabla(z)\hat{A}(z);$$

(iii) rappresentando $G(z)$ nella forma

$$G(z) = \bar{C}(z)\hat{A}^{-1}(z)\bar{B}(z). \tag{4.47}$$

La RMFB (4.47) è irriducibile. Infatti, $\bar{B}(z)$ e $\hat{A}(z)$ sono coprime a sinistra per costruzione, e poichè $\bar{C}(z)$ e $\bar{A}(z)$ sono coprime a destra, esistono matrici polinomiali $X(z)$ e $Y(z)$ tali che

$$X(z)\bar{A}(z) + Y(z)\bar{C}(z) = I,$$

da cui

$$\Big(X(z)\nabla(z)\Big)\hat{A}(z) + Y(z)\bar{C}(z) = I,$$

il che dimostra la coprimalità a destra di $\bar{C}(z)$ e $\hat{A}(z)$.

Come si è visto nel paragrafo 4.2, le matrici denominatore delle RMF destre e sinistre irriducibili di una matrice razionale $G(z)$ hanno tutte il medesimo determinante, a meno di una costante moltiplicativa non nulla. Questo risultato si estende anche alle RMFB irriducibili, nel senso che se

$$C_1(z)A_1^{-1}(z)B_1(z) = C_2(z)A_2^{-1}(z)B_2(z)$$

sono irriducibili, allora i determinanti di $A_1(z)$ e $A_2(z)$ sono polinomi associati. Per provarlo, ci serviremo del seguente lemma.

Lemma 4.7.3 *Sia $C(z)A^{-1}(z)B(z)$ una RMFB della matrice razionale $G(z)$, con $C(z)A^{-1}(z)$ irriducibile. Se $N(z)D^{-1}(z)$ è una RMF destra irriducibile di $A^{-1}(z)B(z)$, allora $[C(z)N(z)]D^{-1}(z)$ è una RMF destra irriducibile di $G(z)$.*

DIMOSTRAZIONE Per la coprimalità di $N(z)$ e $D(z)$ esistono matrici polinomiali $X(z)$ e $Y(z)$ tali che

$$X(z)N(z) + Y(z)D(z) = I, \tag{4.48}$$

e per quella di $C(z)$ e $A(z)$, esistono matrici polinomiali $Z(z)$ e $W(z)$, tali che

$$Z(z)C(z) + W(z)A(z) = I. \tag{4.49}$$

Inoltre, dalla condizione $N(z)D^{-1}(z) = A^{-1}(z)B(z)$ segue

$$B(z)D(z) = A(z)N(z) \tag{4.50}$$

Ma allora, premoltiplicando per $X(z)$ e postmoltiplicando per $N(z)$ la (4.49), si ottiene

$$\begin{aligned}
\Big[X(z)Z(z)\Big]C(z)N(z) + X(z)W(z)A(z)N(z) &= X(z)N(z) \\
\Big[X(z)Z(z)\Big]C(z)N(z) + X(z)W(z)B(z)D(z) &= I - Y(z)D(z) \\
\Big[(X(z)Z(z)\Big]\Big[C(z)N(z)\Big] + \Big[X(z)W(z)B(z) + Y(z)\Big]D(z) &= I
\end{aligned}$$ ■

Pertanto $[C(z)N(z)]D^{-1}(z)$ è una RMF destra irriducibile.

Proposizione 4.7.4 [DETERMINANTE DEL DENOMINATORE IN UNA RMF BILATERA IRRIDUCIBILE] *Siano* $C(z)A^{-1}(z)B(z)$ *e* $N(z)D(z)^{-1}$ *rappresentazioni irriducibili, la prima bilatera e la seconda destra, della matrice razionale* $G(z)$. *Allora* $\det A(z)$ *e* $\det D(z)$ *sono polinomi associati.*

DIMOSTRAZIONE Sia $R(z)S(z)^{-1}$ una rappresentazione irriducibile destra della RMF irriducibile sinistra $A^{-1}B(z)$. Si ha allora

$$N(z)D(z)^{-1} = C(z)A^{-1}(z)B(z) = [C(z)R(z)]S(z)^{-1} \tag{4.51}$$

e, per il precedente lemma, $[C(z)R(z)]S^{-1}(z)$ è irriducibile. Ne consegue che $\det S(z)$ è associato sia a $\det D(z)$ (perché $ND^{-1} = (CR)S^{-1}$ sono RMF irriducibili destre), sia a $\det A(z)$ (perché $RS^{-1} = A^{-1}B$ sono RMF irriducibili, una destra e l'altra sinistra). Ciò implica che $\det A(z)$ e $\det D(z)$ siano polinomi associati. ■

Come conseguenza immediata di questa proposizione, tutte le RMF irriducibili, destre, sinistre o bilatere, di una assegnata matrice razionale $G(z)$ hanno matrici denominatore con il medesimo determinante, a meno di una costante moltiplicativa non nulla. Inoltre, ogni RMF non irriducibile di $G(z)$ ha una matrice denominatore il cui determinate è un multiplo proprio del determinante dei denominatori nelle RMF irriducibili.

- ESERCIZIO 4.7.1 I polinomi invarianti non unitari delle matrici denominatore sono gli stessi in tutte le rappresentazioni matriciali fratte irriducibili della matrice razionale $G(z)$, siano esse destre, sinistre o bilatere.

4.8 Applicazioni ai sistemi interconnessi

Siano

$$\Sigma_1 = (F_1, G_1, H_1) \quad , \quad \Sigma_2 = (F_2, G_2, H_2)$$

due sistemi dinamici lineari discreti in forma di stato su un arbitrario campo $\mathbb{F}$, con il medesimo numero m di ingressi e p di uscite, e siano n_1 e n_2 le dimensioni dei rispettivi spazi di stato.
Vogliamo individuare condizioni necessarie e sufficienti su Σ_1 e Σ_2 che garantiscano la raggiungibilità del sistema

$$\Sigma_p = \left(\begin{bmatrix} F_1 & 0 \\ 0 & F_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \end{bmatrix} \right),$$

ottenuto dalla loro connessione in parallelo.

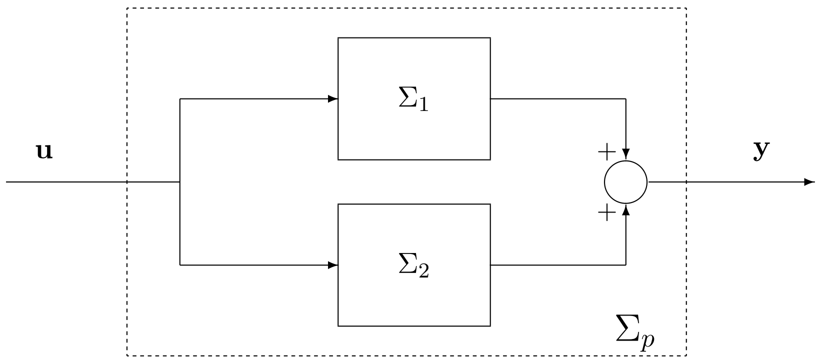

Fig. 4.1

Come abbiamo visto nel paragrafo 3.4, il sistema Σ_p è raggiungibile se e solo se la matrice del criterio PBH

$$\left[\begin{array}{cc|c} zI_{n_1} - F_1 & 0 & G_1 \\ 0 & zI_{n_2} - F_2 & G_2 \end{array} \right] \tag{4.52}$$

è prima a sinistra. Ciò richiede, in particolare, che $[zI_{n_1} - F_1 \mid G_1]$ e $[zI_{n_2} - F_2 \mid G_2]$ siano prime a sinistra, ovvero che Σ_1 e Σ_2 siano raggiungibili. Non è quindi restrittivo per lo studio del problema ipotizzare a priori la raggiungibilità di tali sistemi.

Se $N_i(z)D_i^{-1}(z)$, $i = 1, 2$, sono RMF destre irriducibili delle matrici di trasferimento ingresso stato, i.e.

$$(zI_{n_i} - F_i)^{-1}G_1 = N_i(z)D_i^{-1}(z), \tag{4.53}$$

è chiaro che $\det(zI_{n_i} - F_i) = \det D_i(z),\ i = 1, 2$ e quindi che il grado determinantale di $D_i(z)$ è n_i.

Proposizione 4.8.1 [RAGGIUNGIBILITÀ DEL PARALLELO] *Siano Σ_1 e Σ_2 sistemi raggiungibili, con il medesimo numero di ingressi, e siano $N_1(z)D_1^{-1}(z)$ e $N_2(z)D_2^{-1}(z)$ RMF destre irriducibili delle matrici di trasferimento ingresso-stato rispettivamente di Σ_1 e Σ_2. Il sistema parallelo Σ_p è raggiungibile se e solo se*

$$[D_1(z) \mid D_2(z)]$$

è una matrice prima a sinistra.

DIMOSTRAZIONE Il sistema parallelo Σ_p è raggiungibile se e solo se la RMF sinistra

$$\begin{bmatrix} zI_{n_1} - F_1 & 0 \\ 0 & zI_{n_2} - F_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix} \tag{4.54}$$

è irriducibile. Poichè le RMF irriducibili, destre, sinistre, o bilatere, della medesima matrice hanno lo stesso grado determinantale, mentre ogni altra RMF ha grado determinantale maggiore, la raggiungibilità di Σ_p equivale all'esistenza di una RMFB irriducibile della (4.54) avente grado determinantale $n_1 + n_2$. Vogliamo provare che una tale RMFB esiste se e solo se $D_1(z)$ e $D_2(z)$ sono coprime a sinistra.
Si noti che la matrice di trasferimento ingresso stato di Σ_p può essere riscritta nella forma di una RMFB

$$\begin{bmatrix} N_1(z) & 0 \\ 0 & N_2(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1(z) & 0 \\ 0 & D_2(z) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I_m \\ I_m \end{bmatrix}, \tag{4.55}$$

che ha grado determinantale $n_1 + n_2$; perciò la raggiungibilità di Σ_p è equivalente alla irriducibilità di tale RMFB. Ma l'irriducibilità della RMF destra

$$\begin{bmatrix} N_1(z) & 0 \\ 0 & N_2(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1(z) & 0 \\ 0 & D_2(z) \end{bmatrix}^{-1}$$

è conseguenza immediata di quella delle RMF $N_i(z)D_i^{-1}(z)$, $i = 1, 2$, mentre è facile verificare che la irriducibilità della RMF sinistra

$$\begin{bmatrix} D_1(z) & 0 \\ 0 & D_2(z) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I_m \\ I_m \end{bmatrix}$$

equivale alla primalità a sinistra della matrice $[D_1(z) \mid D_2(z)]$. ■

- ESERCIZIO 4.8.1 Con riferimento alle notazioni della precedente proposizione, si verifichi che la matrice
$$\begin{bmatrix} D_1(z) & 0 & I_m \\ 0 & D_2(z) & I_m \end{bmatrix}$$
è prima a sinistra se e solo se lo è la matrice $[D_1(z) \mid D_2(z)]$.
- ESERCIZIO 4.8.2 Siano Σ_1 e Σ_2 sistemi osservabili, con il medesimo numero di uscite, e siano $Q_1^{-1}(z)P_1(z)$ e $Q_2^{-1}(z)P_2(z)$ RMF sinistre irriducibili delle corrispondenti matrici di trasferimento stato-uscita. Il sistema Σ_p, ottenuta dalla connessione in parallelo di Σ_1 e Σ_2, è osservabile se e solo se
$$\begin{bmatrix} Q_1(z) \\ Q_2(z) \end{bmatrix}$$
è una matrice prima a destra.

Consideriamo ora il caso in cui $\Sigma_1 = (F_1, G_1, H_1)$ e $\Sigma_2 = (F_2, G_2, H_2)$ siano sistemi dinamici lineari in forma di stato su un arbitrario campo $\mathbb{F}$, con m_i ingressi e p_i uscite, $i = 1, 2$, e supponiamo che m_2 coincida con p_1. È possibile allora connettere il sistema Σ_2 in cascata al sistema Σ_1 ottenendo cosí la connessione serie di Fig.4.2.

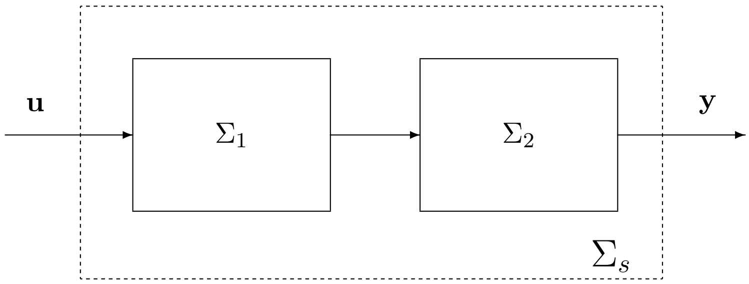

Fig. 4.2

Come nel caso precedente, supporremo che Σ_1 e Σ_2 siano raggiungibili e $N_i(z)D_i^{-1}(z)$, $i = 1, 2$, siano RMF destre irriducibili delle matrici di trasferimento ingresso-stato $(zI_{n_i} - F_i)^{-1}G_i$. È immediato verificare che Σ_s è raggiungibile se e solo se la matrice polinomiale

$$\left[\begin{array}{cc|c} zI_{n_1} - F_1 & 0 & G_1 \\ -G_2H_1 & zI_{n_2} - F_2 & 0 \end{array}\right] \tag{4.56}$$

è prima a sinistra, ovvero la frazione matriciale

$$\begin{bmatrix} zI_{n_1} - F_1 & 0 \\ -G_2H_1 & zI_{n_2} - F_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

è irriducibile.
Sulla base dei medesimi ragionamenti svolti per la connessione in parallelo, ciò equivale all'esistenza di una RMFB irriducibile della matrice ingresso-stato di Σ_s, con grado determinantale n_1+n_2. Ma il legame ingresso-stato è esprimibile nella forma

$$\begin{bmatrix} N_1(z)D_1^{-1}(z) \\ N_2(z)D_2^{-1}(z)H_1N_1(z)D_1^{-1}(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1(z) & 0 \\ 0 & N_2(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1(z) & 0 \\ -H_1N_1(z) & D_2(z) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I_m \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{4.57}$$

e poichè il grado determinantale di tale RMFB è n_1+n_2, la raggiungibilità di Σ_s è equivalente al fatto che la RMFB (4.57) sia irriducibile.

Proposizione 4.8.2 [Raggiungibilità della serie] *Siano Σ_1 e Σ_2 sistemi raggiungibili, con Σ_2 avente un numero di ingressi pari al numero di uscite di Σ_1, e siano $N_1(z)D_1^{-1}(z)$ e $N_2(z)D_2^{-1}(z)$ RMF destre irriducibili delle matrici di trasferimento ingresso-stato di Σ_1 e Σ_2. Il sistema serie Σ_s è raggiungibile se e solo se $[H_1N_1(z) \mid D_2(z)]$ è una matrice prima a sinistra.*

Dimostrazione Per i ragionamenti precedenti sarà sufficiente dimostrare che il secondo membro della (4.57) è una RMFB irriducibile se e solo se $[H_1N_1(z) \mid D_2(z)]$ è prima a sinistra. Proviamo anzitutto che la frazione matriciale destra

$$\begin{bmatrix} N_1(z) & 0 \\ 0 & N_2(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1(z) & 0 \\ -H_1N_1(z) & D_2(z) \end{bmatrix}^{-1} \tag{4.58}$$

è irriducibile. Per l'irriducibilità di $N_i(z)D_i^{-1}(z)$, $i=1,2$, esistono matrici polinomiali $X_i(z)$ e $Y_i(z)$ soddisfacenti le identità di Bézout $X_i(z)D_i(z)+Y_i(z)N_i(z) = I_{n_i}$, $i=1,2$ e con esse l'identità

$$\begin{bmatrix} Y_1(z) & 0 \\ 0 & Y_2(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1(z) & 0 \\ 0 & N_2(z) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_1(z) & 0 \\ 0 & X_2(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1(z) & 0 \\ -H_1N_1(z) & D_2(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 \\ L(z) & I_{n_2} \end{bmatrix},$$

con $L(z) := -X_2(z)H_1N_1(z)$. Premoltiplicando per l'inversa della matrice unimodulare a secondo membro, si ottiene un'identità di Bézout, e ciò prova l'irriducibilità di (4.58). Per quanto riguarda la frazione matriciale sinistra

$$\begin{bmatrix} D_1(z) & 0 \\ -H_1N_1(z) & D_2(z) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I_{n_1} \\ 0 \end{bmatrix},$$

è chiaro che se

$$\begin{bmatrix} D_1(z) & 0 & I_{m_1} \\ -H_1N_1(z) & D_2(z) & 0 \end{bmatrix} \tag{4.59}$$

è prima a sinistra allora lo è la sottomatrice $[\,-H_1N_1(z) \quad D_2(z)\,]$. Se viceversa la sottomatrice è prima a sinistra, esistono matrici polinomiali $L_1(z)$ ed $L_2(z)$

soddisfacenti $(-H_1N_1(z))L_1(z) + D_2(z)L_2(z) = I_{m_2}$, e quindi

$$\begin{bmatrix} D_1(z) & 0 & I_{m_1} \\ -H_1N_1(z) & D_2(z) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & L_1(z) \\ 0 & L_2(z) \\ I_{m_1} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{m_1} & T(z) \\ 0 & I_{m_2} \end{bmatrix}$$

è una matrice unimodulare. Ciò dimostra che (4.59) è prima a sinistra. ■

- Esercizio 4.8.3 Nel caso in cui $\Sigma_1 = (F_1, g_1, H_1)$ e $\Sigma_2 = (F_2, g_2, H_2)$ siano sistemi a un ingresso e un'uscita, si provi che

  (i) la condizione di raggiungibilità di Σ_i equivale alla coprimalità di $\text{adj}(zI - F_i)g_i$ e di $\det(zI - F_i)$ (Suggerimento: $(zI - F_i)^{-1}g_i = [\text{adj}(zI - F_i)g_i][\det(zI - F_i)]^{-1}$ hanno lo stesso grado determinantale e quindi la irriducibilità della RMF destra equivale a quella della RMF sinistra)

  (ii) la condizione di raggiungibilità del parallelo equivale alla coprimalità di $\det(zI - F_1)$ e di $\det(zI - F_2)$

  (iii) la condizione di raggiungibilità della serie equivale alla coprimalità di $\det(zI - F_2)$ e di $H_1\text{adj}(zI - F_1)g_1$.

- Esercizio 4.8.4 Siano Σ_1 e Σ_2 sistemi osservabili, con Σ_2 avente un numero di ingressi pari al numero di uscite di Σ_1, e siano $Q_1^{-1}(z)P_1(z)$ e $Q_2^{-1}(z)P_2(z)$ RMF sinistre irriducibili delle corrispondenti matrici di trasferimento stato-uscita. Il sistema Σ_s, ottenuto dalla connessione di Σ_2 in cascata a Σ_1, è osservabile se e solo se

$$\begin{bmatrix} P_2(z)G_2 \\ Q_1(z) \end{bmatrix}$$

  è una matrice prima a destra.

- Esercizio 4.8.5 Siano $\Sigma_i = (F_i, G_i, H_i)$, $i = 1, 2$, sistemi dinamici lineari a m_i ingressi e p_i uscite, raggiungibili ed osservabili, e supponiamo $m_1 = p_2$ e $m_2 = p_1$. Siano $N_1(z)D_1^{-1}(z)$ e $N_2(z)D_2^{-1}(z)$ RMF destre irriducibili delle matrici di trasferimento ingresso-stato e $Q_1^{-1}(z)P_1(z)$ e $Q_2^{-1}(z)P_2(z)$ RMF sinistre irriducibili delle matrici di trasferimento stato-uscita rispettivamente di Σ_1 e Σ_2. Il sistema Σ_r,

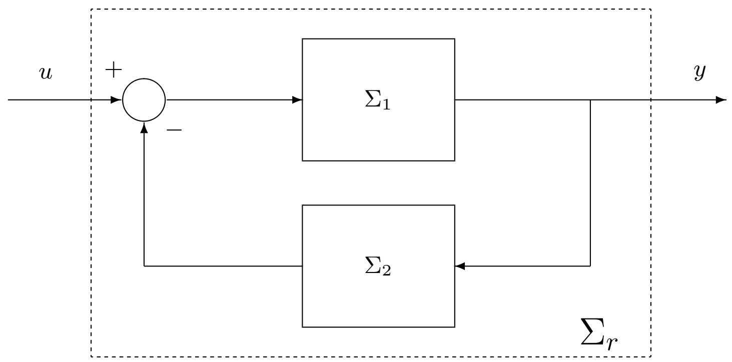

Fig. 4.3

ottenuto dalla connessione in retroazione di Σ_1 e Σ_2 è

1. raggiungibile se e solo se $[H_1 N_1(z) \mid D_2(z)]$ è prima a sinistra,
2. osservabile se e solo se
$$\begin{bmatrix} P_1(z)G_1 \\ Q_2(z) \end{bmatrix}$$
è una matrice prima a destra.

- Esercizio 4.8.6 Sia $\Sigma = (F, G, H)$ un sistema raggiungibile e osservabile, e siano $N_\Sigma(z)D_\Sigma^{-1}(z)$ e $Q_\Sigma^{-1}P_\Sigma(z)$ due RMF irriducibili della sua matrice di trasferimento. Si provi che:

  i) $D_\Sigma(z)$ è anche matrice denominatore di una RMF irriducibile destra della matrice di trasferimento ingresso-stato $(zI - F)^{-1}G$

  ii) $Q_\Sigma(z)$ è anche matrice denominatore di una RMF irriducibile sinistra della matrice di trasferimento stato-uscita $H(zI - F)^{-1}$

  Se $N(z)D^{-1}(z)$ e $Q^{-1}(z)P(z)$ sono RMF irriducibili delle matrici di trasferimento ingresso-stato e stato-uscita del sistema, allora

  iii) $D(z)$ è anche matrice denominatore di una RMF destra irriducibile della matrice di trasferimento di Σ;

  iv) $Q(z)$ è anche matrice denominatore di una RMF sinistra irriducibile della matrice di trasferimento di Σ;

  (Suggerimento per *i)* e *iii)*: Se $N(z)D^{-1}(z)$ è RMF irriducibile destra di $(zI - F)^{-1}G$, allora $HN(z)D^{-1}(z)$ e $N_\Sigma(z)D_\Sigma^{-1}(z)$ sono entrambe RMF irriducibili destre. Per gli altri punti si procede in modo analogo).

- Esercizio 4.8.7 Siano $N_{\Sigma_1}(z)D_{\Sigma_1}^{-1}(z) = Q_{\Sigma_1}^{-1}(z)P_{\Sigma_1}(z)$ e $N_{\Sigma_2}(z)D_{\Sigma_2}^{-1}(z) = Q_{\Sigma_2}^{-1}(z)P_{\Sigma_2}(z)$ sono RMF irriducibili delle matrici di trasferimento dei sistemi Σ_1 e Σ_2, entrambi raggiungibili e osservabili. Se Σ_1 e Σ_2 hanno lo stesso numero di ingressi e di uscite, allora

  i) Σ_p è raggiungibile se e solo se $[D_{\Sigma_1}(z) \;\; D_{\Sigma_2}(z)]$ è prima a sinistra;

  ii) Σ_p è osservabile se e solo se $\begin{bmatrix} Q_{\Sigma_1}(z) \\ Q_{\Sigma_2}(z) \end{bmatrix}$ è prima a destra;

  Se il numero di uscite di Σ_1 coincide con il numero di ingressi di Σ_2, allora

  iii) Σ_s è raggiungibile se e solo se $[N_{\Sigma_1}(z) \;\; D_{\Sigma_2}(z)]$ è prima a sinistra;

  iv) Σ_s è osservabile se e solo se $\begin{bmatrix} P_{\Sigma_2}(z) \\ Q_{\Sigma_1}(z) \end{bmatrix}$ è prima a destra.

Riferimenti bibliografici

Per lo studio delle matrici razionali e delle loro rappresentazioni si rinvia alle monografie citate alla fine del Capitolo 3.
L'approccio polinomiale alla progettazione del compensatore dead-beat è tratto da

1. V.Kučera "Analysis and Design of Discrete Linear Control Systems", Academia, Praga, 1991.

Per quanto riguarda l'analisi della connessione in serie e parallelo di sistemi multivariabili si rinvia a

2. P.A.Fuhrmann "On controllability and observability of systems connected in parallel", IEEE Transactions on Circuits and Systems, vol.CAS-22, pg.57, 1975
3. F.M.Callier, C.D.Nahum "Necessary and sufficient conditions for the complete controllability and observability of systems in series using the coprime factorization of a rational matrix", IEEE Transactions on Circuits, vol.CAS-22, n.2, pp.90-95, 1975

dove, tuttavia, il problema viene affrontato con tecniche differenti.