Capitolo 5

Approccio polinomiale ai modelli di stato

In alternativa ai metodi geometrici basati sulle proprietà degli spazi vettoriali, i modelli di stato lineari possono essere analizzati alla luce dei risultati sulle matrici polinomiali e razionali discussi nei precedenti capitoli. Sebbene entrambi i metodi consentano di studiare quasi tutte le proprietà di interesse, alcuni problemi trovano una soluzione più naturale o più semplice in un ambito piuttosto che nell'altro e gli aspetti che i due approcci permettono di chiarire sono talvolta complementari. Il ricorso al metodo polinomiale non va visto pertanto come un percorso alternativo banale e talvolta privo di chiari riferimenti intuitivi, rispetto all'altro, più tradizionale nella Teoria dei Sistemi.

In questo capitolo ci proponiamo di descrivere la struttura di un sistema dinamico lineare multivariabile, ponendo in relazione le sue rappresentazioni mediante frazioni matriciali con le proprietà interne delle sue realizzazioni di stato. I risultati ottenuti ci permetteranno di fornire un algoritmo per la realizzazione minima di una matrice razionale propria, basato su rappresentazioni fratte in cui il denominatore sia ridotto per colonne.
Come ulteriore applicazione proveremo il teorema di Rosenbrock in termini costruttivi, ottenendo esplicitamente una matrice di retroazione dallo stato per un'arbitraria assegnazione dei polinomi invarianti ad anello chiuso.

5.1 Matrici ingresso-stato

In questo paragrafo si supporrà che in ciascun sistema dinamico $\Sigma = (F, G, H, J)$ **a** m **ingressi e** p **uscite la matrice** G **abbia rango pieno** m Quando il sistema è raggiungibile, ciò equivale a supporre che Σ abbia m invarianti di controllo non nulli.

Sia $\Sigma = (F, G, -, -)$ un sistema raggiungibile, a tempo discreto, con m ingressi e siano $k_1, k_2, \ldots, k_m$ gli *invarianti di controllo* (i.e. gli *indici di Kronecker di raggiungibilità*) strettamente positivi della coppia (F, G). Com'è noto dal corso di Teoria di Sistemi, si può costruire una matrice T di cambiamento di base nello spazio di stato, che riduce il sistema in *forma canonica di controllo multivariabile*, $\Sigma_c = (T^{-1}FT, T^{-1}G, -, -) = (F_c, G_c, -, -)$, con

$$F_c=\left[\begin{array}{c|c|c|c}
\begin{matrix}0 & 1 & \\ & \ddots & \\ & & 1\\ & \mathbf{r}_{11}^T & \end{matrix} & \mathbf{r}_{12}^T & \cdots & \mathbf{r}_{1m}^T \\
\hdashline
\mathbf{r}_{21}^T & \begin{matrix}0 & 1 & \\ & \ddots & \\ & & 1\\ & \mathbf{r}_{22}^T & \end{matrix} & \cdots & \mathbf{r}_{2m}^T \\
\hdashline
 & & \ddots & \\
\hdashline
\mathbf{r}_{m1}^T & \mathbf{r}_{m2}^T & \cdots & \begin{matrix}0 & 1 & \\ & \ddots & \\ & & 1\\ & \mathbf{r}_{mm}^T & \end{matrix}
\end{array}\right], \quad G_c=\left[\begin{array}{ccccc}
0 & 0 & & \ldots & 0\\
 & & & \vdots & \\
0 & 0 & & \ldots & 0\\
1 & \beta_{12} & \beta_{13} & \ldots & \beta_{1m}\\
\hdashline
0 & 0 & & \ldots & 0\\
 & & & \vdots & \\
0 & 0 & & \ldots & 0\\
0 & 1 & \beta_{23} & \ldots & \beta_{2m}\\
\hdashline
 & & & \vdots & \\
\hdashline
0 & 0 & & \ldots & 0\\
 & & & \vdots & \\
0 & 0 & & \ldots & 0\\
0 & 0 & & \ldots & 1
\end{array}\right].$$

I blocchi diagonali di F_c sono matrici compagne di dimensioni $k_i \times k_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$, mentre i blocchi in posizione (i, j) con $i \neq j$ hanno nulle tutte le righe ad eccezione dell'ultima, che ha dimensione k_j e che è stata indicata con $\mathbf{r}_{ij}^T$. Nel seguito, non sara' necessario supporre che le righe di indice $k_1, k_1 + k_2, \ldots, k_1 + k_2 + \ldots k_m$ nella matrice G_c abbiano la struttura sopra riportata (anche se e' sempre possibile individuare una base nello spazio di stato rispetto alla quale G_c ha proprio tale struttura), ma dovremo soltanto ipotizzare esse siano linearmente indipendenti.
Denotiamo con $\hat{F}_c$ e $\hat{G}_c$ le matrici ottenute conservando soltanto le righe non nulle di G_c e le corrispondenti righe in F_c:

$$\hat{F}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{11}^T & \mathbf{r}_{12}^T & & \mathbf{r}_{1m}^T \\ \mathbf{r}_{21}^T & \mathbf{r}_{22}^T & & \mathbf{r}_{2m}^T \\ & & \ldots & \\ \mathbf{r}_{m1}^T & \mathbf{r}_{m2}^T & & \mathbf{r}_{mm}^T \end{bmatrix} \quad \hat{G}_c = \begin{bmatrix} 1 & \beta_{12} & \ldots & \beta_{1m} \\ 0 & 1 & \ldots & \beta_{2m} \\ & & \ldots & \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}. \tag{5.1}$$

Poniamo

$$S(z) := \begin{bmatrix} 1 & & & \\ z & & & \\ \vdots & & & \\ z^{k_1-1} & & & \\ & 1 & & \\ & z & & \\ & \vdots & & \\ & z^{k_2-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ & & & z \\ & & & \vdots \\ & & & z^{k_m-1} \end{bmatrix} \qquad \rho_{ij}(z) := \mathbf{r}_{ij}^T \begin{bmatrix} 1 \\ z \\ \vdots \\ z^{k_j-1} \end{bmatrix}. \tag{5.2}$$

e introduciamo la matrice $m \times m$

$$\begin{aligned} \hat{D}_c(z) : &= \operatorname{diag}\{z^{k_1}, z^{k_2}, \dots, z^{k_m}\} - \hat{F}_c S(z) \\ &= \begin{bmatrix} z^{k_1} - \rho_{11}(z) & -\rho_{12}(z) & \dots & -\rho_{1m}(z) \\ -\rho_{21}(z) & z^{k_2} - \rho_{22}(z) & \dots & -\rho_{2m}(z) \\ & & \ddots & \\ -\rho_{m1}(z) & -\rho_{m2}(z) & \dots & z^{k_m} - \rho_{mm}(z) \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Lemma 5.1.1 [Matrice di trasferimento ingresso/stato] *Sia $\Sigma_c = (F_c, G_c, -, -)$ un sistema raggiungibile in forma canonica di controllo multivariabile. Con riferimento alle notazioni introdotte precedentemente, la matrice di trasferimento ingresso-stato del sistema è rappresentata dalle frazioni matriciali, rispettivamente sinistra e destra,*

$$W_{is}^{\text{can}}(z) = (zI_n - F_c)^{-1} G_c \tag{5.4}$$

e

$$W_{is}^{\text{can}}(z) = S(z) \left[\hat{G}_c^{-1} \hat{D}_c(z) \right]^{-1} =: S(z) D_c(z)^{-1}, \tag{5.5}$$

entrambe irriducibili. Inoltre $D_c(z)$ è ridotta per colonne, con gradi di colonna pari agli invarianti di controllo della coppia (F_c, G_c).

Dimostrazione L'irriducibilità di $(zI_n - F_c)^{-1} G_c$ consegue dal criterio PBH di raggiungibilità e quella di $S(z) D_c(z)^{-1}$ dal fatto che la matrice numeratore

$S(z)$ è prima a destra. Per verificare che $(zI_n - F_c)^{-1}G_c = S(z)\Big[\hat{G}_c^{-1}\hat{D}_c(z)\Big]^{-1}$, è sufficiente provare l'eguaglianza

$$G_c\Big[\hat{G}_c^{-1}\hat{D}_c(z)\Big] = (zI_n - F_c)S(z). \tag{5.6}$$

Ma il primo membro della (5.6) è uguale a

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & & \dots & 0 \\ & & & \vdots & \\ 0 & 0 & & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & \dots & 0 \\ & & & \vdots & \\ 0 & 0 & & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & & \vdots & \\ 0 & 0 & & \dots & 0 \\ & & & \vdots & \\ 0 & 0 & & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & \dots & 1 \end{bmatrix} \hat{D}_c(z) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & & 0 \\ z^{k_1} - \rho_{11}(z) & -\rho_{12}(z) & \cdots & -\rho_{1m}(z) \\ 0 & 0 & & 0 \\ -\rho_{21}(z) & z^{k_2} - \rho_{22}(z) & \cdots & -\rho_{2m}(z) \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 0 \\ -\rho_{m1}(z) & -\rho_{m2}(z) & \cdots & z^{k_m} - \rho_{mm}(z) \end{bmatrix},$$

mentre il secondo membro è dato da

$$zS(z) - F_cS(z) = \begin{bmatrix} z & & & \\ z^2 & & & \\ \vdots & & & \\ z^{k_1} & & & \\ & z & & \\ & z^2 & & \\ & \vdots & & \\ & z^{k_2} & & \\ & & \vdots & \\ & & & z \\ & & & z^2 \\ & & & \vdots \\ & & & z^{k_m} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} z & 0 & & 0 \\ z^2 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \rho_{11}(z) & \rho_{12}(z) & & \rho_{1m}(z) \\ 0 & z & & 0 \\ 0 & z^2 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \rho_{21}(z) & \rho_{22}(z) & & \rho_{2m}(z) \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & & z \\ 0 & 0 & & z^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \rho_{m1}(z) & \rho_{m2}(z) & & \rho_{mm}(z) \end{bmatrix}.$$

L'eguaglianza (5.6) è allora ovvia.

È poi chiaro che $D_c(z) = \hat{G}_c^{-1}\hat{D}_c(z)$ è ridotta per colonne, con gradi di colonna pari a $k_1, k_2, \ldots k_m$. ■

Osservazione 1 Le frazioni matriciali irriducibili in (5.4) e (5.5) esprimono la mappa ingresso-stato riferita alla base della forma canonica ed hanno matrici denominatore $(zI_n - F_c)$ e $D_c(z)$, ridotte rispettivamente per righe e per colonne. Se lo spazio di stato è riferito alla base originaria, alla coppia $(F, G) = (TF_cT^{-1}, TG_c)$ corrispondono una RMF sinistra irriducibile della matrice di trasferimento ingresso-stato

$$W_{is}(z) = (zI_n - F)^{-1}G = \left[(zI - F_c)T^{-1}\right]^{-1}G_c = T\left[(zI - F_c)\right]^{-1}G_c$$

il cui denominatore è ancora ridotto per righe, e una RMF destra irriducibile

$$W_{is}(z) = [TS(z)]D_c(z)^{-1},$$

con il denominatore ancora ridotto per colonne.

Osservazione 2 Se $N_{is}(z)D_{is}(z)^{-1}$ è una RMF destra **irriducibile** della matrice di trasferimento ingresso-stato del sistema raggiungibile $\Sigma = (F, G, -, -)$, con $D_{is}(z)$ **ridotto per colonne**, allora $N_{is}(z)$ e $D_{is}(z)$ differiscono da $TS(z)$ e $D_c(z)$ per un fattore destro unimodulare comune e

1. i **polinomi invarianti** non unitari delle matrici denominatore $D_{is}(z)$, $D_c(z)$ e $zI - F$ coincidono. Infatti, per quanto visto nel paragrafo 4.4, essi non dipendono dalla particolare RMF irriducibile, destra o sinistra, adottata. Se $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, per l'Esercizio 3.1.3 essi sono i polinomi invarianti definiti sulla forma di Jordan di F_c.
2. i **gradi di colonna** di $D_{is}(z)$ coincidono, a meno dell'ordine, con quelli di $D_c(z)$, e quindi con gli invarianti di controllo $k_1, k_2, \ldots, k_m$ della coppia (F, G). Infatti le matrici ridotte per colonne $D_c(z)$ e $D_{is}(z)$ differiscono per un fattore unimodulare destro, quindi per la Proposizione 3.5.8 hanno il medesimo insieme di gradi di colonna;
3. la matrice numeratore $N_{is}(z)$ è **prima a destra**. Infatti è prima a destra $S(z)$ e risulta $N_{is}(z) = [TS(z)]U(s)$, con T matrice costante invertibile e $U(z)$ unimodulare.
4. anche $N_{is}(z)$ è **ridotta per colonne**, e i suoi **gradi di colonna** sono inferiori di un'unità rispetto a quelli delle colonne corrispondenti in $D_{is}(z)$.

   Per verificarlo, si può dapprima supporre che il sistema sia in forma canonica di controllo multivariabile. Esiste allora una matrice unimodulare $U(z)$ per cui valgono le condizioni

   $$N_{is}(z) = S(z)U(z), \qquad D_{is}(z) = D_c(z)U(z) \tag{5.7}$$

   Chiaramente $S(s)$ e $S(z)U(z)$ hanno il medesimo grado interno $\sum_{i=1}^{m}(k_i - 1)$. D'altra parte, poiché la matrice di trasferimento ingresso-stato è strettamente propria, i gradi di colonna di $S(z)U(z)$ sono inferiori a quelli corrispondenti di $D_{is}(z)$ e quindi, opportunamente ordinati, non eccedono $k_1 - 1, k_2 - 1, \ldots, k_m - 1$. Poichè il grado interno di $S(z)U(z)$ non può eccedere quello esterno, i due gradi coincidono e la conclusione è immediata.

   Se il sistema non è in forma canonica, basta osservare che la matrice numeratore $N_{is}(z)$ del legame ingresso-stato ha la forma $T[S(z)U(z)]$.
5. posto $n := \sum_{i=1}^{m} k_i$ e $N_{is}(z) = N_0 + N_1z + \ldots + N_{k_{\max}-1}z^{k_{\max}-1}$, le colonne di

   $$[\,N_0 \quad N_1 \quad \ldots \quad N_{k_{\max}-1}\,]$$

generano tutto lo spazio $\mathbb{F}^n$. In caso contrario, esisterebbe un vettore non nullo $\mathbf{v} \in \mathbb{F}^n$ per cui risulta $\mathbf{v}^T N_i = 0, \quad i = 0, 1, \ldots, k_{\max} - 1$ e ciò implicherebbe

$$0 = \mathbf{v}^T N_{is}(z) = \mathbf{v}^T TS(z)U(z) = \mathbf{v}^T TS(z) = \mathbf{w}^T S(z). \tag{5.8}$$

Poiché un vettore $\mathbf{w} \in \mathbb{F}^n$ soddisfa $\mathbf{w}^T S(z) = 0$ solo se è il vettore nullo, la (5.8) non può essere verificata.

- Esercizio 5.1.1 Sia $\Sigma = (F, G, H, J)$ un sistema di ordine n (non è richiesto che G abbia rango di colonna pieno) e sia $N_{is}(z)D_{is}(z)^{-1}$ è una RMF irriducibile della sua matrice ingresso-stato $W_{is}(z)$.

  (i) La coppia (F, G) è raggiungibile se e solo se deg det $D_{is}(z) = n$
  (Suggerimento: come conseguenza del criterio PBH, il sistema non è raggiungibile se e solo se $W_{is}(z)$ è espressa da una RMF sinistra irriducibile con denominatore a grado determinantale minore di n)

  (ii) se G ha rango $r < m$ e $D_{is}(z)$ è ridotta per colonne, $m - r$ colonne di $D_{is}(z)$ hanno grado 0. In $N_{is}(z)$ le colonne corrispondenti sono nulle, mentre le r rimanenti formano una matrice prima a destra
  (Suggerimento: si suppongano indipendenti le prime r colonne di G e sia $G = [\, G' \quad L \,]$. Allora $W'_{is}(z) = (zI - F)^{-1}G'$ ha una RMF destra irriducibile con denominatore ridotto per colonne $N'_{is}(z)D'_{is}(z)^{-1}$ e con $N'_{is}(z)$ prima a destra. Si verifichi che $W_{is}(z)$ è esprimibile nella forma irriducibile

$$N'_{is}(z) \, [\, I_r \quad 0_{r \times (m-r)} \,] \begin{bmatrix} D'_{is}(z) & -L \\ 0 & I_{m-r} \end{bmatrix}^{-1} \tag{5.9}$$

  Si ponga $N_{is}(z) = N'_{is}(z) \, [\, I_r \quad 0_{r \times (m-r)} \,]$ e si ricordi che $W_{is}(z)$ è strettamente propria).

- Esercizio 5.1.2 [Rappresentazioni in d] Sia $\Sigma = (F, G, H, J)$ un sistema di ordine n (non è richiesto che G abbia rango di colonna pieno)

  (i) La coppia (F, G) è raggiungibile se e solo se la matrice $[\, I - dF \quad dG \,]$ è prima a sinistra e ridotta per righe con gradi di riga tutti unitari
  (Suggerimento: la seconda condizione equivale a supporre $[\, -F \quad G \,]$ a rango di riga pieno)

  (ii) Se $P_{is}(d)Q_{is}(d)^{-1}$ è una RMF irriducibile della matrice ingresso-stato $W_{is}(d^{-1})$ e

$$\begin{bmatrix} P_{is}(d) \\ Q_{is}(d) \end{bmatrix} \tag{5.10}$$

  è ridotta per colonne, il sistema è raggiungibile se e solo se la somma dei gradi di colonna è n
  (Suggerimento: se (F, G) è raggiungibile, $N_{is}(z)D_{is}(z)^{-1}$ è irriducibile, $D_{is}(z)$ è ridotta per colonne con gradi $k_1, k_2, \ldots, k_m$, allora si ha $\sum_i k_i = n$. In (5.9) si moltiplichino $N_{is}(z)$ e $D_{is}(z)$ per $\operatorname{diag}\{z^{-k_1}, z^{-k_2}, \ldots, z^{-k_m}\}$: ponendo $d := z^{-1}$, si ricava una RMF (5.10) nella variabile d e con le proprietà volute. Ogni altra RMF irriducibile con (5.10) ridotta per colonne ha gli stessi gradi di colonna e quindi la somma dei gradi è n. Se (F, G) non è raggiungibile, $N_{is}(z)D_{is}(z)^{-1}$ dipende solo dal sottosistema raggiungibile, che ha dimensione minore di n).

  (iii) Quando G ha rango di colonna m, alla condizione che (5.10) sia ridotta per colonne si può sostituire quella che sia ridotta per colonne $P_{is}(d)$, con somma dei gradi pari a n. Perché?

- ESERCIZIO 5.1.3* [RAPPRESENTAZIONI IN d] Sia $\Sigma = (F, G, H, J)$ un sistema raggiungibile, con G di rango m e indici di Kronecker (positivi!) $k_1, k_2, \dots k_m$. Ricorrendo alla forma canonica di controllo multivariabile, si verifichi che esiste una RMF irriducibile $P_{is}(d)Q_{is}(d)^{-1}$ della matrice di trasferimento ingresso-stato nella quale il numeratore è

$$P_{is}(d) = \begin{bmatrix} d^{k_1} & & & \\ \vdots & & & \\ d & & & \\ & d^{k_2} & & \\ & \vdots & & \\ & d & & \\ & & \ddots & \\ & & & d^{k_m} \\ & & & \vdots \\ & & & d \end{bmatrix} \tag{5.11}$$

e il denominatore $Q_{is}(d)$ è invertibile in $d = 0$ e ha grado della i-esima colonna non superiore a k_i, $i = 1, 2, \dots, m$.

5.2 Teoremi di struttura e matrici stato-uscita

Sfruttando la RMF destra della matrice di trasferimento ingresso-stato data in (5.5), la matrice di trasferimento ingresso-uscita di Σ_c si può scrivere

$$\begin{aligned} W(z) &= H_c(zI_n - F_c)^{-1}G_c + J \\ &= [H_cS(z)][\hat{G}_c^{-1}\hat{D}_c(z)]^{-1} + J \\ &= [H_cS(z)][\hat{G}_c^{-1}\mathrm{diag}\{z^{k_1}, z^{k_2}, \dots, z^{k_m}\} - G_c^{-1}\hat{F}_cS(z)]^{-1} + J \\ &= \Big[H_cS(z) + J\hat{G}_c^{-1}\hat{D}_c(z)\Big][\hat{G}_c^{-1}\hat{D}_c(z)]^{-1} =: N_c(z)D_c(z)^{-1}. \end{aligned} \tag{5.12}$$

Siamo così giunti al seguente

Proposizione 5.2.1 [PRIMO TEOREMA DI STRUTTURA] *La matrice di trasferimento del sistema raggiungibile $\Sigma_c = (F_c, G_c, H_c, J)$ è rappresentata dalla frazione matriciale destra*

$$\Big[H_cS(z) + J\hat{G}_c^{-1}\hat{D}_c(z)\Big][\hat{G}_c^{-1}\hat{D}_c(z)]^{-1} = N_c(z)D_c^{-1}(z). \tag{5.13}$$

Essa ha le seguenti proprietà

i) $\det D_c(z) = m \cdot \det(zI_n - F_c)$, $m \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$;

ii) $D_c(z)$ *è ridotta per colonne, con gradi di colonna pari agli invarianti di controllo* $k_1, k_2, \dots, k_m$;

iii) *$N_c(z)$ ha gradi di colonna non superiori a quelli delle colonne corrispondenti in $D_c(z)$, e minori se $J = 0$;*

iv) *$N_c(z)D_c^{-1}(z)$ è irriducibile se e solo se lo è la frazione matriciale bilatera $H_c(zI_n - F_c)^{-1}G_c$, quindi se e solo se Σ_c è raggiungibile e osservabile.*

Dimostrazione la prova dei punti i) e ii) è già stata data. Per quanto riguarda il punto iii), essendo $W(z)$ una matrice propria (strettamente propria se $J = 0$), il risultato segue dalla Proposizione 4.5.1, oppure per ispezione diretta delle matrici. Per il punto iv), $N_c(z)D_c(z)^{-1}$ è irriducibile se e solo se sono irriducibili $(N_c(z) - JD(z))D_c(z)^{-1} = H_c(zI_n - F_c)^{-1}G_c$, tutti dotati del medesimo grado determinantale. Ma la irriducibiltà di $H_c(zI_n - F_c)^{-1}G_c$ equivale a quella di $H_c(zI_n - F_c)^{-1}$ e di $(zI_n - F_c)^{-1}G_c$, ovvero alla osservabilità e alla raggiungibilità del sistema. ■

Gli argomenti precedentemente discussi con riferimento ad un sistema in forma canonica di controllo multivariabile ammettono una versione duale riferita alla forma canonica multivariabile di osservabilità, che brevemente accenniamo. Supponiamo che nel sistema $\Sigma = (F, G, H, J)$ **la matrice H abbia rango p** e che il sistema sia osservabile con *invarianti di osservazione* (*indici di Kronecker di osservabilità*), $h_1, h_2, \ldots, h_p$. Con un opportuno cambiamento di base nello spazio di stato ci possiamo riportare ad un sistema algebricamente equivalente $\Sigma_o = (F_o, G_o, H_o, J)$ in cui le matrici F_o e H_o hanno la seguente struttura

$$F_o = \left[\begin{array}{cccc}
\begin{matrix}0 & & & \\ 1 & & & \\ & \ddots & & \mathbf{c}_{11} \\ & & 1 & \end{matrix} & \mathbf{c}_{12} & \cdots & \mathbf{c}_{1p} \\
\mathbf{c}_{21} & \begin{matrix}0 & & & \\ 1 & & & \\ & \ddots & & \mathbf{c}_{22} \\ & & 1 & \end{matrix} & \cdots & \mathbf{c}_{2p} \\
 & & \ddots & \\
\mathbf{c}_{p1} & \mathbf{c}_{p2} & \cdots & \begin{matrix}0 & & & \\ 1 & & & \\ & \ddots & & \mathbf{c}_{pp} \\ & & 1 & \end{matrix}
\end{array}\right]$$

$$H_o = \begin{bmatrix} 0 & & 0 & 1 & 0 & & 0 & 0 & & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & & 0 & \gamma_{21} & 0 & & 0 & 1 & & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & & 0 & \gamma_{31} & 0 & & 0 & \gamma_{32} & \dots & 0 & & 0 & 0 \\ & \vdots\ \vdots & & \vdots & & \vdots\ \vdots & & \vdots & & & \vdots\ \vdots & & \vdots \\ 0 & & 0 & \gamma_{p1} & 0 & & 0 & \gamma_{p2} & & 0 & & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

con $\mathbf{c}_{ij}$ vettori colonna in $\mathbb{F}^{h_i}$, $i = 1, 2, \dots, p$. Se introduciamo le matrici

$$\hat{F}_o := \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{11} & \mathbf{c}_{12} & \dots & \mathbf{c}_{1p} \\ \mathbf{c}_{21} & \mathbf{c}_{22} & \dots & \mathbf{c}_{2p} \\ & & \ddots & \\ \mathbf{c}_{p1} & \mathbf{c}_{p2} & \dots & \mathbf{c}_{pp} \end{bmatrix}, \qquad \hat{H}_o = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ \gamma_{21} & 1 & & 0 \\ \gamma_{31} & \gamma_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \gamma_{p1} & \gamma_{p2} & & 1 \end{bmatrix},$$

$$S^T(z) = \begin{bmatrix} 1 & z & \dots & z^{h_1-1} & & & 0 & & & & & 0 \\ & & 0 & & 1 & z & \dots & z^{h_2-1} & & & & 0 \\ & & & & & & & & \ddots & & & \\ & & 0 & & & & 0 & & 1 & z & \dots & z^{h_p-1} \end{bmatrix}$$

e poniamo

$$\chi_{ij}(z) := [\, 1 \quad z \quad \dots \quad z^{h_i-1} \,]\, \mathbf{c}_{ij}.$$

si verifica che

1)

$$\begin{aligned} \hat{Q}_o(z) &:= \operatorname{diag}\{z^{h_1}, z^{h_2}, \dots, z^{h_p}\} - S^T(z)\hat{F}_o \\ &= \begin{bmatrix} z^{h_1} - \chi_{11}(z) & -\chi_{12}(z) & \dots & -\chi_{1p}(z) \\ -\chi_{21}(z) & z^{h_2} - \chi_{22}(z) & \dots & -\chi_{2p}(z) \\ & & \ddots & \\ -\chi_{p1}(z) & -\chi_{p2}(z) & \dots & z^{h_p} - \chi_{pp}(z) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

è ridotta per righe;

2) le frazioni matriciali

$$H_o(zI_n - F_o)^{-1} = \left(\hat{Q}_o(z)\hat{H}_o^{-1}\right)^{-1} S^T(z) =: Q_o(z)^{-1} S^T(z)$$

sono RMF irriducibili, rispettivamente destra e sinistra, della *matrice di trasferimento stato-uscita* $W_{su}^{\text{can}}(z)$;

3) $\det(zI_n - F_o) = k \cdot \det(\hat{Q}_o(z)\hat{H}_o^{-1})$.

- ESERCIZIO 5.2.1 Si dualizzino alla funzione di trasferimento stato-uscita riferita ad una base generica nello spazio di stato le proprietà viste per $W_{is}(z)$.

Si perviene quindi al seguente risultato:

Proposizione 5.2.2 [SECONDO TEOREMA DI STRUTTURA] *La matrice di trasferimento del sistema osservabile $\Sigma_o = (F_o, G_o, H_o, J)$ è rappresentata dalla frazione matriciale sinistra*

$$\left[\hat{Q}_o(z)\hat{H}_o^{-1}\right]^{-1}\left[S^T(z)G_o + \hat{Q}_o(z)\hat{H}_o^{-1}J\right] =: Q_o(z)^{-1}P_o(z).$$

Essa ha le seguenti proprietà

i) $\det Q_o(z) = c \cdot \det(zI_n - F_o),\ c \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$;

ii) $Q_o(z)$ *è ridotta per righe con gradi di riga pari agli invarianti di osservazione* $h_1, h_2, \ldots, h_p$;

iii) $P_o(z)$ *ha gradi di riga non superiori a quelli delle righe corrispondenti in* $Q_o(z)$*, e minori se* $J = 0$.

iv) $Q_o(z)^{-1}P_o(z)$ *è irriducibile se e solo se lo è la frazione matriciale bilatera* $H_o(zI_n - F_o)^{-1}G_o$*, quindi se e solo se* Σ_o *è raggiungibile e osservabile.*

■

5.3 Realizzazione di matrici razionali proprie

I teoremi di struttura consentono di ottenere direttamente rappresentazioni matriciali fratte destre o sinistre della matrice di trasferimento a partire da modelli di stato in forma canonica di controllo o di osservazione multivariabile. Ci proponiamo ora di affrontare il problema inverso, ovvero di ottenere un (algoritmo per costruire un) modello di stato quando la matrice di trasferimento sia assegnata sotto forma di frazione matriciale. In particolare, data una matrice razionale propria $W(z)$, mostreremo come

- da una sua RMF destra con matrice denominatore ridotta per colonne sia possibile ottenere direttamente una realizzazione in forma canonica di controllo, con invarianti di controllo coincidenti con i gradi di colonna;

- dualmente, da una sua RMF sinistra con matrice denominatore ridotta per righe sia possibile ottenere direttamente una realizzazione in forma canonica di osservazione con invarianti di osservazione coincidenti con i gradi di riga;
- nel caso in cui le RMF di $W(z)$ siano irriducibili, le procedure di realizzazione proposte portano direttamentre a realizzazioni minime.

Definizione 5.3.1 [Grado di McMillan] *La dimensione minima di realizzazione di una matrice razionale propria $W(z)$, ovvero la più piccola dimensione dei sistemi dinamici $\Sigma = (F, G, H, J)$ soddisfacenti la relazione*

$$W(z) = H(zI - F)^{-1}G + J$$

si dice grado di McMillan di $W(z)$ e sarà indicata con il simbolo $\mu(W)$.

5.3.1 Preliminari alla realizzazione

Riduzione al caso di matrici strettamente proprie Una matrice razionale propria $W(z) \in \mathbb{F}(z)^{p\times m}$ è esprimibile in modo unico come somma di una matrice costante J e di una matrice razionale strettamente propria $W_{sp}(z)$.

Nel caso in cui già si disponga di una RMF destra $N(z)D^{-1}(z)$ di una matrice propria $W(z)$, con $D(z)$ ridotta per colonne e gradi di colonna $k_1, k_2, \ldots, k_m$, sia J che $W_{sp}(z)$ possono essere ricavate direttamente dalle rappresentazioni di $N(z)$ e $D(z)$. Ponendo infatti $\Delta(z) := \mathrm{diag}\{z^{k_1}, z^{k_2}, \ldots, z^{k_m}\}$ si ha [1]

$$N(z) = N_{hc}\Delta(z) + N_{rem}(z) \tag{5.14}$$

$$D(z) = D_{hc}\Delta(z) + D_{rem}(z), \tag{5.15}$$

con D_{hc} matrice invertibile. È immediato rappresentare $N(z)$ nella forma

$$\begin{aligned} N(z) &= N_{hc}\Delta(z) + N_{rem}(z) \\ &= N_{hc}D_{hc}^{-1}\Big(D_{hc}\Delta(z) + D_{rem}(z)\Big) + \Big(N_{rem}(z) - N_{hc}D_{hc}^{-1}D_{rem}(z)\Big), \end{aligned}$$

e quindi $W(z)$ come

$$\begin{aligned} W(z) &= N(z)D^{-1}(z) \\ &= N_{hc}D_{hc}^{-1} + \Big[N_{rem}(z) - N_{hc}D_{hc}^{-1}D_{rem}(z)\Big]D^{-1}(z) =: J + W_{sp}(z). \end{aligned}$$

in cui $\Big[N_{rem}(z) - N_{hc}D_{hc}^{-1}D_{rem}(z)\Big]D^{-1}(z)$ è strettamente propria.
Questa operazione preliminare fornisce

[1] nella rappresentazione di $N(z)$ qui considerata, N_{hc} non è la matrice dei coefficienti dei monomi di grado massimo per colonna: è infatti possibile che la colonna i-esima di $N(z)$ non contenga alcun temine di grado k_i.

- la matrice di accoppiamento diretto ingresso-uscita J direttamente a partire dalla matrice N_{hc} e dalla matrice conduttrice D_{hc}, e
- la parte strettamente propria $W_{sp}(z)$ ancora sotto forma di frazione matriciale con la medesima matrice denominatore $D(z)$ ridotta per colonne e con matrice numeratore $N_{rem}(z) - N_{hc}D_{hc}^{-1}D_{rem}(z)$ ottenibile direttamente dalle scomposizioni (5.14) e (5.15) di $N(z)$ e $D(z)$.

Possiamo quindi assumere, d'ora in poi, che la $W(z)$ da realizzare sia strettamente propria e assegnata mediante una sua RMF destra $N(z)D^{-1}(z)$ con denominatore ridotto per colonne.

Riduzione al caso con k_i strettamente positivi Anche se non indispensabile per la procedura che descriveremo, ipotizzeremo che la matrice denominatore di $W(z)$ abbia strettamente positivi i gradi di colonna.

Se nella matrice strettamente propria $N(z)D(z)^{-1}$ i gradi di colonna $k_{i_1}, k_{i_2}, \dots, k_{i_\nu}$ sono nulli, le colonne di indice $i_1, i_2, \dots, i_\nu$ sono identicamente nulle in $N(z)$ e costanti in $D(z)$. Se gli indici $i_1, i_2, \dots, i_\nu$ sono[2] $m-\nu+1, m-\nu+2, \dots, m$ possiamo scrivere

$$N(z)D(z)^{-1} = [\tilde{N}(z) \mid 0] \left\{ D_{\text{hc}}\text{diag}\{z^{k_1}, z^{k_2}, \dots, z^{k_{m-\nu}}, 1, \dots, 1\} + [\tilde{D}_{\text{rem}} \mid 0] \right\}^{-1} \tag{5.16}$$

Se $Y \in \mathbb{F}^{(m-\nu)\times m}$ è la matrice costituita dalle prime $m-\nu$ righe di D_{hc}^{-1}, e soddisfacente quindi la condizione $YD_{\text{hc}} = [I_{m-\nu} \mid 0]$, ricerchiamo una matrice $X(z)$ in $\mathbb{F}[z]^{(m-\nu)\times(m-\nu)}$ che risolva l'equazione

$$X(z)[I_{m-\nu} \mid 0] = YD(z) \tag{5.17}$$

Si ottiene

$$\begin{aligned} [X(z) \mid 0] &= YD_{\text{hc}}\text{diag}\{z^{k_1}, z^{k_2}, \dots, z^{k_{m-\nu}}, 1, \dots, 1\} + Y[\tilde{D}_{\text{rem}} \mid 0] \\ &= \text{diag}\{z^{k_1}, z^{k_2}, \dots, z^{k_{m-\nu}}\}_{(m-\nu)\times m} + [Y\tilde{D}_{\text{rem}} \mid 0] \end{aligned}$$

ovvero

$$X(z) = \text{diag}\{z^{k_1}, z^{k_2}, \dots, z^{k_{m-\nu}}\} + Y\tilde{D}_{\text{rem}}. \tag{5.18}$$

La matrice così costruita risolve la (5.17), ha rango pieno ed è ridotta per colonne con gradi di colonna strettamente positivi. Ma allora si ha

$$N(z)D(z)^{-1} = \tilde{N}(z)[I_{m-\nu} \mid 0]D(z)^{-1} = \tilde{N}(z)X(z)^{-1}Y \tag{5.19}$$

e per realizzare $N(z)D(z)^{-1}$ basta realizzare $\tilde{N}(z)X(z)^{-1}$ e moltiplicare per Y la matrice G della realizzazione ottenuta.

5.3.2 Algoritmo di realizzazione

Riassumiamo qual è la struttura della RMF destra $N(z)D^{-1}(z)$ di $W(z) \in \mathbb{F}(z)^{p\times m}$ della quale intendiamo costruire un modello di stato:

[2] in caso contrario basta scegliere un'opportuna matrice P di permutazione e riscrivere la matrice di trasferimento nella forma $[N(z)P][D(z)P]^{-1}$, in cui sono identicamente nulle le ultime ν colonne del numeratore e sono costanti le ultime ν colonne del denominatore.

$D(z)$ ha gradi di colonna $k_1, k_2, \ldots, k_m$ strettamente positivi ed è ridotta per colonne, cosicchhé in

$$D(z) = D_{hc}\text{diag}\{z^{k_1}, z^{k_2}, \ldots, z^{k_m}\} + D_{rem}(z)$$

D_{hc} è invertibile (anche se non necessariamente triangolare con diagonale unitaria)

$N(z)$ ha gradi di colonna strettamente inferiori ai corrispondenti gradi di colonna in $D(z)$.

- Esercizio 5.3.1* (i) Si dimostri che se $D(z)$ è ridotta per colonne, è possibile ridurla ad avere D_{hc} triangolare superiore a diagonale unitaria con operazioni elementari di colonna che non alterano l'insieme dei gradi di colonna. (Suggerimento. Fra le colonne di D_{hc} aventi l'elemento in ultima riga non nullo, se ne prenda una di indice tale che la corrispondente in $D(z)$ abbia grado minimo. Si porti tale colonna di $D(z)$ in ultima posizione e si renda monico il polinomio in posizione (m, m), ottenendo la matrice $D'(z)$. Se la i-esima colonna di D'_{hc}, $i = 1, 2, \ldots, m-1$, ha l'ultima componente non nulla, si sottrae alla i-esima colonna di $D'(z)$ la m-esima moltiplicata per il monomio $[D'_{hc}]_{mi} z^{k'_i - k'_m}$. Si perviene a $D''(z) = D(z)U_1U_2(z)$ in cui i gradi di colonna sono, a meno dell'ordine, $k_1, k_2, \ldots, k_m$ e D''_{hc} è invertibile, con l'ultima riga uguale a $[0\ 0\ \ldots\ 1]$. Si proceda in modo analogo sulla sottomatrice $(m-1) \times (m-1)$, ridotta per colonne, ottenuta cancellando in $D''(z)$ l'ultima riga e l'ultima colonna, e così via).

  (ii) La matrice $W(z)$ può essere scritta nella forma $\bar{N}(z)\bar{D}^{-1}(z)$, in cui $\bar{D}_{hc}$ è triangolare a diagonale unitaria.

Posto $n := k_1 + k_2 + \ldots + k_m$, essendo tutti i k_i strettamente positivi possiamo definire la matrice $S(z) \in \mathbb{F}[z]^{n \times m}$ come in (5.2) e, tenendo conto dei gradi dei polinomi in gioco, rappresentare $D_{rem}(z)$ e $N(z)$ nella forma

$$\begin{aligned} D_{rem}(z) &= -D_{lc}S(z), \qquad D_{lc} \in \mathbb{F}^{m \times n} &\quad (5.20)\\ N(z) &= H_cS(z), \qquad H_c \in \mathbb{F}^{p \times n}. &\quad (5.21)\end{aligned}$$

Abbiamo così

$$N(z)D(z)^{-1} = \Big[H_cS(z)\Big]\Big[D_{hc}\text{diag}\{z^{k_1}, z^{k_2}, \ldots, z^{k_m}\} - D_{lc}S(z)\Big]^{-1} \qquad (5.22)$$

Ricordando dal primo teorema di struttura che la matrice di trasferimento di un sistema strettamente proprio $\Sigma_c = (F_c, G_c, H_c)$ in forma canonica di controllo multivariabile è data da

$$W(z) = \Big[H_cS(z)\Big]\Big[\hat{G}_c^{-1}\text{diag}\{z^{k_1}, z^{k_2}, \ldots, z^{k_m}\} - \hat{G}_c^{-1}\hat{F}_cS(z)\Big]^{-1} \qquad (5.23)$$

possiamo identificare la (5.22) con la matrice di trasferimento di Σ_c pur di porre

$$\hat{F}_c := D_{hc}^{-1} D_{lc} \qquad \hat{G}_c := D_{hc}^{-1} \tag{5.24}$$

In altre parole, se interpretiamo le matrici $\hat{F}_c$ e $\hat{G}_c$ definite dalle (5.24) come quelle ottenute in (5.1) da un sistema in forma canonica di controllo multivariabile, in base al primo teorema di struttura $N(z)D^{-1}(z)$ è la matrice di trasferimento del sistema strettamente proprio in forma canonica di controllo (F_c, G_c, H_c) in cui F_c e G_c hanno come righe in posizione k_1, $k_1 + k_2$, ..., $k_1 + k_2 + \ldots + k_m$ rispettivamente la prima, seconda, ..., la m-esima riga di $\hat{F}_c$ e di $\hat{G}_c$ definite in (5.24). Abbiamo così costruito una realizzazione raggiungibile per $N(z)D^{-1}(z)$, con invarianti di controllo coincidenti con i gradi di colonna della matrice $D(z)$.

Proposizione 5.3.1 [Minimalità della realizzazione] *Nelle ipotesi sulla struttura di $N(z)$ e di $D(z)$ indicate all'inizio del paragrafo, se la frazione matriciale $W(z) = N(z)D^{-1}(z)$ è irriducibile, la procedura di realizzazione descritta fornisce un modello di stato (F_c, G_c, H_c) minimo per $W(z)$.*

Dimostrazione Supponiamo che $N(z)D^{-1}(z)$ sia una RMF irriducibile di $W(z)$, con $n = \deg \det D$ e sia $\Sigma_c = (F_c, G_c, H_c)$ il modello di stato di ordine n fornito dalla procedura di realizzazione sopra descritta. Avendosi

$$W(z) = N(z)D^{-1}(z) = H_c(zI_n - F_c)^{-1}G_c, \tag{5.25}$$

la RMFB $H_c(zI_n - F_c)^{-1}G_c$ ha grado determinantale n, quindi è pure essa irriducibile, quindi sono irriducibili $H_c(zI_n - F_c)^{-1}$ e $(zI_n - F_c)^{-1}G_c$ e la realizzazione è minima. ■

Possiamo concludere che le realizzazioni minime di $W(z)$ hanno tutte dimensione eguale al grado determinantale della matrice denominatore in una generica rappresentazione matriciale fratta irriducibile di $W(z)$.

Data una matrice razionale propria $W(z)$, i gradi di colonna $k_1, k_2, \ldots, k_m$ e quelli di riga $h_1, h_2, \ldots, h_p$ della matrice denominatore in una RMF irriducibile rispettivamente destra o sinistra, sono univocamente individuati quando si imponga che le matrici denominatore siano ridotte per colonne o per righe. Ciò è conseguenza della Proposizione 3.5.8 e del fatto che nelle RMF irriducibili destre e sinistre le matrici denominatore sono individuate univocamente a meno di operazioni elementari, sulle colonne nel primo caso e sulle righe nel secondo.
In base all'algoritmo prima descritto e al suo analogo per la forma canonica di osservazione, tra le realizzazioni minime ne esiste una i cui invarianti di controllo sono $k_1, k_2, \ldots, k_m$ e una i cui invarianti di osservazione sono $h_1, h_2, \ldots, h_p$. Poichè le realizzazioni minime di $W(z)$ sono algebricamente equivalenti, esse hanno tutte

i medesimi invarianti di controllo e di osservazione; pertanto $k_1, k_2, \ldots, k_m$ e $h_1, h_2, \ldots, h_p$ sono gli invarianti di controllo e di osservazione in ogni realizzazione minima di $W(z)$.

Corollario 5.3.2 *Sia $W(z)$ una matrice razionale propria. Coincidono con il suo grado di McMillan $\mu(W)$, ovvero con la dimensione minima di realizzazione,*

- *la somma dei gradi di colonna del denominatore $D(z)$ in ogni rappresentazione matriciale destra irriducibile e ridotta per colonne $N(z)D(z)^{-1}$ di $W(z)$;*
- *il grado di $\det D$ in ogni rappresentazione matriciale destra irriducibile $N(z)D(z)^{-1}$ di $W(z)$;*
- *la somma dei gradi di riga del denominatore $Q(z)$ in ogni rappresentazione matriciale sinistra irriducibile e ridotta per righe $Q(z)^{-1}P(z)$ di $W(z)$;*
- *il grado di $\det Q$ in ogni rappresentazione matriciale sinistra irriducibile $Q(z)^{-1}P(z)$ di $W(z)$;*
- *la somma dei gradi dei denominatori $\psi_i(z)$ nella forma canonica di Smith McMillan di $W(z)$;*

La prova è lasciata come esercizio.

5.4 Retroazione dallo stato

5.4.1 Matrice ingresso-stato nei sistemi reazionati

Si consideri il sistema **raggiungibile** $\Sigma = (F, G, -, -)$ con G di rango m e con invarianti di controllo $k_1, k_2, \ldots, k_m$.
Se $N_{is}(z)D_{is}^{-1}(z)$ è una RMF destra (non necessariamente irriducibile) della matrice di trasferimento ingresso-stato $W_{is}(z) = (zI_n - F)^{-1}G$, per ogni scelta della matrice di retroazione $K \in \mathbb{F}^{m\times n}$ la matrice di trasferimento ingresso-stato $W_{is}^{(K)}(z) := (zI_n - F - GK)^{-1}G$ del sistema retroazionato $\Sigma(K) = (F + GK, G, -, -)$ ha una rappresentazione fratta destra data da

$$W_{is}^{(K)}(z) = N_{is}(z)(D_{is}(z) - KN_{is}(z))^{-1}.$$

Infatti, da

$$GD_{is}(z) = (zI_n - F)N_{is}(z),$$

sommando a entrambi i membri $-GKN_{is}(z)$, si ottiene

$$G(D_{is}(z) - KN_{is}(z)) = (zI_n - F - GK)N_{is}(z). \tag{5.26}$$

Poichè $(zI_n - F - GK)N_{is}(z)$ ha, come $N_{is}(z)$, rango m, la matrice $D_{is}(z) - KN_{is}(z)$ è non singolare, e dalla (5.26) segue

$$(zI_n - F - GK)^{-1}G = N_{is}(z)(D_{is}(z) - KN_{is}(z))^{-1}. \tag{5.27}$$

Di conseguenza, la retroazione dallo stato K modifica la matrice di trasferimento ingresso-stato inducendo un cambiamento della matrice denominatore $D_{is}(z)$ in $D_{is}(z) - KN_{is}(z)$, mentre **lascia inalterata la matrice numeratore** $N_{is}(z)$.

Nella proposizione seguente, raccogliamo alcune altre importanti proprietà delle RMF della matrice ingresso-stato $W_{is}^{(K)}(z)$ del sistema reazionato.

Proposizione 5.4.1 *Sia $\Sigma = (F, G, -, -)$ un sistema* **raggiungibile**, *di dimensione n, con G di rango m. Per ogni matrice di retroazione $K \in \mathbb{F}^{m \times n}$ valgono i seguenti fatti:*

i) la RMF sinistra $(zI_n - F - GK)^{-1}G$ di $W_{is}^{(K)}(z)$ è irriducibile;

ii) la RMF destra $N_{is}(z)(D_{is}(z) - KN_{is}(z))^{-1}$ di $W_{is}^{(K)}(z)$ è **irriducibile** *se e solo lo è $N_{is}(z)D_{is}(z)^{-1}$, e ciò accade se e solo se è* **prima a destra** *$N_{is}(z)$;*

iii) se $D_{is}(z)$ ha gradi di colonna $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, $D_{is}(z) - KN_{is}(z)$ ha i medesimi gradi di colonna e la medesima matrice conduttrice; quindi, se $D_{is}(z)$ è ridotta per colonne, tale rimane $D_{is}(z) - KN_{is}(z)$;

iv) se $N_{is}(z)D_{is}(z)^{-1}$ è **irriducibile** *e se $D_{is}(z)$* **ridotta per colonne**, *allora per ogni K la matrice $N_{is}(z)[D_{is}(z) - KN_{is}(z)]^{-1}$ è irriducibile e i gradi di colonna di $D_{is}(z) - KN_{is}(z)$ coincidono con gli invarianti di controllo $k_1, k_2, \dots, k_m$ di (F, G).*

iv bis) inoltre, se D_{hc} denota la matrice conduttrice di $D_{is}(z)$, al variare di K il denominatore $D_{is}(z) - KN_{is}(z)$

- *ha ancora D_{hc} come matrice conduttrice.*
- *posto*

$$D_{is}(z) - KN_{is}(z) = D_{hc}\mathrm{diag}\{z^{k_1}, z^{k_2}, \dots, z^{k_m}\} + X_{\mathrm{rem}}(z) \tag{5.28}$$

la matrice "resto" $X_{\mathrm{rem}}(z)$ descrive lo spazio di tutte le matrici polinomiali $m \times m$ la cui colonna i-esima ha grado inferiore a k_i, $i = 1, 2, \dots, m$.

Dimostrazione (i) Per il criterio PBH di raggiungibilità $[\, zI - F \quad G\,]$ è prima a sinistra. Poiché la primalità si conserva per trasformazioni elementari di riga e/o colonna, anche la matrice

$$[\, zI - F - GK \quad G\,] = [\, zI - F \quad G\,] \begin{bmatrix} I & 0 \\ -K & I \end{bmatrix}$$

è prima a sinistra e la coppia $(F + GK, G)$ risulta raggiungibile.

(ii) Dall'identità

$$\begin{bmatrix} D_{is}(z) - KN_{is}(z) \\ N_{is}(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & -K \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{is}(z) \\ N_{is}(z) \end{bmatrix}$$

si ha immediatamente che le due RMF destre sono entrambe irriducibili o entrambe riducibili.

Inoltre, per quanto visto nel primo paragrafo, nella rappresentazione irriducibile del legame ingresso-stato di un sistema raggiungibile la matrice numeratore $N_{is}(z)$ è prima a destra perché è equivalente alla matrice $S(z)$ di (5.2). D'altra parte, se $N_{is}(z)$ è prima a destra la matrice ingresso-stato è irriducibile.

(iii) Dal momento che la matrice ingresso-stato è strettamente propria, i gradi di colonna di $N_{is}(z)$ e di $KN_{is}(z)$ sono minori dei corrispondenti gradi di colonna in $D_{is}(z)$. Ma allora $D_{is}(z)$ e $D_{is}(z) - KN_{is}(z)$ hanno i medesimi gradi di colonna e le medesime matrici conduttrici.

(iv) Ricordiamo che, se $N_{is}(z)D_{is}(z)^{-1}$ è irriducibile e $D_{is}(z)$ è ridotta per colonne, i gradi di colonna di $D_{is}(z)$ sono gli invarianti di controllo $k_1, k_2, \dots k_m$. Essendo soddisfatte le ipotesi dei punti (ii) e (iii), $N_{is}(z)\Big[D_{is}(z) - KN_{is}(z)\Big]^{-1}$ è a sua volta irriducibile ed ha matrice denominatore ridotta per colonne, con gli stessi gradi di colonna di $D_{is}(z)$ e con la medesima matrice conduttrice.

Per quanto visto al punto 4 di par 5.1.1, non è restrittivo supporre $N_{is}(z)D_{is}(z)^{-1} = [TS(z)]D_c(z)^{-1}$ dove $S(z)$ ha gradi di colonna $k_1 - 1, k_2 - 1, \dots, k_m - 1$ e T è una matrice di cambiamento di base nello spazio di stato.

È evidente che, al variare di $\tilde{K}$ in $\mathbb{F}^{m\times n}$, la matrice $\tilde{K}S(z)$ descrive iniettivamente tutto lo spazio delle matrici polinomiali $m \times m$ con gradi di colonna non superiori a $k_1 - 1, k_2 - 1, \dots, k_m - 1$. Per l'invertibilità di T, lo stesso può dirsi di $KTS(z)$ al variare di K in $\mathbb{F}^{m\times n}$. ■

5.4.2 Matrice ingresso-uscita nei sistemi reazionati

Si consideri un sistema $\Sigma = (F, G, H, J)$ e si applichi ad esso una matrice di reazione dallo stato K.

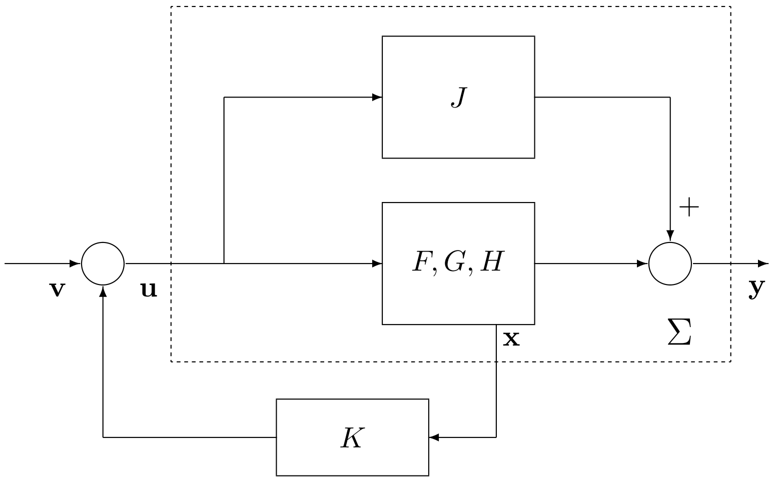

Fig. 5.1

Le equazioni del sistema reazionato sono

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t+1) &= F\mathbf{x}(t) + G(K\mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t)) \\ \mathbf{y}(t) &= H\mathbf{x}(t) + J(K\mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t)) \end{aligned} \tag{5.29}$$

e il sistema reazionato è descritto dalla quaterna di matrici $\Sigma(K) = (F + GK, G, H + JK, J)$. Se inoltre $N_{is}(z)D_{is}(z)^{-1}$ è una RMF destra della mappa ingresso-stato del sistema non reazionato, per ogni K la matrice di trasferimento ingresso uscita del sistema reazionato è data da

$$\begin{aligned} W^{(K)}(z) &= (H + JK)N_{is}(z)[D_{is}(z) - KN_{is}(z)]^{-1} + J \\ &= [JD_{is}(z) + HN_{is}(z)][D_{is}(z) - KN_{is}(z)]^{-1}, \end{aligned} \tag{5.30}$$

Lemma 5.4.2 *Si supponga che il sistema strettamente proprio $\Sigma = (F, G, H)$ di dimensione n sia raggiungibile e che*

$$N_{is}(z)D_{is}(z)^{-1} \tag{5.31}$$

sia una RMF destra irriducibile della sua mappa ingresso-stato $W_{is}(z)$. Allora la matrice di trasferimento ingresso-uscita

$$W(z) = HN_{is}(z)[D_{is}(z)]^{-1}, \tag{5.32}$$

è irriducibile se e solo se la coppia (F, H) è osservabile.

Dimostrazione In

$$W(z) = HN_{is}(z)[D_{is}(z)]^{-1} = H(zI - F)^{-1}G \tag{5.33}$$

le frazioni matriciali $(zI - F)^{-1}G$ e $N_{is}(z)[D_{is}(z)]^{-1}$ che esprimono il legame ingresso stato hanno il medesimo grado determinantale. Quindi le frazioni matriciali (una bilatera e una destra) in (5.33) sono entrambe irriducibili o entrambe riducibili. Ma l'irriducibilità della frazione bilatera equivale al fatto che Σ sia simultaneamente raggiungibile e osservabile. ■

Proposizione 5.4.3 [Osservabilità al variare della retroazione] *Supponiamo che il sistema $\Sigma = (F, G, H, J)$ sia raggiungibile, con G di rango m, e*

$$N_{is}(z)D_{is}(z)^{-1} \tag{5.34}$$

sia una RMF destra irriducibile della sua mappa ingresso-stato $W_{is}(z)$.

- *la RMF (5.30) della matrice di trasferimento ingresso-uscita del sistema reazionato è irriducibile se e solo se la coppia $(F + GK, H + JK)$ è osservabile;*

- *$(F+GK, H+JK)$ è osservabile per ogni valore di K se e solo se $[JD_{is}(z)+HN_{is}(z)]$ è prima a destra.*

Dimostrazione L'irriducibilità di $[JD_{is}(z) + HN_{is}(z)][D_{is}(z) - KN_{is}(z)]^{-1}$ equivale a quella di $[(H + JK)N_{is}(z)][D_{is}(z) - KN_{is}(z)]^{-1}$, essendo

$$\begin{bmatrix} I & -J \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} JD_{is}(z) + HN_{is}(z) \\ D_{is}(z) - KN_{is}(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (H + JK)N_{is}(z) \\ D_{is}(z) - KN_{is}(z) \end{bmatrix}$$

Poichè

$$N_{is}(z)[D_{is}(z) - KN_{is}(z)]^{-1}$$

è una RMF irriducibile della mappa ingresso-stato del sistema raggiungibile $\tilde{\Sigma} = (F + GK, G, H + JK)$, basta applicare il lemma precedente per provare il primo punto.

Per il secondo punto, è chiaro che, se $JD_{is}(z) + HN_{is}(z)$ è prima a destra, per ogni K la RMF (5.30) è irriducibile e quindi $(F + GK, H + JK)$ è osservabile. Viceversa, supponiamo che la matrice $JD_{is}(z)+HN_{is}(z) \in \mathbb{F}[z]^{p\times m}$ non sia prima a destra, abbia rango $\nu \leq m$ e $D_{is}(z)$ sia ridotta per colonne, quindi con gradi di colonna coincidenti[3] con gli indici di Kronecker $k_1, k_2, \dots, k_m$. Ricorrendo alla forma di Hermite di $JD_{is}(z) + HN_{is}(z)$, possiamo porre

$$JD_{is}(z) + HN_{is}(z) = [\, U_1(z) \quad U_2(z) \,] \begin{bmatrix} \tilde{\Delta}(z) \\ 0 \end{bmatrix} = U_1(z)\tilde{\Delta}(z) \tag{5.35}$$

con $[\, U_1(z) \quad U_2(z) \,]$ unimodulare, $U_1(z) \in \mathbb{F}[z]^{p\times\nu}$ e $\tilde{\Delta}(z) \in \mathbb{F}[z]^{\nu\times m}$ di rango ν. Non è restrittivo supporre che $U_1(z)$ sia ridotta per colonne; allora il grado della colonna j-esima di $\tilde{\Delta}(z)$ non eccede il grado della colonna j-esima del primo membro di (5.35), che a sua volta non eccede k_i.
Completiamo $\tilde{\Delta}(z)$ a una matrice $m \times m$ polinomiale di rango pieno, non unimodulare e con gradi di colonna non eccedenti gli indici k_i:

$$\Delta(z) = \begin{bmatrix} \tilde{\Delta}(z) \\ P(z) \end{bmatrix}$$

Vale allora la fattorizzazione

$$JD_{is}(z) + HN_{is}(z) = [\, U_1(z) \quad 0 \,] \begin{bmatrix} \tilde{\Delta}(z) \\ P(z) \end{bmatrix} = L(z)\Delta(z) \tag{5.36}$$

e ricorrendo all'algoritmo di divisione di matrici (cfr par.4.5) otteniamo

$$D_{is}(z) = Q(z)\Delta(z) + R(z), \quad \deg \mathrm{col}_i R < \deg \mathrm{col}_i \Delta \leq \deg \mathrm{col}_i D_{is}, \; i = 1, 2, \dots m. \tag{5.37}$$

D'altra parte, per la Proposizione 5.3.1, possiamo scegliere una matrice di retroazione K in modo da avere $KN_{is}(z) = R(z)$, e in corrispondenza risulta

$$D_{is}(z) - KN_{is}(z) = D_{is}(z) - R(z) = Q(z)\Delta(z). \tag{5.38}$$

Le (5.36) e (5.38) implicano che la RMF $[JD_{is}(z) + HN_{is}(z)][D_{is}(z) - KN_{is}(z)]^{-1}$ della matrice di trasferimento $W^{(K)}(z)$ non sia irriducibile e quindi che la coppia $(F + GK, H + JK)$ non sia osservabile. ■

- Esercizio 5.4.1 Sia $\Sigma = (F, G, -, -)$ raggiungibile, di dimensione n, con G di rango m e con indici di Kronecker $k_1, k_2, \dots, k_m$. Si verifichi che, per ogni matrice di retroazione $K \in \mathbb{F}^{m\times n}$,

  (i) la matrice $[\, I_n - d(F + GK) \quad Gd \,]$ è prima a sinistra e ridotta per righe, con gradi di riga tutti unitari.

  (ii) se $W_{is}(d^{-1}) = P_{is}(d)Q_{is}(d)^{-1}$ è una RMF irriducibile con numeratore $P_{is}(d)$ ridotto per colonne, nel sistema reazionato $W_{is}^{(K)}(d^{-1}) = P_{is}(d)[Q_{is}(d) - KP_{is}(d)]^{-1}$ è irriducibile e, ovviamente, $P_{is}(d)$ è ancora ridotta per colonne.

[3] a tale situazione si può sempre giungere postmoltiplicando $N_{is}(z)$ e $D_{is}(z)$ per un'opportuna matrice unimodulare

(iii) se $W_{is}(d^{-1}) = P_{is}(d)Q_{is}(d)^{-1}$ è ottenuta dalla forma canonica di controllo multivariabile e quindi $P_{is}(d)$ ha la struttura (5.11) allora per ogni K la matrice denominatore $Q_{is}(d) - KP_{is}(d)$ coincide per $d = 0$ con $Q_{is}(0)$ e, al variare di K, la matrice $Q_{is}(d) - KP_{is}(d) - Q_{is}(0)$ descrive lo spazio delle matrici polinomiali $m \times m$ nelle quali la colonna i-esima è nulla per $d = 0$ e ha grado non superiore a k_i, $i = 1, 2, \ldots, m$.

5.5 << * Il teorema di Rosenbrock

Come si è visto nel paragrafo precedente, la retroazione dallo stato consente di modificare ampiamente la matrice denominatore $D_{is}(z)$ di una RMF destra della mappa ingresso-stato. Infatti, se il sistema è raggiungibile - con G a rango di colonna pieno - e se la matrice denominatore è ridotta per colonne, la reazione ne lascia invarianti soltanto i coefficienti dei termini di grado massimo per colonna e permette di modificare in modo arbitrario tutti i coefficienti dei termini di grado inferiore.
I polinomi invarianti non unitari della matrice $D_{is}(z)-KN_{is}(z)$ coincidono con quelli non unitari di $zI - (F + GK)$, che a loro volta coincidono con i polinomi invarianti $\psi_i(z)$ (cfr Esercizio 3.1.9) di $F + GK$. Poiché questi ultimi forniscono un insieme completo di invarianti per la relazione di similarità in $\mathbb{F}^{n\times n}$, possiamo determinare le classi di similarità cui può appartenere $F + GK$ individuando quali siano i polinomi invarianti (o equivalentemente le forme di Smith) di $D_{is}(z) - KN_{is}(z)$ al variare di K. Per quanto osservato sopra circa l'ampia variabilità della matrice denominatore, è plausibile che i vincoli sui polinomi invarianti siano piuttosto deboli.
Il teorema di Rosenbrock individua completamente tali vincoli. La sua dimostrazione dipende da due lemmi, che stanno alla base anche della procedura di sintesi dell'elemento di retroazione.

Lemma 5.5.1 *Sia $C(z) \in \mathbb{F}[z]^{m\times m}$ una matrice ridotta per colonne con gradi di colonna $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ e matrice dei termini di grado massimo per colonna $C_{hc} = I_m$. Se esistono due indici p e q per i quali si ha $\lambda_p < \lambda_q$, allora esistono matrici unimodulari $U(z)$ e $V(z) \in \mathbb{F}[z]^{m\times m}$ tali che*

$$\bar{C}(z) := U(z)C(z)V(z)$$

sia ancora ridotta per colonne, con $\bar{C}_{hc} = I_m$ e con gradi di colonna

$$\begin{array}{rcll} \bar{\lambda}_i &=& \lambda_i, & i \neq p, \quad i \neq q, \\ \bar{\lambda}_p &=& \lambda_p + 1, & \\ \bar{\lambda}_q &=& \lambda_q - 1. & \end{array} \tag{5.39}$$

DIMOSTRAZIONE La prova è di tipo costruttivo e fornisce esplicitamente le matrici unimodulari che permettono di ottenere una $\bar{C}(z)$ soddisfacente le (5.39).

• Sia $C'(z)$ la matrice ottenuta da $C(z)$ sommando alla riga q-esima la riga p-esima moltiplicata per $z + \alpha$, dove α è una costante tale che $c'_{qq}(z) \neq 0$. Non è restrittivo scegliere per α uno dei valori 0 e 1.
Detti $\lambda'_1, \lambda'_2, \ldots, \lambda'_m$ i gradi di colonna di $C'(z)$, per ogni j diverso da p e q si ha $\lambda'_j = \lambda_j$. Infatti, nella colonna j-esima l'unico elemento modificato è quello in posizione (q, j), originariamente di grado minore di λ_j, cui si aggiunge l'elemento di posizione (p, j), pure di grado minore di λ_j, moltiplicato per $z + \alpha$. È chiaro che il grado di $c'_{qj}(z)$ è non superiore a quello di $c'_{jj}(z)$, eguale a sua volta a quello di $c_{jj}(z)$.
Nella colonna p-esima gli elementi di posizione (i, p), per ogni $i \neq q$, rimangono inalterati, mentre quello in posizione (q, p) diventa un polinomio monico di grado $\lambda'_p := \lambda_p + 1$.

Infine, nella colonna q-esima restano inalterati gli elementi in posizione (i,q), $i \neq q$, mentre quello in posizione (q,q) si modifica in un polinomio $c'_{qq}(z)$ di grado non superiore a λ_q. Pertanto $\lambda'_q \leq \lambda_q$.

• Indichiamo con βz^ν il monomio di grado massimo in $c'_{qq}(z)$. Se $\nu < \lambda_q$ si passa al punto successivo ponendo $C''(z) := C'(z)$. Se $\nu = \lambda_q$, invece, si aggiunge alla q-esima colonna di $C'(z)$ la p-esima moltiplicata per $-\beta z^{\lambda_q - \lambda'_p}$, ottenendo una colonna i cui elementi hanno tutti grado minore di λ_q.

• La matrice $C''(z)$ ha gradi di colonna $\lambda''_1, \lambda''_2, \ldots, \lambda''_m$ soddisfacenti

$$\begin{array}{lcll} \lambda''_i & = & \lambda_i, & i \neq p, \qquad i \neq q, \\ \lambda''_p & = & \lambda_p + 1, & \\ \lambda''_q & \leq & \lambda_q - 1. & \end{array} \tag{5.40}$$

Da (5.40) e dal fatto che $C(z)$ è ridotta per colonne segue

$$\deg \det C(z) = \sum_i \lambda_i \geq \sum_i \lambda''_i \geq \deg \det C''(z). \tag{5.41}$$

D'altra parte si ha $\det C(z) = \det C''(z)$, e da (5.41) segue allora

$$\sum_i \lambda_i = \sum_i \lambda''_i$$

e quindi $\lambda''_q = \lambda_q - 1$. Pertanto $C''(z)$ è ridotta per colonne e soddisfa le (5.39).
Per concludere la prova è sufficiente porre $\bar{C}(z) := (C''_{hc})^{-1} C''(z)$. ■

Lemma 5.5.2 *Sia*

$$C(z) := \text{diag } \{c_1(z), c_2(z), \ldots, c_r(z), 1, \ldots, 1\} \quad \in \mathbb{F}[z]^{m \times m}$$

una matrice diagonale, con $c_i(z)$ polinomi monici di grado λ_i, soddisfacenti le condizioni $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_r$. Per ogni m-upla di interi non negativi $(k_1, k_2, \ldots, k_m)$ soddisfacenti le condizioni

i) $k_1 \geq k_2 \geq \ldots \geq k_m$;

ii) $\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \geq \sum_{i=1}^{\ell} k_i, \ell = 1, 2, \ldots, m-1$;

iii) $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = \sum_{i=1}^{m} k_i$,

esistono matrici unimodulari $U(z)$ e $V(z) \in \mathbb{F}[z]^{m \times m}$ tali che

$$\bar{C}(z) := U(z) C(z) V(z)$$

è una matrice ridotta per colonne con gradi di colonna $\bar{\lambda}_i$ coincidenti con k_i, $i = 1, 2, \ldots, m$ e matrice $\bar{C}_{hc}$ coincidente con la matrice identità.

Dimostrazione Se i gradi di colonna λ_i di $C(z)$ coincidono ordinatamente con gli indici k_i, è sufficiente porre $\bar{C}(z) = C(z)$. Altrimenti indichiamo con q il più piccolo indice di colonna per il quale si ha $\lambda_q \neq k_q$. La condizione $\sum_{i=1}^{q} \lambda_i \geq \sum_{i=1}^{q} k_i$ implica $\lambda_q > k_q$. D'altra parte, per la condizione iii) esiste un indice $p > q$ in corrispondenza al quale $k_p > \lambda_p$. Abbiamo pertanto

$$\lambda_q > k_q \geq k_p > \lambda_p,$$

e possiamo, quindi, applicare alla matrice $C(z)$ l'algoritmo del Lemma 5.6.1, ottenendo una matrice $C'(z)$ ridotta per colonne, con $C'_{hc} = I_m$ e con gradi di colonna λ'_i eguali a λ_i per $i \neq p, p$ e soddisfacenti

$$\lambda'_q = \lambda_q - 1 \geq k_q \geq k_p \geq \lambda_p + 1 = \lambda'_p,$$

Iterando il procedimento si perviene ad una matrice $C''(z)$ le cui prime q colonne hanno i gradi voluti $k_1, k_2, \dots, k_q$. Se i gradi delle colonne successive alla q-esima in $C''(z)$ non coincidono con i k_i desiderati, si applica nuovamente l'algoritmo a $C''(z)$ fino ad ottenere la matrice $\bar{C}(z)$. ■

Proposizione 5.5.3 [Teorema di Rosenbrock] *Sia $\Sigma = (F, G, H)$ un sistema raggiungibile di dimensione n, e siano*

$$k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_m$$

i suoi invarianti di controllo. Per ogni matrice di retroazione K, il numero r dei polinomi invarianti non unitari di $zI_n - F - GK$ non eccede m. Tali polinomi, $c_1(z), c_2(z), \dots, c_r(z)$ ordinati secondo i gradi decrescenti, soddisfano le condizioni

i) $c_{i+1}(z) \mid c_i(z)$, $i = 1, 2, \dots, r-1$;

ii) $\sum_{i=1}^{\ell} \deg c_i \geq \sum_{i=1}^{\ell} k_i$, $\ell = 1, 2, \dots, r$;

iii) $\sum_{i=1}^{r} \deg c_i = n$.

Viceversa, se $c_1(z), c_2(z), \dots, c_r(z)$, $r \leq m$, sono polinomi monici soddisfacenti le condizioni i) ÷ iii), esiste una matrice di reazione dallo stato, K , tale che i polinomi invarianti non unitari di $(zI_n - F - GK)$ coincidono con i $c_i(z)$, $i = 1, 2, \dots, r$.

Dimostrazione Sia $N_{is}(z)D_{is}^{-1}(z)$ una RMF destra irriducibile, con denominatore ridotto per colonne, della matrice di trasferimento ingresso-stato $(zI_n - F)^{-1}G$.
Come si è visto nel paragrafo precedente, per ogni K la matrice ingresso-stato del sistema retroazionato è esprimibile in una delle due forme irriducibili

$$(zI_n - F - GK)^{-1}G = N_{is}(z)(D_{is}(z) - KN_{is}(z))^{-1}.$$

Pertanto (si veda l' Esercizio 4.3.5) le matrici denominatore $(zI_n - F - GK)$ e $D_{is}(z) - KN_{is}(z)$ hanno i medesimi polinomi invarianti non unitari e il loro numero non supera m, dato che m è la dimensione di una delle due matrici denominatore.
I polinomi invarianti $c_1(z), c_2(z), \dots, c_r(z)$, ordinati secondo i gradi decrescenti, soddisfano ovviamente i) e iii), e coincidono ordinatamente con i polinomi $\gamma_m(z)$, $\gamma_{m-1}(z), \dots, \gamma_{m-r+1}(z)$ delle forma di Smith di $D_{is}(z) - KN_{is}(z)$. Pertanto, con riferimento ai minori di $D_{is}(z) - KN_{is}(z)$, si ha

$$\begin{aligned} c_1(z) &= \frac{\text{MCD dei minori di ordine } m}{\text{MCD dei minori di ordine } m-1} \\ c_1(z)c_2(z) &= \frac{\text{MCD dei minori di ordine } m}{\text{MCD dei minori di ordine } m-2} \\ \cdots & \quad \cdots \\ c_1(z)c_2(z)\cdots\, c_r(z) &= \frac{\text{MCD dei minori di ordine } m}{\text{MCD dei minori di ordine } m-r}. \end{aligned}$$

Poichè i gradi di colonna di $D_{is}(z) - KN_{is}(z)$ per ogni K coincidono con gli invarianti di controllo $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_m$, la condizione ii) segue da

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\ell} \deg c_i &= \deg(c_1 c_2 \cdots c_\ell) \\ &= \deg\Big(\text{MCD minori di ordine } m\Big) - \deg\Big(\text{MCD minori di ordine } m-\ell\Big) \\ &\geq n - (k_{\ell+1} + k_{\ell+2} + \dots + k_m) = \sum_{i=1}^{\ell} k_i \end{aligned}$$

Viceversa, si ponga

$$C(z) := \text{diag}\{c_1(z), c_2(z), \dots, c_r(z), 1, \dots, 1\}_{m\times m}.$$

Poichè sono verificate le ipotesi del Lemma 5.3.3, esistono matrici unimodulari $U(z)$ e $V(z)$ tali che

$$\bar{C}(z) = U(z)C(z)V(z)$$

è ridotta per colonne con gradi di colonna $\bar{\lambda}_i$ coincidenti, per l'ipotesi ii) della Proposizione, con gli invarianti di controllo k_i, e matrice dei coefficienti dei monomi di grado massimo per colonna $\bar{C}_{hc} = I_m$. Per la coprimalità a destra di $D_{is}(z)$ e $N_{is}(z)$, esistono matrici polinomiali $X(z)$ e $Y(z)$ per le quali si ha

$$X(z)D_{is}(z) + Y(z)N_{is}(z) = \bar{C}(z). \tag{5.42}$$

Dividendo $Y(z)$ per $(zI_n - F)$ si ottiene (cfr. Proposizione 4.5.3)

$$Y(z) = Q(z)(zI_n - F) + \bar{Y},$$

dove $\bar{Y}$ è una matrice costante. Allora la coppia $(\bar{X}(z), \bar{Y})$, con $\bar{X}(z) = X(z)+Q(z)G$, è soluzione della (5.42), come si verifica direttamente per sostituzione o come segue dalla struttura generale delle soluzioni delle equazioni diofantee data in Proposizione 3.6.2. Vogliamo dimostrare che dalla

$$\bar{X}(z)D_{is}(z) + \bar{Y}N_{is}(z) = \bar{C}(z). \tag{5.43}$$

segue che anche $\bar{X}(z)$ è una matrice costante.
Infatti, il grado della colonna i-esima di $\bar{C}(z)$ è k_i, mentre il grado della colonna i-esima di $N_{is}(z)$, e quindi di $\bar{Y}N_{is}(z)$, è minore di k_i, e questo per $i = 1, 2, \dots, m$. Pertanto i gradi di colonna di $\bar{X}(z)D_{is}(z)$ sono $k_1, k_2, \dots, k_m$, coincidenti con quelli di $D_{is}(z)$. Dal momento che $D_{is}(z)$ è ridotta per colonne, ne consegue (cfr. Esercizio 4.6.1) che tutte le righe della matrice $\bar{X}(z)$ sono costanti e porremo, dunque, $\bar{X}(z) := \bar{X}$.
Eguagliando le matrici dei coefficienti dei monomi di grado massimo per colonna in entrambi i membri della (5.43), si ottiene

$$\bar{X}(D_{is})_{hc} = I_m,$$

che garantisce che l'invertibilità di $\bar{X}$. Ponendo infine

$$K = -\bar{X}^{-1}\bar{Y} = -(D_{is})_{hc}\bar{Y},$$

si ricava

$$\begin{aligned} D_{is}(z) - KN_{is}(z) &= D_{is}(z) + \bar{X}^{-1}\bar{Y}N_{is}(z) \\ &= \bar{X}^{-1}\Big(\bar{X}D_{is}(z) + \bar{Y}N_{is}(z)\Big) = \bar{X}^{-1}\bar{C}(z). \end{aligned}$$

I polinomi invarianti non unitari $c_1(z), c_2(z), \dots, c_r(z)$ di $\bar{C}(z)$ coincidono allora con quelli di $D_{is}(z) - KN_{is}(z)$ e quindi con quelli di $zI_n - F - GK$, dal momento che $D_{is}(z) - KN_{is}(z)$ e $zI_n - F - GK$ sono matrici denominatore in due RMF irriducibili della stessa matrice razionale.
■

Si noti che, dati un sistema $\Sigma = (F, G, H)$ raggiungibile e r polinomi $c_1(z)$, $c_2(z)$, $\dots$, $c_r(z)$, soddisfacenti le condizioni del teorema di Rosenbrock, disponiamo di un algoritmo che consente di costruire esplicitamente una matrice K di reazione tale che $c_1(z), c_2(z), \dots, c_r(z)$ siano i polinomi invarianti non unitari della matrice $zI_n - F - GK$. Infatti,

- a partire da (F, G) si costruisce una frazione matriciale irriducibile destra con denominatore ridotto per colonne

$$N_{is}(z)D_{is}^{-1}(z) = (zI_n - F)^{-1}G.$$

Per far ciò, è sufficiente ricorrere ai metodi descritti nei paragrafi 3.3 e 3.5.

- dalla matrice $C(z) = \operatorname{diag}\{c_1(z), c_2(z), \ldots, c_r(z), 1, \ldots, 1\}_{m\times m}$, ricorrendo all'algoritmo del Lemma 5.3.3, si costruisce la matrice $\bar{C}(z)$.
- si trova una soluzione $(X(z), Y(z))$ dell'equazione diofantea (5.42).
- applicando l'algoritmo di paragrafo 4.5, si divide la matrice $Y(z)$ per la matrice $zI_n - F$, ottenendo $Y(z) = Q(z)(zI_n - F) + \bar{Y}$, e si pone $\bar{X} = X(z) + Q(z)G$. La matrice di reazione cercata è allora $K := -\bar{X}^{-1}\bar{Y}$. $\quad * >>$

Riferimenti bibliografici

Per i teoremi di struttura si rinvia a

1. W.A.Wolovich "Linear Multivariable Systems", Springer-Verlag, New York, 1974

2. T.Kailath "Linear Systems", Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1980

e per gli algoritmi di realizzazione, oltre ai due riferimenti sopra citati, a

3. F.M.Callier, C.A.Desoer "Multivariable Feedback Systems", Springer-Verlag, New York, 1982

4. V.Kučera "Analysis and Design of Discrete Linear Control Systems", Academia, Praga, 1991.

Per quanto riguarda il teorema di Rosenbrock, oltre alla monografia di Kučera si può consultare

5. H.H.Rosenbrock "State-space and Multivariable Theory", Wiley, New York, 1970