

Capitolo 6

Modelli dinamici per spazi di traiettorie

[Aggiornamento 31/5/2010]

L'approccio all'analisi e al controllo dei sistemi dinamici adottato tradizionalmente in ambito ingegneristico è quello a “scatola nera”. In esso si assume che il sistema, sollecitato da un segnale di *ingresso*, risponda con un segnale di *uscita*, e si specifica il legame ingresso/uscita mediante una mappa, senza far riferimento al meccanismo fisico responsabile della sua generazione.

Più recentemente, il problema del controllo è stato affrontato mediante “modelli di stato”. Essi comprendono anche variabili *interne (lo stato)*, che ad ogni istante t dipendono dall'evoluzione del segnale di ingresso in $(-\infty, t)$ e permettono la valutazione dell'uscita in $[t, +\infty)$, una volta noto l'ingresso nel medesimo intervallo. In tal senso lo stato è dotato della proprietà di *separazione*, dato che riassume in sé le informazioni sulla dinamica passata indispensabili per determinare l'evoluzione futura.

In entrambi i casi l'interazione del sistema con l'ambiente in cui è immerso si realizza attraverso due classi di variabili: quelle di ingresso, o di controllo, che vengono viste come “cause” e possono variare in modo sostanzialmente libero, e quelle di uscita, o misurate, che sono funzione delle precedenti e ne descrivono gli “effetti”.

In molte situazioni concrete (si pensi, ad esempio, a sistemi economici o biologici in cui le grandezze in gioco sono interconnesse da numerosi anelli di retroazione), la distinzione tra variabili di ingresso e di uscita non è affatto evidente, se non addirittura artificiosa, e sono note soltanto le relazioni che vincolano l'evoluzione temporale delle traiettorie ammissibili. Risulta opportuno, allora, studiare l'inte-

razione del sistema con l'ambiente esterno concentrandosi sull'insieme di variabili che la determinano e sui vincoli che le variabili possono congiuntamente presentare nella loro evoluzione.

Questo punto di vista è illustrato schematicamente in figura 6.1, dove le q variabili descrittive, $w_1(\cdot), w_2(\cdot), \dots, w_q(\cdot)$, esprimono l'interazione tra il sistema Σ e l'ambiente esterno. Le peculiarità di entrambi e le modalità secondo le quali ciascuno influenza l'altro si riflettono nel fatto che per la funzione vettoriale del tempo $\mathbf{w}(\cdot) := [w_1(\cdot) \ w_2(\cdot) \ \dots \ w_q(\cdot)]^T$ sono ammissibili solo certi andamenti. Ogni funzione $\mathbf{w}(\cdot)$ compatibile con i vincoli sarà detta una "traiettoria ammissibile" o, per brevità, una "traiettoria" del sistema.

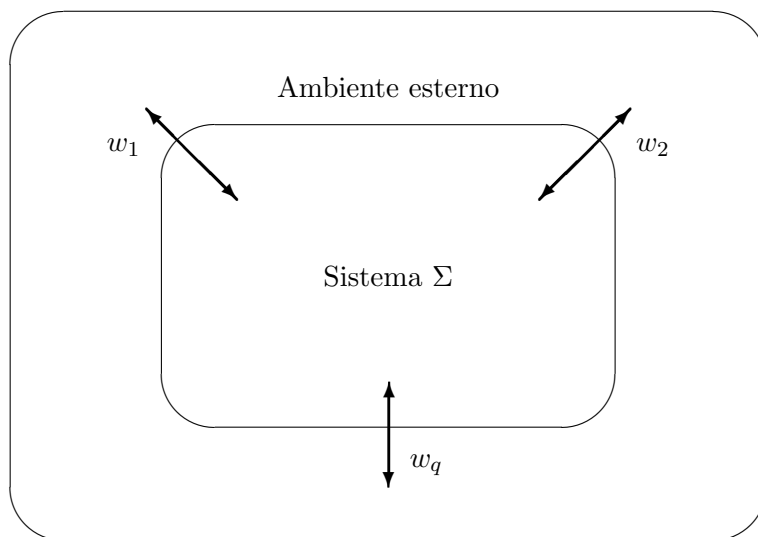


Fig. 6.1

Nell'ottica in cui ci siamo posti, la dinamica del sistema Σ risulta completamente determinata una volta noto l'insieme \mathcal{B} delle traiettorie ammissibili - il cosiddetto *behavior* di Σ - o, più concretamente, una volta assegnati criteri per stabilire in modo univoco se un segnale $\mathbf{v}(\cdot)$ è un elemento di \mathcal{B} . Come vedremo, sotto le ipotesi di linearità e invarianza temporale, è spesso possibile descrivere l'insieme delle traiettorie di un sistema a tempo discreto¹ come nucleo o come immagine di opportune matrici polinomiali, ed esprimere in tal modo le "leggi del sistema" attraverso un numero finito di equazioni alle differenze.

¹Risultati analoghi possono essere sviluppati per sistemi a tempo continuo, tuttavia essi esulano dagli obiettivi di questa dispensa.

I modelli ingresso/uscita e quelli di stato sono riconducibili a modelli di tipo behavior, assumendo

$$\mathbf{w} := \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix}$$

come vettore delle variabili descrittive; in tal senso questo nuovo approccio alla modellizzazione dei sistemi dinamici è più generale dei due precedenti. Nel corso dell'esposizione si vedrà, viceversa, sotto quali ipotesi un modello di tipo behavior possa esser rappresentato mediante un modello ingresso/uscita o di stato.

6.1 Behavior lineari e tempo-invarianti

Nel contesto della teoria dei behavior con la parola “sistema” intendiamo una terna

$$\Sigma = (T, W, \mathcal{B}),$$

dove

- T è l'*insieme dei tempi*, ovvero l'insieme degli istanti significativi ai fini dell'analisi della dinamica del sistema;
- W è l'*alfabeto dei segnali*, cioè l'insieme su cui assumono valori le variabili (vettoriali) utilizzate per rappresentare l'interazione sistema-ambiente esterno;
- \mathcal{B} è il *behavior*, ovvero il sottoinsieme di W^T (l'*universo* delle funzioni definite su T e a valori in W) costituito dai segnali compatibili con le leggi che regolano il sistema (le **traiettorie**²). In altre parole, gli elementi di \mathcal{B} , le traiettorie, sono tutti i segnali che il sistema può generare, in accordo con la sua struttura interna e con i vincoli imposti dall'ambiente esterno. Nella maggior parte delle applicazioni, \mathcal{B} è specificato da una famiglia di equazioni (differenziali e/o integrali nel caso continuo, alle differenze nel caso discreto) che vengono chiamate *equazioni del behavior*.

Nel seguito assumeremo $T = \mathbb{Z}$ e $W = \mathbb{F}^q$, dove \mathbb{F} è un campo arbitrario e q rappresenta il numero delle *componenti*, e quindi delle variabili descrittive del behavior. Sotto tali ipotesi W^T coincide con $(\mathbb{F}^q)^{\mathbb{Z}}$, l'insieme delle sequenze bilatere a valori in \mathbb{F}^q , e può essere dotato della struttura di spazio vettoriale su \mathbb{F} , definendo le operazioni di addizione e moltiplicazione per uno scalare come

²si noti l'uso del termine “traiettoria”, diverso da quello usuale nella Teoria dei Sistemi. Nella T.d.S. “movimenti”, “evoluzioni di stato”, “funzioni di ingresso” sono funzioni del tempo, mentre le “traiettorie” sono l'immagine nello spazio di stato X dei movimenti, (quindi sottoinsiemi di X e non funzioni del tempo a valori in X)

segue

$$\begin{aligned}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)(t) &:= \mathbf{v}_1(t) + \mathbf{v}_2(t), \\ (\alpha \mathbf{v})(t) &:= \alpha \mathbf{v}(t),\end{aligned}$$

per ogni $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ e \mathbf{v} in W^T , α in \mathbb{F} e t in \mathbb{Z} . In termini intuitivi, per le sequenze bilatere a campioni in \mathbb{F}^q la somma e il prodotto per uno scalare vengono eseguite “campione per campione”.

In alternativa, gli elementi di $(\mathbb{F}^q)^\mathbb{Z}$ possono essere rappresentati mediante serie formali di potenze, associando alla generica successione $\mathbf{v} = \{\mathbf{v}(t)\}_{t \in \mathbb{Z}}$ la *serie formale bilatera*

$$\hat{\mathbf{v}}(z, z^{-1}) := \sum_{t \in \mathbb{Z}} \mathbf{v}(t) z^{-t}. \quad (6.1)$$

Per lo spazio delle serie bilatere a coefficienti in \mathbb{F}^q , indicato nel seguito con il simbolo \mathcal{F}_∞^q , le operazioni di addizione e moltiplicazione per uno scalare si definiscono come per le serie unilateri. $(\mathbb{F}^q)^\mathbb{Z}$ e \mathcal{F}_∞^q sono, allora, spazi vettoriali isomorfi, dal momento che

$$(\widehat{\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2})(z, z^{-1}) = \hat{\mathbf{v}}_1(z, z^{-1}) + \hat{\mathbf{v}}_2(z, z^{-1}) \quad \widehat{\alpha \mathbf{v}}(z, z^{-1}) = \alpha \hat{\mathbf{v}}(z, z^{-1}).$$

In particolare, alle sequenze a supporto compatto a sinistra o a destra e alle sequenze finite corrispondono isomorficamente le serie di Laurent di $\mathbb{F}^q((z^{-1}))$ o $\mathbb{F}^q((z))$ e i polinomi di Laurent di $\mathbb{F}^q[z, z^{-1}]$.

Gli operatori di *traslazione all'indietro* e *in avanti* σ e σ^{-1} associano alla generica sequenza \mathbf{v} in $(\mathbb{F}^q)^\mathbb{Z}$ rispettivamente la sequenza $\sigma \mathbf{v}$, data da

$$(\sigma \mathbf{v})(t) := \mathbf{v}(t + 1), \quad \forall t \in \mathbb{Z}, \quad (6.2)$$

e la sequenza $\sigma^{-1} \mathbf{v}$, data da

$$(\sigma^{-1} \mathbf{v})(t) := \mathbf{v}(t - 1), \quad \forall t \in \mathbb{Z}. \quad (6.3)$$

L'operatore σ^Δ , con Δ un intero arbitrario, determina allora una traslazione di $|\Delta|$ passi all'indietro o in avanti a seconda che Δ sia positivo o negativo. Nello spazio delle serie formali \mathcal{F}_∞^q tale traslazione corrisponde alla moltiplicazione per z^Δ della serie $\hat{\mathbf{v}}(z, z^{-1})$ associata alla sequenza \mathbf{v} .

Più in generale, comunque scelti $g_\ell, g_{\ell+1}, \dots, g_L$ in \mathbb{F} , si definisce l'operatore $g(\sigma, \sigma^{-1}) = \sum_{i=\ell}^L g_i \sigma^i$ nel seguente modo

$$g(\sigma, \sigma^{-1}) : (\mathbb{F}^q)^\mathbb{Z} \rightarrow (\mathbb{F}^q)^\mathbb{Z} : \mathbf{v} \mapsto g(\sigma, \sigma^{-1}) \mathbf{v} := \sum_{i=\ell}^L g_i (\sigma^i \mathbf{v}). \quad (6.4)$$

Nella rappresentazione mediante serie formali, ad esso corrisponde la moltiplicazione di $\hat{\mathbf{v}}(z, z^{-1})$ per il polinomio di Laurent $g(z, z^{-1}) = \sum_{i=-\ell}^L g_i z^i$, e pertanto \mathcal{F}_∞^q può essere visto come un modulo sull'anello dei polinomi di Laurent.

Definizione 6.1.1 [LINEARITÀ E INVARIANZA PER TRASLAZIONI] Un behavior $\mathcal{B} \subseteq (\mathbb{F}^q)^\mathbb{Z}$ è

- *lineare* se è un sottospazio vettoriale di $(\mathbb{F}^q)^\mathbb{Z}$, ovvero se è chiuso rispetto alle operazioni di somma e prodotto per uno scalare di \mathbb{F} ;
- *tempo invariante* (o invariante per traslazioni) se è chiuso rispetto agli operatori σ e σ^{-1} , ovvero se per ogni $\mathbf{w} \in \mathcal{B}$ sia $\sigma\mathbf{w}$ che $\sigma^{-1}\mathbf{w}$ appartengono a \mathcal{B} .

Nella rappresentazione con serie formali, i behavior lineari e tempo invarianti possono essere caratterizzati come i sottoinsiemi di \mathcal{F}_∞^q chiusi rispetto all'operazione di addizione e alla moltiplicazione per elementi di $\mathbb{F}[z, z^{-1}]$. In termini algebrici ciò significa che essi sono tutti e soli gli $\mathbb{F}[z, z^{-1}]$ -sottomoduli di \mathcal{F}_∞^q .

Esempio 6.1.1 I seguenti sistemi a tempo discreto $\Sigma = (\mathbb{Z}, W, \mathcal{B})$ hanno un behavior lineare e tempo invariante:

(i) $W = \mathbb{F}$, \mathbb{F} un campo arbitrario, \mathcal{B} l'insieme dei segnali (scalari) a supporto compatto, o dei segnali a supporto compatto a sinistra, o dei segnali a supporto compatto a destra. A tali behavior corrispondono, nella notazione serie, rispettivamente $\mathbb{F}[z, z^{-1}]$, $\mathbb{F}((z^{-1}))$ e $\mathbb{F}((z))$.

(ii) $W = \mathbb{F}^q$, \mathcal{B} l'insieme dei segnali periodici di periodo p .

(iii) $W = GF(2)$, il campo a due elementi ³ $\{0, 1\}$, \mathcal{B} l'insieme delle sequenze scalari a supporto compatto, contenenti un numero pari di elementi unitari.

(iv) $W = \mathbb{R}$, \mathcal{B} l'insieme $\ell^2(\mathbb{R})$ delle sequenze bilatere $\{w(t)\}_{t \in \mathbb{Z}}$ a quadrato sommabile, i.e. $\sum_t w(t)^2 < \infty$.

Nei casi seguenti, invece, vengono a mancare la linearità o la tempo invarianza:

(v) $W = \mathbb{R}^q$, \mathcal{B} l'insieme $(\mathbb{R}_+^q)^\mathbb{Z}$ delle sequenze bilatere a valori non negativi.

(vi) $W = GF(2)$, \mathcal{B} l'insieme delle sequenze binarie a supporto compatto contenenti un numero dispari di elementi unitari.

(vii) $W = \mathbb{F}$, \mathcal{B} l'insieme dei segnali a supporto contenuto in $[0, +\infty)$, ovvero, in termini di serie formali, $\mathbb{F}[[z^{-1}]]$.

³Per ogni primo p e per ogni intero positivo n esiste un campo finito, unico a meno di isomorfismi, contenente p^n elementi. Tale campo viene di solito denotato con il simbolo $GF(p^n)$.

Gli operatori polinomiali “scalari” definiti in (6.4) fanno parte di una classe di operatori polinomiali più generali: se $G_\ell, G_{\ell+1}, \dots, G_L$ sono matrici $q \times m$ ad elementi in \mathbb{F} , ad esse rimane associato l'operatore $G(\sigma, \sigma^{-1}) := \sum_{i=\ell}^L G_i \sigma^i$

$$G(\sigma, \sigma^{-1}) : (\mathbb{F}^m)^{\mathbb{Z}} \rightarrow (\mathbb{F}^q)^{\mathbb{Z}} : \mathbf{u} \mapsto \sum_{i=\ell}^L G_i (\sigma^i \mathbf{u}). \quad (6.5)$$

Esso mappa la sequenza \mathbf{u} , a m componenti, nella sequenza \mathbf{w} , a q componenti, con \mathbf{u} e \mathbf{w} soddisfacenti la relazione ricorsiva

$$\mathbf{w}(t) = G_\ell \mathbf{u}(t + \ell) + G_{\ell+1} \mathbf{u}(t + \ell + 1) + \dots + G_L \mathbf{u}(t + L). \quad (6.6)$$

Pertanto $G(\sigma, \sigma^{-1})$ individua un **modello a media mobile (MA)**.

In termini di serie formali, all'operatore $G(\sigma, \sigma^{-1})$ corrisponde la matrice

$$G(z, z^{-1}) := G_\ell z^\ell + G_{\ell+1} z^{\ell+1} + \dots + G_L z^L \in \mathbb{F}[z, z^{-1}]^{q \times m},$$

che associa alla serie $\hat{\mathbf{u}}(z, z^{-1}) \in \mathcal{F}_\infty^m$ la serie $\hat{\mathbf{w}}(z, z^{-1}) := G(z, z^{-1}) \hat{\mathbf{u}}(z, z^{-1}) \in \mathcal{F}_\infty^q$. Al variare di $\hat{\mathbf{u}}(z, z^{-1})$ in \mathcal{F}_∞^m si ottiene una famiglia di serie bilaterale

$$\text{Im}_\infty G := \{\hat{\mathbf{w}}(z, z^{-1}) = G(z, z^{-1}) \hat{\mathbf{u}}(z, z^{-1}) : \hat{\mathbf{u}}(z, z^{-1}) \in \mathcal{F}_\infty^m\}, \quad (6.7)$$

che rappresenta tutte le traiettorie generate dal modello a media mobile (6.6), al variare di \mathbf{u} nello spazio $(\mathbb{F}^m)^{\mathbb{Z}}$. Tale famiglia viene chiamata *immagine* di $G(z, z^{-1})$ e costituisce un behavior lineare e tempo invariante.

In alternativa, dato un operatore $H(\sigma, \sigma^{-1}) = \sum_{i=\ell}^L H_i \sigma^i : (\mathbb{F}^q)^{\mathbb{Z}} \rightarrow (\mathbb{F}^p)^{\mathbb{Z}}$, possiamo studiare le traiettorie che appartengono al suo nucleo, ovvero le sequenze $\mathbf{w} \in (\mathbb{F}^q)^{\mathbb{Z}}$ che soddisfano le equazioni del **modello autoregressivo (AR)**

$$H_\ell \mathbf{w}(t + \ell) + H_{\ell+1} \mathbf{w}(t + \ell + 1) + \dots + H_L \mathbf{w}(t + L) = \mathbf{0}, \quad \forall t \in \mathbb{Z}. \quad (6.8)$$

Posto $H(z, z^{-1}) := H_\ell z^\ell + H_{\ell+1} z^{\ell+1} + \dots + H_L z^L$, matrice in $\mathbb{F}[z, z^{-1}]^{p \times q}$, l'insieme delle soluzioni di (6.8) è rappresentato da

$$\ker_\infty H := \{\hat{\mathbf{w}}(z, z^{-1}) \in \mathcal{F}_\infty^q : H(z, z^{-1}) \hat{\mathbf{w}}(z, z^{-1}) = \mathbf{0}\} \quad (6.9)$$

ed è chiamato *nucleo di $H(z, z^{-1})$* . Come è facile verificare, anche $\ker_\infty H$ è un behavior lineare e tempo invariante.

Per concludere questo paragrafo, vogliamo accennare ad alcune peculiarità delle serie e dei segnali bilateri. È chiaro cosa si intende per moltiplicazione “alla Cauchy” di un polinomio di Laurent $p(z, z^{-1})$ e di una serie bilaterale $s(z, z^{-1}) \in$

\mathcal{F}_∞ : tale operazione corrisponde, nel dominio del tempo, alla convoluzione di una sequenza a supporto finito con una bilatera. Tale moltiplicazione perde di significato qualora si sostituisca al polinomio $p(z, z^{-1})$ una serie arbitraria⁴ dal momento che la determinazione di ciascun coefficiente del prodotto richiederebbe, in generale, infinite operazioni di somma e prodotto in \mathbb{F} , e ciò ha senso solo sotto opportune ipotesi di convergenza, che introducono vincoli sulla struttura delle serie.

Quindi \mathcal{F}_∞ **non ha struttura di anello**, ma soltanto quella di modulo su $\mathbb{F}[z, z^{-1}]$. Si tratta comunque di una proprietà molto importante, come avremo modo di chiarire nel paragrafo sulla dualità.

Un'altra particolarità delle serie bilatere è che dalla moltiplicazione fra un polinomio in $\mathbb{F}[z, z^{-1}]$ e una serie in \mathcal{F}_∞ , entrambi non nulli, può risultare la serie nulla (e quindi \mathcal{F}_∞ **non è modulo fedele** su $\mathbb{F}[z, z^{-1}]$).

Più precisamente, dato un polinomio $p(z, z^{-1})$ in $\mathbb{F}[z, z^{-1}]$, con grado di Laurent $\delta(p(z, z^{-1})) > 0$, esistono serie formali non nulle $\hat{x}(z, z^{-1}) \in \mathcal{F}_\infty$ che soddisfano la condizione

$$p(z, z^{-1})\hat{x}(z, z^{-1}) = 0. \quad (6.10)$$

Sia infatti

$$p(\sigma, \sigma^{-1}) = p_\ell \sigma^\ell + p_{\ell+1} \sigma^{\ell+1} + \dots + p_L \sigma^L, \quad \ell < L, \quad p_\ell p_L \neq 0$$

e siano $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{L-\ell}$ arbitrari elementi, non tutti nulli, in \mathbb{F} . Per ottenere la serie $\hat{x}(z, z^{-1})$ basta considerare una sequenza scalare $\{x(t)\}_t$ nella quale $L - \ell$ campioni consecutivi assumano i valori $\alpha_i, i = 1, 2, \dots, L - \ell$, ad esempio

$$x(1) = \alpha_1, \dots, x(L - \ell) = \alpha_{L-\ell}$$

ed espandere tale sequenza finita in modo da soddisfare per ogni $t \in \mathbb{Z}$ la relazione

$$p_\ell x(\ell + t) + p_{\ell+1} x(\ell + t + 1) + \dots + p_L x(L + t) = 0.$$

Si noti che la costruzione ora illustrata non può prescindere dall'uso di sequenze bilatere; infatti l'unica sequenza a supporto compatto a destra o a sinistra che soddisfi la relazione ricorsiva associata a $p(\sigma, \sigma^{-1})$ è la sequenza nulla.

Con analogo ragionamento si dimostra che, dati un'arbitraria serie bilatera $s(z, z^{-1}) = \sum_t s(t)z^{-t} \in \mathcal{F}_\infty$ e un polinomio di Laurent non nullo $p(z, z^{-1})$, l'equazione

$$s(z, z^{-1}) = p(z, z^{-1})x(z, z^{-1})$$

⁴Si noti, tuttavia, che la moltiplicazione alla Cauchy fra due arbitrarie serie di Laurent è sempre possibile, e anzi $\mathbb{F}((z))$ è un campo rispetto a tale moltiplicazione e alla addizione consueta.

nell'incognita $x(z, z^{-1})$ è sempre risolubile in \mathcal{F}_∞ e tale soluzione è unica se e solo se $\delta(p(z, z^{-1})) = 0$. Infatti, tale equazione può essere risolta fissando $L - \ell$ coefficienti consecutivi di $x(z, z^{-1})$ in modo arbitrario e determinando ricorsivamente gli altri, in base alla relazione

$$p_\ell x(\ell + t) + p_{\ell+1} x(\ell + t + 1) + \dots + p_L x(L + t) = s(t).$$

- **ESERCIZIO 6.1.1** POLINOMI ANNULATORI E POLINOMIO MINIMO DI UNA SEQUENZA BILATERA] (i) Data una successione bilatera $s \in \mathbb{F}^{\mathbb{Z}}$, un polinomio di Laurent $p(z, z^{-1}) \in \mathbb{F}[z, z^{-1}]$ è detto **annullatore di s** o, equivalentemente, della serie associata $\hat{s}(z, z^{-1})$, se $p(z, z^{-1})\hat{s}(z, z^{-1}) = 0$. Si verifichi che l'insieme \mathcal{N}_s dei polinomi annullatori di s è un ideale principale in $\mathbb{F}[z, z^{-1}]$. Il generatore di \mathcal{N}_s è individuato a meno di un fattore monomio non nullo. Il generatore sarà detto **polinomio (annullatore) minimo** di s e sarà indicato con $\psi_s(z)$ quando è in $\mathbb{F}[z]$ ed ha termine noto unitario.

(ii) Per ogni polinomio $q(z) \in \mathbb{F}[z]$ con termine noto unitario, esiste una sequenza in \mathcal{F}_∞ avente $q(z)$ come polinomio minimo

(Suggerimento: si consideri la sequenza annullata da $q(z)$ e contenente $\delta(q) - 1$ termini nulli consecutivi, seguiti da 1).

(iii) Dato un polinomio $p(z, z^{-1}) \in \mathbb{F}[z, z^{-1}]$, l'insieme \mathcal{B}_p delle **sequenze bilatere annullate da $p(z, z^{-1})$** è uno spazio vettoriale su \mathbb{F} , di dimensione pari al grado di Laurent $\delta := \delta(p(z, z^{-1}))$, ed è un behavior lineare e tempo invariante.

(Sugg.: $\mathcal{B}_p = \{\hat{x}(z, z^{-1}) \in \mathcal{F}_\infty : x(1) = \alpha_1, \dots, x(\delta) = \alpha_\delta, \alpha_i \in \mathbb{F}, p(z, z^{-1})\hat{x}(z, z^{-1}) = 0\}$)

(iv) Si dimostri che, per ogni $q(z) \in \mathbb{F}[z]$ che divide $p(z, z^{-1})$ ed ha termine noto unitario, esiste una sequenza in \mathcal{B}_p avente $q(z)$ come polinomio minimo.

6.2 Proprietà delle rappresentazioni a nucleo

Le traiettorie di un **modello autoregressivo** sono, come si è visto, gli elementi del nucleo di una matrice polinomiale di Laurent. In questo paragrafo studieremo alcune proprietà elementari delle rappresentazioni a nucleo, e analizzeremo in qual modo condizioni di fattorizzabilità delle matrici polinomiali si traducano in relazioni di uguaglianza o di inclusione dei corrispondenti nuclei.

Ulteriori caratterizzazioni dei modelli autoregressivi verranno considerate nel paragrafo successivo.

Proposizione 6.2.1 [MATRICI CON IL MEDESIMO \ker_∞] Sia $H(z, z^{-1})$ un'arbitraria matrice in $\mathbb{F}[z, z^{-1}]^{p \times q}$ e sia r il suo rango. Allora

- (i) $\ker_\infty H = \ker_\infty(UH)$, per ogni matrice $U(z, z^{-1}) \in \mathbb{F}[z, z^{-1}]^{m \times p}$ prima a destra;
- (ii) $\ker_\infty H = \ker_\infty \tilde{H}$, per una opportuna matrice $\tilde{H}(z, z^{-1}) \in \mathbb{F}[z, z^{-1}]^{r \times q}$ a rango di riga pieno r .

DIMOSTRAZIONE (i) Posto $H'(z, z^{-1}) := U(z, z^{-1})H(z, z^{-1})$, è chiaro che

$$\ker_{\infty} H \subseteq \ker_{\infty}(UH) = \ker_{\infty} H'.$$

D'altra parte, è anche vero che $H(z, z^{-1}) = U^{-1}(z, z^{-1})H'(z, z^{-1})$, con $U^{-1}(z, z^{-1})$ inversa sinistra polinomiale di Laurent di U , e quindi

$$\ker_{\infty} H' \subseteq \ker_{\infty} H.$$

(ii) Detta $\Gamma(z, z^{-1})$ la forma di Smith di $H(z, z^{-1})$ su $\mathbb{F}[z, z^{-1}]$, consideriamo la fattorizzazione

$$H(z, z^{-1}) = U(z, z^{-1})\Gamma(z, z^{-1})V(z, z^{-1}) = U(z, z^{-1}) \begin{bmatrix} \tilde{\Gamma}(z, z^{-1}) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V(z, z^{-1}),$$

con $U(z, z^{-1})$ e $V(z, z^{-1})$ matrici quadrate unimodulari di opportune dimensioni, e $\tilde{\Gamma}(z, z^{-1})$ matrice diagonale $r \times r$ non singolare.

Per il punto precedente, è chiaro che un vettore $\hat{\mathbf{v}}(z, z^{-1})$ si trova in $\ker_{\infty} H$ se e solo se appartiene a $\ker_{\infty}([\tilde{\Gamma} \mid 0] V)$, e quindi (ii) vale per $\tilde{H}(z, z^{-1}) = [\tilde{\Gamma}(z, z^{-1}) \mid 0] V(z, z^{-1})$. ■

Proposizione 6.2.2 [CONDIZIONI PER NUCLEO NULLO] Sia $H(z, z^{-1})$ una matrice in $\mathbb{F}[z, z^{-1}]^{p \times q}$. Sono fatti equivalenti:

- (i) $H(z, z^{-1})$ è prima a destra;
- (ii) $\ker_{\infty} H$ contiene solo la sequenza nulla;
- (iii) è iniettiva l'applicazione

$$H : \mathcal{F}_{\infty}^q \rightarrow \mathcal{F}_{\infty}^p : \hat{\mathbf{w}}(z, z^{-1}) \mapsto H(z, z^{-1})\hat{\mathbf{w}}(z, z^{-1}).$$

DIMOSTRAZIONE (i) \Leftrightarrow (ii) Se $H(z, z^{-1})$ è prima a destra, detta $H^{-1}(z, z^{-1}) \in \mathbb{F}[z, z^{-1}]^{q \times p}$ una sua inversa sinistra polinomiale, per ogni serie $\hat{\mathbf{w}}(z, z^{-1})$ in $\ker_{\infty} H$ si ha

$$\hat{\mathbf{w}}(z, z^{-1}) = H^{-1}(z, z^{-1})(H(z, z^{-1})\hat{\mathbf{w}}(z, z^{-1})) = \mathbf{0}.$$

Se, viceversa, $H(z, z^{-1})$ non è prima a destra, distinguiamo due casi: o H ha rango minore di q oppure ha rango q ma ha un fattore destro non banale. Nel primo caso esiste un vettore polinomiale $\hat{\mathbf{w}}(z, z^{-1}) \in \mathbb{F}[z, z^{-1}]^q$ non nullo tale che $H(z, z^{-1})\hat{\mathbf{w}}(z, z^{-1}) = 0$, e quindi $\ker_{\infty} H$ contiene almeno un elemento non

nullo. Nel secondo caso, invece, $H(z, z^{-1})$ è fattorizzabile (facendo ricorso ad un algoritmo di fattorizzazione basato sulla forma di Hermite, analogo a quello illustrato per matrici polinomiali ordinarie) nella forma

$$H(z, z^{-1}) = \tilde{H}(z, z^{-1})D(z, z^{-1}),$$

con $\tilde{H}(z, z^{-1})$ in $\mathbb{F}[z, z^{-1}]^{p \times q}$, e $D(z, z^{-1})$ in $\mathbb{F}[z, z^{-1}]^{q \times q}$ divisore destro non banale, con ciò intendendo che il grado di Laurent $\delta(\det D(z, z^{-1}))$ è maggiore di zero. Allora nella forma di Smith di $D(z, z^{-1})$

$$U(z, z^{-1})D(z, z^{-1})V(z, z^{-1}) = \{\text{diag}\{\gamma_1(z, z^{-1}), \dots, \gamma_q(z, z^{-1})\}\}$$

almeno il polinomio $\gamma_q(z, z^{-1})$ ha grado di Laurent non nullo ed esiste quindi una serie scalare non nulla $\hat{s}(z, z^{-1}) \in \mathcal{F}_\infty$ soddisfacente $\gamma_q(z, z^{-1})\hat{s}(z, z^{-1}) = 0$. È facile verificare che la serie non nulla

$$\hat{w}(z, z^{-1}) := V(z, z^{-1}) \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \hat{s}(z, z^{-1}) \end{bmatrix}$$

è nel nucleo di $D(z, z^{-1})$ e quindi in quello di $H(z, z^{-1})$.

L'equivalenza fra (ii) e (iii) è ovvia. ■

Proposizione 6.2.3 [INCLUSIONE FRA BEHAVIOR A NUCLEO] *Se $H_1(z, z^{-1})$ e $H_2(z, z^{-1})$ sono matrici polinomiali di Laurent, di dimensioni rispettivamente $p_1 \times q$ e $p_2 \times q$, allora $\ker_\infty H_1 \subseteq \ker_\infty H_2$ se e solo se esiste una matrice $M(z, z^{-1}) \in \mathbb{F}[z, z^{-1}]^{p_2 \times p_1}$ tale che*

$$H_2(z, z^{-1}) = M(z, z^{-1})H_1(z, z^{-1}).$$

DIMOSTRAZIONE È ovvio che $\ker_\infty H_1 \subseteq \ker_\infty(MH_1)$, $\forall M(z, z^{-1}) \in \mathbb{F}[z, z^{-1}]$. Supponiamo, viceversa, che $\ker_\infty H_1$ sia contenuto in $\ker_\infty H_2$ e sia

$$\Gamma_1(z, z^{-1}) = U(z, z^{-1})H_1(z, z^{-1})V(z, z^{-1}) = \text{diag}\{\gamma_1(z, z^{-1}), \gamma_2(z, z^{-1}), \dots, \gamma_r(z, z^{-1})\}_{p_1 \times q}$$

la forma di Smith di $H_1(z, z^{-1})$. Dalla condizione $\ker_\infty H_1 = \ker_\infty \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix}$ segue immediatamente

$$\ker_\infty(H_1V) = \ker_\infty \left(\begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} V \right),$$

e, tenendo conto del punto (i) della Proposizione 6.2.1, si ha

$$\ker_\infty \Gamma_1 = \ker_\infty(H_1V) = \ker_\infty \left(\begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} V \right) = \ker_\infty \left(\begin{bmatrix} U & 0 \\ 0 & I_{p_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} V \right)$$

$$= \ker_{\infty} \left[\begin{array}{ccc|c} \gamma_1 & & & 0 \\ & \gamma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \gamma_r & 0 \\ \hline & & & 0 & 0 \\ \hline & & & & H_2V \end{array} \right]. \quad (6.11)$$

Poichè $\ker_{\infty} \Gamma_1$ include i vettori $\mathbf{e}_{r+1}, \dots, \mathbf{e}_q$ della base canonica, le ultime $q - r$ colonne di $H_2(z, z^{-1})V(z, z^{-1})$ sono nulle.

Per $i = 1, 2, \dots, r$, se indichiamo con $\hat{s}_i(z, z^{-1})$ una serie bilatera non nulla per la quale $\gamma_i(z, z^{-1})$ sia polinomio annullatore minimo, il vettore $\hat{s}_i(z, z^{-1})\mathbf{e}_i$ appartiene al nucleo di $\Gamma_1(z, z^{-1})$, e soddisfa quindi la condizione

$$H_2(z, z^{-1})V(z, z^{-1})\mathbf{e}_i\hat{s}_i(z, z^{-1}) = \mathbf{0}.$$

Pertanto la colonna i -esima di $H_2(z, z^{-1})V(z, z^{-1})$ è costituita da polinomi multipli di $\gamma_i(z, z^{-1})$ e risulta

$$H_2(z, z^{-1})V(z, z^{-1}) = [T(z, z^{-1}) \quad 0] \text{diag}\{\gamma_1(z, z^{-1}), \gamma_2(z, z^{-1}), \dots, \gamma_r(z, z^{-1})\}_{p_1 \times q},$$

per un'opportuna matrice polinomiale di Laurent $T(z, z^{-1})$. Da ciò segue (evitando per semplicità di riportare esplicitamente l'indeterminata)

$$\begin{aligned} H_2 &= [T \quad 0] \Gamma_1 V^{-1} \\ &= [T \quad 0] U U^{-1} \Gamma_1 V^{-1} \\ &= [T \quad 0] U H_1, \end{aligned}$$

e basta porre $M(z, z^{-1}) := [T(z, z^{-1}) \quad 0] U(z, z^{-1})$. ■

- **ESERCIZIO 6.2.1 [MATRICI CON IL MEDESIMO NUCLEO]** Siano $H_1(z, z^{-1})$ e $H_2(z, z^{-1})$ matrici polinomiali di Laurent, di dimensioni rispettivamente $p_1 \times q$ e $p_2 \times q$. Si dimostri che

(i) $\ker_{\infty} H_1 = \ker_{\infty} H_2$ se e solo se esistono matrici $M_1(z, z^{-1})$ e $M_2(z, z^{-1})$ ad elementi in $\mathbb{F}[z, z^{-1}]$ e di opportune dimensioni, tali che

$$H_2(z, z^{-1}) = M_1(z, z^{-1})H_1(z, z^{-1}) \quad \text{e} \quad H_1(z, z^{-1}) = M_2(z, z^{-1})H_2(z, z^{-1}).$$

Ciò equivale ad affermare che i sottomoduli di $\mathbb{F}[z, z^{-1}]^q$ generati dalle righe di $H_1(z, z^{-1})$ e $H_2(z, z^{-1})$ coincidono. Di conseguenza, i behavior lineari ed invarianti contenuti in \mathcal{F}_{∞}^q

e rappresentabili a nucleo sono in corrispondenza biettiva con i sottomoduli distinti di $\mathbb{F}[z, z^{-1}]^q$.

(ii) Se $H_1(z, z^{-1})$ e $H_2(z, z^{-1})$ hanno entrambe rango di riga pieno, allora $\ker_\infty H_1 = \ker_\infty H_2$ se e solo se $p_1 = p_2$ ed esiste una matrice unimodulare $U(z, z^{-1})$ tale che $H_2(z, z^{-1}) = U(z, z^{-1})H_1(z, z^{-1})$.

Suggerimento: dal punto precedente si ha $H_2 = M_1 M_2 H_1$ e $H_1 = M_2 M_1 H_2$, con M_1 di dimensione $p_2 \times p_1$ e M_2 di dimensione $p_1 \times p_2$. Per garantire il rango di H_2 la matrice $M_1 M_2$ ha rango p_2 e deve essere $p_1 \geq p_2$, per garantire il rango di H_1 la matrice $M_2 M_1$ ha rango p_1 e deve essere $p_2 \geq p_1$. Quindi $p_1 = p_2 := p$ e M_1, M_2 sono quadrate $p \times p$ di rango pieno. Infine deve essere $(I_p - M_1 M_2)H_2 = 0$, quindi $M_1 M_2 = I_p$ e le matrici M_i sono unimodulari.)

6.3 Behavior completi

Le ipotesi di linearità e tempo invarianza non sono di per sè sufficienti a garantire l'esistenza di una descrizione “di tipo finito” per le traiettorie di un behavior \mathcal{B} . Più precisamente, per verificare l'appartenenza a \mathcal{B} di una sequenza \mathbf{v} non è garantita in generale l'esistenza di un algoritmo che ad ogni passo coinvolga solo un numero finito di campioni di \mathbf{v} . Cerchiamo di chiarire questa osservazione con alcuni esempi.

Per stabilire se una sequenza $\mathbf{v} \in (GF(2))^{\mathbb{Z}}$ appartiene al behavior a supporto compatto \mathcal{B} dell'Esempio 6.1.2, punto (iii), si deve verificare che la somma dei campioni di \mathbf{v} sia nulla. Questa verifica non può essere effettuata analizzando \mathbf{v} su sottoinsiemi finiti di \mathbb{Z} , dal momento che le restrizioni delle traiettorie di \mathcal{B} ad un intervallo finito non sono distinguibili dalle restrizioni dell'universo di tutte le sequenze di $(GF(2))^{\mathbb{Z}}$. Osservazioni analoghe valgono per $\mathcal{B} = \ell^2(\mathbb{R})$: su un intervallo finito una sequenza di $\ell^2(\mathbb{R})$ non presenta alcun carattere distintivo rispetto a una sequenza generica di $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$.

Se consideriamo, invece, come behavior \mathcal{B} l'insieme delle sequenze periodiche di periodo p , è immediato notare che sono sequenze di \mathcal{B} tutte e sole quelle che soddisfano

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(t + p), \quad \forall t \in \mathbb{Z}.$$

e per verificare tale condizione è sufficiente analizzare l'andamento del segnale sugli intervalli di lunghezza $p + 1$.

L'ultimo esempio evidenzia la situazione prima delineata, in cui le traiettorie di un behavior sono caratterizzabili in termini delle loro restrizioni finite. Chiameremo “completo” un behavior con tale proprietà. Per darne una definizione formale e discuterne le principali caratteristiche, conviene introdurre due ulteriori operazioni sulle sequenze bilatere:

- *concatenazione*: se \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 sono due sequenze in $(\mathbb{F}^q)^\mathbb{Z}$ e τ è un intero, la concatenazione in τ di \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 è la sequenza di $(\mathbb{F}^q)^\mathbb{Z}$ definita come

$$(\mathbf{v}_1 \underset{\tau}{\circ} \mathbf{v}_2)(t) := \begin{cases} \mathbf{v}_1(t) & \text{per } t < \tau \\ \mathbf{v}_2(t) & \text{per } t \geq \tau \end{cases}; \quad (6.12)$$

- *restrizione*: se \mathbf{v} è una sequenza di $(\mathbb{F}^q)^\mathbb{Z}$ e \mathcal{D} un arbitrario sottoinsieme di \mathbb{Z} , la restrizione di \mathbf{v} a \mathcal{D} è la sottosequenza di \mathbf{v} definita da

$$\mathbf{v}|_{\mathcal{D}} : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{F}^q : t \mapsto \mathbf{v}(t). \quad (6.13)$$

Pertanto la restrizione $\mathbf{v}|_{\mathcal{D}}$ si ottiene considerando solo i campioni di \mathbf{v} relativi all'insieme \mathcal{D} .

Conveniamo, inoltre, di indicare con $\mathcal{B}|_{\mathcal{D}}$ l'insieme delle restrizioni a \mathcal{D} delle traiettorie di \mathcal{B} , ovvero poniamo

$$\mathcal{B}|_{\mathcal{D}} := \{\mathbf{w}|_{\mathcal{D}} : \mathbf{w} \in \mathcal{B}\}. \quad (6.14)$$

Definizione 6.3.1 [BEHAVIOR COMPLETO ED N -COMPLETO] Un behavior $\mathcal{B} \subseteq (\mathbb{F}^q)^\mathbb{Z}$ lineare e tempo invariante è *completo* se per ogni $\mathbf{v} \in (\mathbb{F}^q)^\mathbb{Z}$ il verificarsi della condizione $\mathbf{v}|_{\mathcal{I}} \in \mathcal{B}|_{\mathcal{I}}$, per ogni intervallo finito \mathcal{I} di \mathbb{Z} , assicura $\mathbf{v} \in \mathcal{B}$. *N -completo* ($N \geq 0$) se per ogni $\mathbf{v} \in (\mathbb{F}^q)^\mathbb{Z}$ la condizione $\mathbf{v}|_{\mathcal{I}} \in \mathcal{B}|_{\mathcal{I}}$, per ogni intervallo $\mathcal{I} \subset \mathbb{Z}$ di lunghezza⁵ N , garantisce $\mathbf{v} \in \mathcal{B}$.

- **ESERCIZIO 6.3.1** Si dimostrino i seguenti fatti:
 - per ogni $N \in \mathbb{N}$, se \mathcal{B} è N -completo allora \mathcal{B} è $(N + 1)$ -completo.
 - Se \mathcal{B} è N -completo per qualche $N \in \mathbb{N}$ allora \mathcal{B} è completo.
 - Se \mathcal{B} è completo e se $\mathcal{I}_1 \subset \mathcal{I}_2 \subset \mathcal{I}_3 \dots$ è una successione di intervalli finiti invadente \mathbb{Z} (i.e. tale che $\cup_i \mathcal{I}_i = \mathbb{Z}$), allora $\mathbf{v}|_{\mathcal{I}_i} \in \mathcal{B}|_{\mathcal{I}_i}$ per ogni $i \in \mathbb{N}$ implica $\mathbf{v} \in \mathcal{B}$.
 - Un behavior $\mathcal{B} \subseteq (\mathbb{F}^q)^\mathbb{Z}$ (lineare e tempo invariante) è **0-completo** se e solo se è del tipo $\mathcal{B} = V^\mathbb{Z}$, con V un arbitrario sottospazio vettoriale di \mathbb{F}^q .
(Suggerimento: V sia il sottospazio di \mathbb{F}^q ottenuto come restrizione delle traiettorie di \mathcal{B} all'istante $t = 0$. Per invarianza, in ogni istante ogni traiettoria di \mathcal{B} assume valori in V . Se un segnale \mathbf{v} soddisfa $\mathbf{v}(t) \in V, \forall t$, allora $\mathbf{v}|_{\mathcal{I}} \in \mathcal{B}|_{\mathcal{I}}$ per ogni intervallo \mathcal{I} di lunghezza 0. Quindi, se \mathcal{B} è 0-completo $\mathbf{v} \in \mathcal{B}$.)
 - $\mathcal{B} = \mathbb{F}((z^{-1}))$ e $\mathcal{B} = \mathbb{F}[z, z^{-1}]$ non sono completi.
(Suggerimento: le restrizioni finite di \mathcal{F}_∞ sono indistinguibili da quelle di \mathcal{B})

⁵Con lunghezza dell'intervallo $[h, k] \subset \mathbb{Z}$ intendiamo il numero naturale $k - h$.

Nel seguito la classe dei behavior \mathbb{F} -lineari, tempo invarianti e completi con p componenti verrà indicata con $\mathbf{B}(\mathbb{F}^q)$.

Definizione 6.3.2 [MEMORIA DI UN BEHAVIOR; MARKOVIANITÀ] Un behavior $\mathcal{B} \subseteq (\mathbb{F}^q)^{\mathbb{Z}}$ lineare e tempo invariante

- ha *memoria di N passi* ($N \geq 0$) se per ogni \mathbf{w}_1 e \mathbf{w}_2 in \mathcal{B} , con $\mathbf{w}_1|_{[0, N-1]} = \mathbf{w}_2|_{[0, N-1]}$, si ha

$$\mathbf{w}_1 \underset{0}{\circ} \mathbf{w}_2 \in \mathcal{B}.$$

In particolare, se $N = 1$ (memoria di 1 passo) il behavior è detto *markoviano*.

- è *senza memoria* se \mathcal{B} è chiuso rispetto alla concatenazione, ovvero se per ogni coppia di traiettorie \mathbf{w}_1 e \mathbf{w}_2 in \mathcal{B} , anche $\mathbf{w}_1 \underset{0}{\circ} \mathbf{w}_2$ appartiene a \mathcal{B} .

- ESERCIZIO 6.3.2 Si dimostrino le seguenti implicazioni:

- per ogni $N \in \mathbb{N}$, se \mathcal{B} ha memoria di N passi allora ha anche memoria di $N + 1$ passi.
- \mathcal{B} senza memoria $\Rightarrow \mathcal{B}$ markoviano $\Rightarrow \mathcal{B}$ ha memoria di N passi per ogni $N \in \mathbb{N}$.

- ESERCIZIO 6.3.3 Si consideri un sistema nella forma di stato

$$\mathbf{x}(t+1) = F\mathbf{x}(t) + G\mathbf{u}(t),$$

con $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $G \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Detto \mathcal{B} l'insieme delle evoluzioni forzate $\mathbf{x}(\cdot)$ del sistema, corrispondenti ad ingressi a supporto compatto nel passato, si dimostri che

(i) \mathcal{B} è un behavior lineare e tempo invariante;

(ii) \mathcal{B} non è un behavior completo

(Suggerimento: se $G \neq 0$, si consideri un movimento del sistema che inizi all'istante $t = 0$ nello stato zero e termini in un tempo finito nello stato zero, dopo aver raggiunto stati non nulli. Per periodizzazione, si ottiene una sequenza $\mathbf{v} \in (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{Z}}$ che non ha supporto compatto nel passato ma che soddisfa $\mathbf{v}|_{\mathcal{I}} \in \mathcal{B}|_{\mathcal{I}}$ per ogni intervallo finito $\mathcal{I} \subset \mathbb{Z}$)

(iii) \mathcal{B} è markoviano.

(Suggerimento: si supponga che \mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_2 siano in \mathcal{B} , essendo i movimenti forzati prodotti da $\mathbf{u}_1(\cdot)$ e da $\mathbf{u}_2(\cdot)$. Se $\mathbf{x}_1(0) = \mathbf{x}_2(0)$, l'ingresso $\mathbf{u}_1 \underset{0}{\circ} \mathbf{u}_2$ produce il movimento forzato $\mathbf{x}_1 \underset{0}{\circ} \mathbf{x}_2$)

- ESERCIZIO 6.3.4 Si consideri il modello ARMA scalare

$$a_0 y(t) + a_1 y(t-1) + a_2 y(t-2) = b_0 u(t) + b_1 u(t-1), \quad a_i, b_i \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{Z}.$$

Posto $\mathbf{w}(\cdot) := [u(\cdot) y(\cdot)]^T$, si verifichi che

(i) la totalità dei segnali $\mathbf{w} \in (\mathbb{R}^2)^{\mathbb{Z}}$ che soddisfano l'equazione del modello costituisce un behavior \mathcal{B} lineare, tempo invariante e completo.

(ii) \mathcal{B} ha memoria di 2 passi.

- ESERCIZIO 6.3.5 [BEHAVIOR SENZA MEMORIA] (i) Un behavior 0-completo è un behavior senza memoria⁶.

(ii) Sia V un arbitrario sottospazio vettoriale di \mathbb{F}^q . Si dimostri che i seguenti spazi di sequenze sono behavior lineari e tempo invarianti senza memoria:

- la totalità delle sequenze bilatere a valori in V (i.e. il behavior 0-completo a valori in V)
- la totalità delle sequenze a supporto compatto a valori in V ,
- la totalità delle sequenze a supporto compatto a sinistra a valori in V ,
- la totalità delle sequenze a supporto compatto a destra a valori in V .

(iii) Si dimostri che in $(\mathbb{F}^q)^{\mathbb{Z}}$ esistono altri behavior lineari e tempo invarianti senza memoria

(Suggerimento: si ponga $\mathcal{B}_1 = \mathbb{F}[z, z^{-1}]^q$, behaviors a supporto compatto, \mathcal{B}_2 behaviors periodici a supporto compatto nel passato, \mathcal{B}_3 behaviors periodici a supporto compatto nel futuro e si consideri $\mathcal{B} := \{\mathbf{w}_2 \circ_{\tau_2} \mathbf{w}_1 \circ_{\tau_1} \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_i \in \mathcal{B}_i, \tau_2 \leq \tau_1\}$)

Proposizione 6.3.3 [N -COMPLETEZZA \Rightarrow MEMORIA DI N PASSI] *Sia \mathcal{B} un behavior lineare e tempo invariante a q componenti. Se \mathcal{B} è N -completo, allora ha memoria di N passi.*

DIMOSTRAZIONE Siano \mathbf{w}_1 e \mathbf{w}_2 due traiettorie di \mathcal{B} , soddisfacenti $\mathbf{w}_1|_{[0, N-1]} = \mathbf{w}_2|_{[0, N-1]}$. È chiaro che le restrizioni della sequenza $\mathbf{w}_1 \circ_0 \mathbf{w}_2$ ad ogni intervallo di lunghezza⁷ N sono tutte restrizioni di una traiettoria di \mathcal{B} . Allora, per la N -completezza, $\mathbf{w}_1 \circ_0 \mathbf{w}_2$ è in \mathcal{B} . ■

Si noti che, in generale, il risultato della Proposizione 6.3.3 non può essere invertito: basti pensare, ad esempio, che lo spazio delle sequenze a supporto compatto in $(\mathbb{F}^q)^{\mathbb{Z}}$ non è un behavior completo ma ha memoria di lunghezza N per ogni $N \geq 0$. Un altro controesempio è stato fornito nell'Esercizio 6.3.3.

La seguente proposizione è di fondamentale importanza in quanto riduce i behavior completi alle famiglie di traiettorie generate da modelli autoregressivi.

Proposizione 6.3.4 [COMPLETEZZA, N -COMPLETEZZA E RAPPRESENTAZIONI A NUCLEO] *Sia \mathcal{B} un behavior lineare e tempo invariante a q componenti. Sono fatti equivalenti*

- (i) \mathcal{B} è completo;

⁶i.e. ha memoria di zero passi: si veda una generalizzazione nella proposizione 6.3.3

⁷si noti che un intervallo di lunghezza N consiste di $N + 1$ passi (o "campioni")

(ii) esistono un intero positivo $p \in \mathbb{N}$ e una matrice polinomiale di Laurent $H(z, z^{-1}) \in \mathbb{F}[z, z^{-1}]^{p \times q}$ tali che

$$\mathcal{B} = \ker_{\infty} H = \{\hat{\mathbf{w}}(z, z^{-1}) \in \mathcal{F}_{\infty}^q : H(z, z^{-1})\hat{\mathbf{w}} = \mathbf{0}\}; \quad (6.15)$$

(iii) \mathcal{B} è N -completo per qualche $N \in \mathbb{N}$.

DIMOSTRAZIONE (i) \Rightarrow (ii) Consideriamo la successione di intervalli $[-n, n]$, $n \in \mathbb{N}$, e supponiamo dapprima che la restrizione $\mathcal{B}|_{[-n, n]}$ di \mathcal{B} a $[-n, n]$ coincida con $(\mathbb{F}^q)^{[-n, n]}$ per ogni valore di n . In questo caso si ha $\mathcal{B} = (\mathbb{F}^q)^{\mathbb{Z}}$, perchè qualsiasi segnale $\mathbf{v} \in (\mathbb{F}^q)^{\mathbb{Z}}$, soddisfacendo la condizione

$$\mathbf{v}|_{[-n, n]} \in \mathcal{B}|_{[-n, n]}$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$, appartiene a \mathcal{B} per la completezza di \mathcal{B} . È sufficiente allora scegliere $p = 1$ e $H(z, z^{-1}) = 0_{1 \times q}$.

Supponiamo invece che per qualche $N \in \mathbb{N}$, e quindi per ogni $n \geq N$, si abbia

$$\mathcal{B}|_{[-n, n]} \subsetneq (\mathbb{F}^q)^{[-n, n]}.$$

Se $\hat{\mathbf{v}} \in \mathcal{F}_{\infty}^q$, rappresentiamo la restrizione $\mathbf{v}|_{[-n, n]}$ mediante il vettore colonna

$$\mathbf{v}_n := \begin{bmatrix} \mathbf{v}(-n) \\ \mathbf{v}(-n+1) \\ \vdots \\ \mathbf{v}(n) \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{q(2n+1)}.$$

Indichiamo con $\bar{H}^{(n)}$ una matrice a elementi in \mathbb{F} , non nulla se $n \geq N$, tale che $\mathbf{v}|_{[-n, n]} \in \mathcal{B}|_{[-n, n]}$ se e solo se $\mathbf{v}_n \in \ker_{\infty} \bar{H}^{(n)}$ e, partizionando $\bar{H}^{(n)}$ conformemente al vettore \mathbf{v}_n , riscriviamo la condizione $\bar{H}^{(n)}\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$ nella forma

$$\sum_{i=-n}^n \bar{H}_i^{(n)} \mathbf{v}(i) = \mathbf{0}.$$

Per ogni $\hat{\mathbf{w}} \in \mathcal{B}$ la tempo invarianza implica allora

$$\sum_{i=-n}^n \bar{H}_i^{(n)} \mathbf{w}(i+h) = \mathbf{0}, \quad \forall h \in \mathbb{Z},$$

e quindi anche

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_h \sum_{i=-n}^n \bar{H}_i^{(n)} z^i \mathbf{w}(i+h) z^{-i-h} \\ &= \sum_{i=-n}^n \bar{H}_i^{(n)} z^i \sum_h \mathbf{w}(h) z^{-h} = H^{(n)}(z, z^{-1}) \hat{\mathbf{w}}(z, z^{-1}), \end{aligned}$$

dove con $H^{(n)}(z, z^{-1}) \in \mathbb{F}(z, z^{-1})^{r_n \times q}$ si è indicata la matrice $\sum_{i=-n}^n \bar{H}_i^{(n)} z^i$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, sia $\mathcal{H}^{(n)}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, il sottomodulo di $\mathbb{F}[z, z^{-1}]^q$ generato dalle righe della matrice $H^{(n)}(z, z^{-1})$ e verifichiamo che la successione $\{\mathcal{H}^{(n)}\}$ è una catena ascendente di sottomoduli di $\mathbb{F}[z, z^{-1}]^q$, i.e.

$$\mathcal{H}^{(0)} \subseteq \mathcal{H}^{(1)} \subseteq \dots \subseteq \mathcal{H}^{(N)} \subseteq \mathcal{H}^{(N+1)} \subseteq \dots$$

Se $\bar{H}^{(n)} \in \mathbb{F}^{r_n \times q(2n+1)}$ è la matrice attraverso cui abbiamo espresso la condizione $\mathbf{v}|_{[-n, n]} \in \mathcal{B}|_{[-n, n]}$, per $\bar{H}^{(n+1)}$ si può scegliere una matrice avente la seguente struttura

$$\bar{H}^{(n+1)} = \left[\begin{array}{c|c|c} 0_{r_n \times q} & \bar{H}^{(n)} & 0_{r_n \times q} \\ \hline & K^{(n+1)} & \end{array} \right],$$

in cui $K^{(n+1)}$ è un'opportuna matrice a elementi in \mathbb{F} , che esprime i vincoli aggiuntivi a cui devono soggiacere le restrizioni delle traiettorie a intervalli di lunghezza $2(n+1) + 1$. È chiaro, allora, che le prime r_n righe della matrice polinomiale $H^{(n+1)}(z, z^{-1})$ coincidono con le righe della matrice $H^{(n)}(z, z^{-1})$, e quindi che $\mathcal{H}^{(n)} \subseteq \mathcal{H}^{(n+1)}$.

Poichè $\mathbb{F}[z, z^{-1}]^q$ è un modulo Noetheriano, ogni catena ascendente di suoi sottomoduli diventa stazionaria. Esiste quindi un intero M , tale che $\mathcal{H}^{(M)} = \mathcal{H}^{(n)}$ e $\ker_\infty H^{(M)} = \ker_\infty H^{(n)}$, per ogni $n \geq M$.

Proviamo che $\mathcal{B} = \ker_\infty H^{(M)}$. Poiché l'inclusione $\mathcal{B} \subseteq \ker_\infty H^{(M)}$ è ovvia, resta da provare l'inclusione opposta. A tale scopo si consideri una arbitrario segnale $\hat{\mathbf{v}}(z, z^{-1}) \in \ker_\infty H^{(M)}$. Poichè $\hat{\mathbf{v}}(z, z^{-1}) \in \ker_\infty H^{(n)}$ per ogni $n \geq M$, le restrizioni di \mathbf{v} ad ogni intervallo $[-n, n]$ sono elementi di $\mathcal{B}|_{[-n, n]}$, ovvero sono restrizioni di traiettorie di \mathcal{B} , e la completezza di \mathcal{B} permette di affermare che $\hat{\mathbf{v}}(z, z^{-1})$ è in \mathcal{B} . La (ii) vale allora con $H(z, z^{-1}) = H^{(M)}(z, z^{-1})$.

(ii) \Rightarrow (iii) Supponiamo di rappresentare la matrice $H(z, z^{-1})$ come polinomio di Laurent a coefficienti matriciali, ovvero nella forma

$$H(z, z^{-1}) = H_\ell z^\ell + H_{\ell+1} z^{\ell+1} + \dots + H_L z^L, \quad H_\ell, H_L \neq 0,$$

e poniamo $N := L - \ell$. L'appartenenza a \mathcal{B} di un segnale $\hat{\mathbf{v}}(z, z^{-1}) = \sum_i \mathbf{v}(i)z^{-i}$ può essere allora espressa dalla condizione $\sum_{i=\ell}^L H_i \mathbf{v}(t+i) = 0$, per ogni $t \in \mathbb{Z}$, per la cui verifica è sufficiente considerare tutte le restrizioni di \mathbf{v} a intervalli di lunghezza N . Ne consegue che \mathbf{v} sta in \mathcal{B} se e solo se $\mathbf{v}|_{[t, t+N]} \in \mathcal{B}|_{[t, t+N]}$ per ogni $t \in \mathbb{Z}$, e quindi \mathcal{B} è N -completo.

(iii) \Rightarrow (i) Ovvio. ■

6.4 Proprietà delle rappresentazioni ad immagine

I behavior descrivibili come immagini di matrici polinomiali corrispondono ai modelli a media mobile ed hanno proprietà per molti aspetti “speculari” rispetto a quelle dei behavior rappresentabili a nucleo. Questo fatto apparirà evidente dal confronto fra i risultati di questo paragrafo e quelli del paragrafo 6.2 e sarà oggetto di approfondimento nel paragrafo dedicato alla dualità.

Proposizione 6.4.1 [IMMAGINE COINCIDENTE CON \mathcal{F}_∞^q] Sia $G(z, z^{-1})$ una matrice in $\mathbb{F}[z, z^{-1}]^{q \times m}$. Sono fatti equivalenti:

- (i) $G(z, z^{-1})$ ha rango q ;
- (ii) $\text{Im}_\infty G$ coincide con \mathcal{F}_∞^q ;
- (iii) l'applicazione $G : \mathcal{F}_\infty^m \rightarrow \mathcal{F}_\infty^q : \hat{\mathbf{u}}(z, z^{-1}) \mapsto G(z, z^{-1})\hat{\mathbf{u}}(z, z^{-1})$ è suriettiva.

DIMOSTRAZIONE (i) \Leftrightarrow (ii) Supponiamo che $G(z, z^{-1})$ abbia rango q e indichiamo con $\Gamma(z, z^{-1})$ la sua forma di Smith. Si ha allora

$$\begin{aligned} G(z, z^{-1}) &= U(z, z^{-1})\Gamma(z, z^{-1})V(z, z^{-1}) \\ &= U(z, z^{-1})\text{diag}\{\gamma_1(z, z^{-1}), \gamma_2(z, z^{-1}), \dots, \gamma_q(z, z^{-1})\}_{q \times m}V(z, z^{-1}). \end{aligned}$$

Per ogni $\hat{\mathbf{w}}(z, z^{-1}) \in \mathcal{F}_\infty^q$ l'equazione

$$\text{diag}\{\gamma_1(z, z^{-1}), \gamma_2(z, z^{-1}), \dots, \gamma_q(z, z^{-1})\}_{q \times q} \hat{\mathbf{x}}(z, z^{-1}) = U^{-1}(z, z^{-1})\hat{\mathbf{w}}(z, z^{-1}), \quad (6.16)$$

nell'incognita $\hat{\mathbf{x}}(z, z^{-1})$, ha soluzione in \mathcal{F}_∞^q , dal momento che (6.16) si riduce a un sistema di q equazioni scalari del tipo $c_i(z, z^{-1}) = \gamma_i(z, z^{-1})\hat{x}_i(z, z^{-1})$, $\gamma_i(z, z^{-1}) \neq 0$, che è sempre risolvibile. Ma allora il vettore

$$\hat{\mathbf{u}}(z, z^{-1}) := V^{-1}(z, z^{-1}) \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}(z, z^{-1}) \\ 0 \end{bmatrix}$$

soddisfa l'equazione $G(z, z^{-1})\hat{\mathbf{u}}(z, z^{-1}) = \hat{\mathbf{w}}(z, z^{-1})$.

Viceversa, se $G(z, z^{-1})$ non ha rango q , nella forma di Smith la q -esima riga di Γ è nulla, e si verifica facilmente che il vettore $\hat{\mathbf{w}}(z, z^{-1}) := U(z, z^{-1})\mathbf{e}_q$ non appartiene all'immagine di $G(z, z^{-1})$.

(ii) \Leftrightarrow (iii) Ovvvia. ■

Proposizione 6.4.2 [MATRICI CON LA MEDESIMA IMMAGINE] *Sia $G(z, z^{-1})$ un'arbitraria matrice in $\mathbb{F}[z, z^{-1}]^{q \times m}$ e sia r il suo rango. Allora*

(i) *per ogni matrice $M(z, z^{-1}) \in \mathbb{F}[z, z^{-1}]^{m \times n}$ a rango di riga pieno m*

$$\text{Im}_\infty G = \text{Im}_\infty(GM);$$

(ii) *esiste una matrice $\bar{G}(z, z^{-1}) \in \mathbb{F}[z, z^{-1}]^{q \times r}$ prima a destra tale che*

$$\text{Im}_\infty G = \text{Im}_\infty \bar{G}.$$

DIMOSTRAZIONE (i) Per la Proposizione precedente, al variare di $\hat{\mathbf{u}}(z, z^{-1})$ in \mathcal{F}_∞^n il vettore $M(z, z^{-1})\hat{\mathbf{u}}(z, z^{-1})$ descrive tutto \mathcal{F}_∞^m e quindi le immagini di $G(z, z^{-1})$ e $G(z, z^{-1})M(z, z^{-1})$ coincidono.

(ii) Sia $G(z, z^{-1}) = \bar{G}(z, z^{-1})T(z, z^{-1})$ una fattorizzazione in $\mathbb{F}[z, z^{-1}]$ di $G(z, z^{-1})$, con $\bar{G}(z, z^{-1})$ prima a destra e $T(z, z^{-1})$ a rango di riga pieno r . Dal punto i) segue

$$\text{Im}_\infty G = \text{Im}_\infty(\bar{G}T) = \text{Im}_\infty \bar{G}. \quad \blacksquare$$

Proposizione 6.4.3 [INCLUSIONE FRA BEHAVIOR A IMMAGINE] *Se $G_1(z, z^{-1})$ e $G_2(z, z^{-1})$ sono matrici polinomiali di Laurent, di dimensioni rispettivamente $q \times m_1$ e $q \times m_2$, allora $\text{Im}_\infty G_1 \subseteq \text{Im}_\infty G_2$ se e solo se esiste una matrice razionale $Q(z, z^{-1}) \in \mathbb{F}(z)^{m_2 \times m_1}$ tale che*

$$G_1(z, z^{-1}) = G_2(z, z^{-1})Q(z, z^{-1}). \quad (6.17)$$

DIMOSTRAZIONE Supponiamo che valga la (6.17) e $N(z, z^{-1})D^{-1}(z, z^{-1})$ sia una RMF destra di $Q(z, z^{-1})$. Allora $G_1(z, z^{-1})D(z, z^{-1}) = G_2(z, z^{-1})N(z, z^{-1})$ e quindi

$$\text{Im}_\infty G_1 = \text{Im}_\infty(G_1D) = \text{Im}_\infty(G_2N) \subseteq \text{Im}_\infty G_2.$$

Viceversa, se $\text{Im}_\infty G_1 \subseteq \text{Im}_\infty G_2$, ricorrendo alla forma di Smith di $G_2(z, z^{-1})$

$$G_2(z, z^{-1}) = U(z, z^{-1}) \left[\begin{array}{c|c} \tilde{\Gamma}_2(z, z^{-1}) & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] V(z, z^{-1}),$$

si ha

$$\text{Im}_\infty G_1 \subseteq \text{Im}_\infty (U \left[\begin{array}{c|c} \tilde{\Gamma}_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] V) = \text{Im}_\infty (U \left[\begin{array}{c|c} \tilde{\Gamma}_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right])$$

e quindi

$$\text{Im}_\infty (U^{-1} G_1) \subseteq \text{Im}_\infty \left(\left[\begin{array}{c|c} \tilde{\Gamma}_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] V \right) = \text{Im}_\infty \left[\begin{array}{c|c} \tilde{\Gamma}_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right]$$

Ciò implica che le ultime $q-r$ righe di $U^{-1} G_1$ siano nulle e valga quindi l'identità

$$U^{-1}(z, z^{-1}) G_1(z, z^{-1}) = \left[\begin{array}{c|c} \tilde{\Gamma}_2(z, z^{-1}) & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} \tilde{\Gamma}_2(z, z^{-1})^{-1} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] U^{-1}(z, z^{-1}) G_1(z, z^{-1}).$$

Ma allora si ha

$$\begin{aligned} G_1(z, z^{-1}) &= \left\{ U(z, z^{-1}) \left[\begin{array}{c|c} \tilde{\Gamma}_2(z, z^{-1}) & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] V(z, z^{-1}) \right\} \times \\ &\times \left\{ V^{-1}(z, z^{-1}) \left[\begin{array}{c|c} \tilde{\Gamma}_2(z, z^{-1})^{-1} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] U^{-1}(z, z^{-1}) G_1(z, z^{-1}) \right\} \end{aligned}$$

e la (6.17) vale con

$$Q(z, z^{-1}) = V^{-1}(z, z^{-1}) \left[\begin{array}{c|c} \tilde{\Gamma}_2(z, z^{-1})^{-1} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] U^{-1}(z, z^{-1}) G_1(z, z^{-1}).$$

■

- **ESERCIZIO 6.4.1 [MATRICI CON LA MEDESIMA IMMAGINE]** Siano $G_1(z, z^{-1})$ e $G_2(z, z^{-1})$ matrici polinomiali di Laurent, di dimensioni rispettivamente $q \times m_1$ e $q \times m_2$. Si dimostri che

(i) $\text{Im}_\infty G_1 = \text{Im}_\infty G_2$ se e solo se esistono matrici $Q_1(z, z^{-1})$ e $Q_2(z, z^{-1})$ ad elementi in $\mathbb{F}(z)$ e di opportune dimensioni, tali che

$$G_2(z, z^{-1}) = G_1(z, z^{-1}) Q_1(z, z^{-1}) \quad \text{e} \quad G_1(z, z^{-1}) = G_2(z, z^{-1}) Q_2(z, z^{-1}).$$

Ciò equivale ad affermare che gli spazi vettoriali su $\mathbb{F}(z)$ generati dalle colonne di $G_1(z, z^{-1})$ e $G_2(z, z^{-1})$ coincidono. Di conseguenza, i sottospazi distinti di \mathcal{F}_∞^q rappresentabili a immagine sono in corrispondenza biettiva con gli $\mathbb{F}(z)$ -sottospazi distinti di $\mathbb{F}(z)^q$.

(ii) Se $G_1(z, z^{-1})$ e $G_2(z, z^{-1})$ sono entrambe prime a destra, allora $\text{Im}_\infty G_1 = \text{Im}_\infty G_2$ se e solo se $m_1 = m_2$ ed esiste una matrice unimodulare $U(z, z^{-1})$ tale che $G_2(z, z^{-1}) = G_1(z, z^{-1}) U(z, z^{-1})$.

Nel paragrafo precedente abbiamo identificato la classe dei behavior completi con quella dei behavior descritti come nucleo di una matrice polinomiale, e quindi generabili mediante modelli autoregressivi. È naturale domandarsi se anche i behavior descrivibili da modelli MA e, più in generale da modelli *autoregressivi a media mobile* (ARMA), siano dotati della proprietà di completezza. La risposta è affermativa e segue dal fatto che i behavior generati da modelli ARMA (di cui i modelli MA sono un caso particolare) sono descrivibili come nuclei di matrici polinomiali. La classe dei behavior descritti da modelli ARMA coincide pertanto con quella dei behavior descritti da modelli AR, e quindi completi. Essa contiene tutti i behavior descrivibili come immagine di una matrice polinomiale e, come vedremo nel paragrafo seguente, l'inclusione è propria.

Proposizione 6.4.4 [COMPLETEZZA DEI BEHAVIOR DESCRITTI DA MODELLI ARMA] *Siano $Q(z, z^{-1})$ ed $M(z, z^{-1})$ matrici polinomiali di Laurent di dimensioni $p \times q$ e $p \times m$. L'insieme \mathcal{B} delle serie $\hat{\mathbf{w}}(z, z^{-1}) \in \mathcal{F}_\infty^q$ che soddisfano l'equazione*

$$Q(z, z^{-1})\hat{\mathbf{w}}(z, z^{-1}) = M(z, z^{-1})\hat{\mathbf{u}}(z, z^{-1}), \quad (6.18)$$

per qualche $\hat{\mathbf{u}}(z, z^{-1}) \in \mathcal{F}_\infty^m$, è un behavior completo.

DIMOSTRAZIONE Siano $U(z, z^{-1})$ e $V(z, z^{-1})$ matrici unimodulari che riducono $M(z, z^{-1})$ in forma di Smith

$$\begin{aligned} \Gamma(z, z^{-1}) &= U(z, z^{-1})M(z, z^{-1})V(z, z^{-1}) \\ &= \text{diag}\{\gamma_1(z, z^{-1}), \gamma_2(z, z^{-1}), \dots, \gamma_r(z, z^{-1})\}_{p \times m} \\ &= \left[\begin{array}{c|c} \tilde{\Gamma}(z, z^{-1}) & 0 \\ \hline 0 & 0_{(p-r) \times (m-r)} \end{array} \right]. \end{aligned}$$

L'equazione (6.18) può essere riscritta nella forma

$$U(z, z^{-1})Q(z, z^{-1})\hat{\mathbf{w}}(z, z^{-1}) = U(z, z^{-1})M(z, z^{-1})\hat{\mathbf{u}}(z, z^{-1}) = \Gamma(z, z^{-1})V^{-1}(z, z^{-1})\hat{\mathbf{u}}(z, z^{-1}),$$

e poichè la matrice unimodulare $V^{-1}(z, z^{-1})$ è un operatore biiettivo da \mathcal{F}_∞^m in \mathcal{F}_∞^m , $\hat{\mathbf{w}}(z, z^{-1})$ soddisfa la (6.18) per qualche $\hat{\mathbf{u}}(z, z^{-1})$ se e solo se soddisfa

$$U(z, z^{-1})Q(z, z^{-1})\hat{\mathbf{w}}(z, z^{-1}) = \Gamma(z, z^{-1})\hat{\mathbf{v}}(z, z^{-1}), \quad (6.19)$$

per qualche $\hat{\mathbf{v}}(z, z^{-1}) \in \mathcal{F}_\infty^m$. Al variare di $\hat{\mathbf{v}}(z, z^{-1})$ in \mathcal{F}_∞^m , $\Gamma(z, z^{-1})\hat{\mathbf{v}}(z, z^{-1})$ descrive tutti e soli i vettori di \mathcal{F}_∞^m aventi le ultime $p - r$ componenti nulle. Partizionando allora $U(z, z^{-1})Q(z, z^{-1})$ nella forma

$$U(z, z^{-1})Q(z, z^{-1}) := \left[\begin{array}{c} K(z, z^{-1}) \\ \hline H(z, z^{-1}) \end{array} \right] \left. \begin{array}{l} \} r \\ \} p - r \end{array} \right\},$$

i vettori $\hat{\mathbf{w}}(z, z^{-1})$ che risolvono (6.19) per qualche $\hat{\mathbf{v}}(z, z^{-1})$ sono tutti e soli quelli che si trovano in $\ker_{\infty} H$. Pertanto \mathcal{B} , essendo esprimibile come nucleo della matrice $H(z, z^{-1})$, è completo. ■

- **Esercizio 6.4.6** Sia $Q(z, z^{-1})\hat{\mathbf{w}}(z, z^{-1}) = M(z, z^{-1})\hat{\mathbf{u}}(z, z^{-1})$, un modello ARMA con $M(z, z^{-1})$ matrice prima a destra. Si dimostri che il behavior corrispondente contiene la sola traiettoria nulla se e solo se la matrice

$$[Q(z, z^{-1}) \mid M(z, z^{-1})]$$

è prima a destra.

6.5 Behavior autonomi e behavior controllabili

Una situazione che si presenta di frequente è quella in cui i dati, ovvero i campioni di una traiettoria \mathbf{w} di behavior, sono noti soltanto fino ad un certo istante t , e ci si domanda in che misura la porzione di traiettoria disponibile influenzi la sua evoluzione futura in $[t, +\infty)$. Sotto questo punto di vista un behavior può manifestare due comportamenti diametralmente opposti, a seconda che $\mathbf{w}|_{(-\infty, t)}$ determini in modo univoco la restante porzione di traiettoria, oppure ne influenzi solo un tratto iniziale finito, senza condizionare in alcun modo l'evoluzione successiva. Behavior dotati della prima o della seconda di queste proprietà estremali verranno chiamati rispettivamente *autonomi* e *controllabili*, ed ogni altro behavior ha, come vedremo, caratteristiche in un certo modo intermedie fra le due.

Definizione 6.5.1 [BEHAVIOR AUTONOMI E BEHAVIOR CONTROLLABILI] Un behavior $\mathcal{B} \subseteq (\mathbb{F}^q)^{\mathbb{Z}}$ lineare e tempo invariante è

- *autonomo* se per ogni coppia di traiettorie \mathbf{w}_1 e \mathbf{w}_2 in \mathcal{B} ,

$$\mathbf{w}_1|_{(-\infty, 0)} = \mathbf{w}_2|_{(-\infty, 0)} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_2. \quad (6.20)$$

- *controllabile* se per ogni coppia di traiettorie \mathbf{w}_1 e \mathbf{w}_2 di \mathcal{B} esiste un intero $\vartheta \geq 0$ ed una sequenza $\mathbf{v} \in (\mathbb{F}^q)^{\mathbb{Z}}$ tali che

$$\mathbf{w}_1 \underset{0}{\circ} \underset{\vartheta}{\mathbf{v}} \underset{0}{\circ} \mathbf{w}_2 \in \mathcal{B}. \quad (6.21)$$

La nozione di controllabilità qui introdotta è talvolta indicata in letteratura con il nome di “controllabilità esterna”, per distinguerla dalla controllabilità (interna) dei modelli di stato. L'impiego della medesima nomenclatura è dovuto al fatto che, nella definizione di entrambi i concetti, si richiede di poter “pilotare”

il sistema da una porzione (passata) ad un'altra (futura) di traiettoria. Nel caso dei behavior, la traiettoria è descrittiva del sistema nel suo complesso, nel secondo essa fa riferimento alle sole variabili di stato. Nel seguito, quando non vi sia luogo ad ambiguità, parleremo sempre di behavior "controllabili", omettendo l'espressione "esternamente".

La Figura 6.2 illustra l'operazione di concatenazione che sta alla base della definizione di controllabilità.

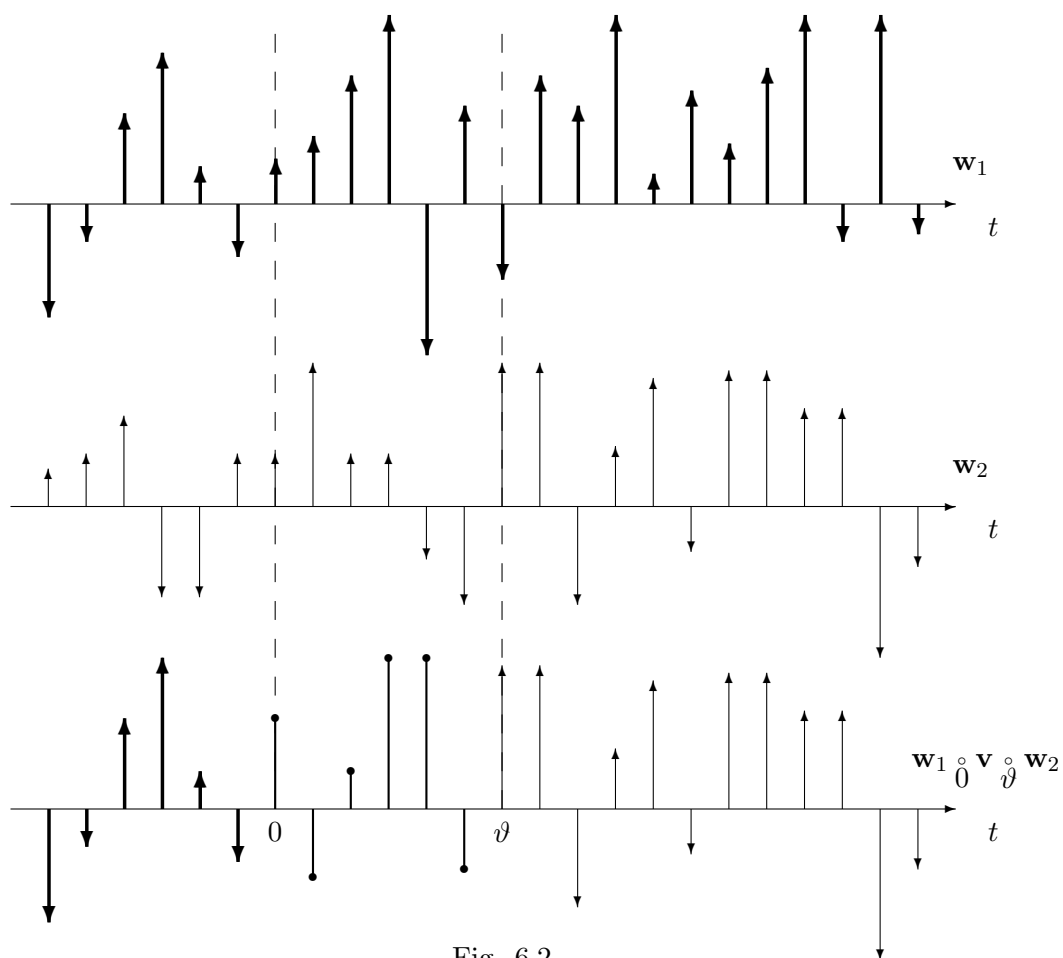


Fig. 6.2

In assenza di altre ipotesi, né la nozione di autonomia né quella di controllabilità sono sufficienti a garantire la completezza, come illustrato nei seguenti esempi.

Esempio 6.5.1 (i) [BEHAVIOR LINEARE, INVARIANTE, AUTONOMO, MA NON COMPLETO]

Sia $W = \mathbb{F}$. L'insieme dei segnali periodici di periodo arbitrario ed a componenti in \mathbb{F} è un behavior \mathcal{B} lineare e tempo invariante. Esso è autonomo, dal momento che la conoscenza di una traiettoria \mathbf{w} su $(-\infty, 0)$ permette di desumere sia il periodo p di \mathbf{w} sia i valori assunti da \mathbf{w} sulla finestra $[-p, 0)$, e quindi di conoscere \mathbf{w} sull'intero asse dei tempi.

\mathcal{B} non è completo. Infatti per ogni intervallo \mathcal{I} di lunghezza N lo spazio delle restrizioni $\mathcal{B}|_{\mathcal{I}}$ coincide con $(\mathbb{F})^{\mathcal{I}}$ e quindi ogni sequenza $\mathbf{v} \in \mathbb{F}^{\mathbb{Z}}$, anche non periodica, soddisfa $\mathbf{v}|_{\mathcal{I}} \in \mathcal{B}|_{\mathcal{I}}$ per ogni intervallo \mathcal{I} finito.

(ii) [BEHAVIOR LINEARE, INVARIANTE, CONTROLLABILE, MA NON COMPLETO] Siano $W = GF(2)$ e \mathcal{B} l'insieme delle sequenze binarie a supporto compatto e somma zero. È evidente che \mathcal{B} è controllabile, dal momento che dati \mathbf{w}_1 e \mathbf{w}_2 in \mathcal{B} , il segnale $\mathbf{w}_1 \underset{0}{\circ} \mathbf{v} \underset{1}{\circ} \mathbf{w}_2$ è una traiettoria di \mathcal{B} , a condizione di scegliere opportunamente $\mathbf{v}(0)$ in $GF(2)$. Tuttavia, come si è detto all'inizio del paragrafo 6.3, \mathcal{B} non è completo.

- ESERCIZIO 6.5.1 (i) Si dimostri che l'insieme delle sequenze a supporto compatto e valori in \mathbb{F}^q ovvero, in notazione seriale, $\mathbb{F}[z, z^{-1}]^q$, è un behavior controllabile ma non completo.

(ii) data una matrice $G(z, z^{-1}) \in \mathbb{F}[z, z^{-1}]^{q \times m}$, si indichi con $\text{Im}_{\pm} G$ l'insieme dei vettori polinomiali di Laurent dato da

$$\{\hat{\mathbf{w}}(z, z^{-1}) : \hat{\mathbf{w}}(z, z^{-1}) = G(z, z^{-1})\hat{\mathbf{u}}(z, z^{-1}), \hat{\mathbf{u}}(z, z^{-1}) \in \mathbb{F}[z, z^{-1}]^m\}.$$

Si verifichi che $\text{Im}_{\pm} G$ è un behavior lineare, tempo invariante e controllabile, ma, per $G(z, z^{-1}) \neq 0$, non completo.

(Suggerimento: per provare la controllabilità si ponga $\hat{\mathbf{w}}_i(z, z^{-1}) = G(z, z^{-1})\hat{\mathbf{u}}_i(z, z^{-1})$, $i = 1, 2$, e si ricavi da \mathbf{u}_1 e \mathbf{u}_2 un segnale \mathbf{u} , che riproduce \mathbf{w}_1 in $(-\infty, 0)$ e \mathbf{w}_2 a partire da un certo istante $\vartheta > 0$).

Restringendoci ora alla classe dei behavior completi, e descrivibili pertanto come nucleo di una matrice, vogliamo mostrare come l'autonomia e la controllabilità di un behavior $\mathcal{B} = \ker_{\infty} H(z, z^{-1})$ corrispondano a particolari proprietà strutturali di $H(z, z^{-1})$ e a condizioni sull'insieme dei segnali a supporto compatto contenuti in \mathcal{B} .

Per ogni \mathcal{B} in $\mathbf{B}(\mathbb{F}^q)$ tale insieme viene chiamato *parte finita* di \mathcal{B} e denotato come

$$\mathcal{B}^{\text{fin}} := \{\mathbf{w} \in \mathcal{B} : \hat{\mathbf{w}}(z, z^{-1}) \in \mathbb{F}[z, z^{-1}]^q\}. \quad (6.22)$$

La seguente proposizione fornisce alcune formulazioni equivalenti della proprietà di autonomia; esse fanno riferimento sia al supporto delle traiettorie, che deve estendersi indefinitamente nel passato e nel futuro (escludendo, in tal modo, la presenza di segnali con un "inizio" od una "fine"), sia all'insieme di vincoli sui segnali ammissibili, che determinano uno spazio di traiettorie di dimensione finita e quindi "piccolo". Come verrà chiarito nel corso della dimostrazione, in un behavior autonomo ogni traiettoria viene univocamente individuata non solo dai valori che essa assume nell'intervallo $(-\infty, 0)$, ma anche dai valori assunti su un intervallo finito purchè sufficientemente lungo.

Proposizione 6.5.2 [BEHAVIOR COMPLETI AUTONOMI] *Sia $\mathcal{B} = \ker_{\infty} H$, con $H(z, z^{-1}) \in \mathbb{F}[z, z^{-1}]^{p \times q}$, un behavior in $\mathbf{B}(\mathbb{F}^q)$. Sono fatti equivalenti*

- (i) \mathcal{B} è autonomo;
- (ii) $\mathcal{B}^{\text{fin}} = \{\mathbf{0}\}$;
- (iii) $H(z, z^{-1})$ ha rango q ;
- (iv) \mathcal{B} è un \mathbb{F} -sottospazio vettoriale di \mathcal{F}_{∞}^q di dimensione finita;
- (v) *gli elementi non nulli di \mathcal{B} hanno tutti supporto che si estende all'infinito in entrambe le direzioni dell'asse \mathbb{Z} .*

DIMOSTRAZIONE (i) \Rightarrow (ii) Se per assurdo \mathcal{B}^{fin} contenesse una traiettoria diversa dalla traiettoria nulla, allora, in particolare, conterrebbe una traiettoria non nulla \mathbf{w} il cui supporto è interamente contenuto in $[0, +\infty)$. Ma in tal caso esisterebbero due traiettorie distinte, $\mathbf{0}$ e \mathbf{w} , coincidenti su $(-\infty, 0)$, e \mathcal{B} non sarebbe autonomo.

(ii) \Rightarrow (iii) Se $H(z, z^{-1})$ avesse rango minore di q , esisterebbe un vettore polinomiale $\hat{\mathbf{w}}(z, z^{-1}) \neq \mathbf{0}$ appartenente al nucleo di $H(z, z^{-1})$, e quindi $\hat{\mathbf{w}}(z, z^{-1}) \in \mathcal{B}^{\text{fin}}$.

(iii) \Rightarrow (iv) Detta $\Gamma(z, z^{-1}) = \text{diag}\{\gamma_1(z, z^{-1}), \gamma_2(z, z^{-1}), \dots, \gamma_q(z, z^{-1})\}_{p \times q}$ la forma di Smith di $H(z, z^{-1})$ su $\mathbb{F}[z, z^{-1}]$, consideriamo la fattorizzazione

$$H(z, z^{-1}) = U(z, z^{-1})\Gamma(z, z^{-1})V(z, z^{-1}),$$

con $U(z, z^{-1})$ e $V(z, z^{-1})$ matrici unimodulari di opportune dimensioni.

Consideriamo dapprima la struttura di $\ker_{\infty} \Gamma$. Le serie $\hat{\mathbf{x}}(z, z^{-1})$ in $\ker_{\infty} \Gamma$ sono tutte e sole quelle le cui componenti $\hat{x}_i(z, z^{-1})$ soddisfano

$$\gamma_i(z, z^{-1})\hat{x}_i(z, z^{-1}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, q.$$

Ogni componente $\hat{x}_i(z, z^{-1})$ è una serie bilatera, determinata in modo unico una volta che vengano fissati i valori di $\delta(\gamma_i)$ coefficienti consecutivi, e pertanto varia in uno spazio vettoriale di dimensione finita. $\ker_{\infty} \Gamma$, in quanto somma diretta di spazi vettoriali di dimensione finita, ha dimensione finita. Allora ha dimensione finita

$$\ker_{\infty} H = \ker_{\infty}(U\Gamma V) = \ker_{\infty}(\Gamma V) = \{\hat{\mathbf{w}} = V^{-1}\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{x}} \in \ker_{\infty} \Gamma\}.$$

Infatti la mappa $V^{-1} : \ker_{\infty} \Gamma \rightarrow \ker_{\infty} H : \hat{\mathbf{x}} \mapsto V^{-1}\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{w}}$ è un isomorfismo fra i due spazi vettoriali $\ker_{\infty} \Gamma$ e $\ker_{\infty} H$.

(iv) \Rightarrow (v) Se \mathcal{B} comprendesse una traiettoria \mathbf{w} non nulla e con supporto compatto in uno dei due versi dell'asse \mathbb{Z} , ad esempio a sinistra, allora le traiettorie $\mathbf{w}, \sigma\mathbf{w}, \sigma^2\mathbf{w}, \sigma^3\mathbf{w}, \dots$, costituirebbero un sottoinsieme linearmente indipendente di traiettorie di \mathcal{B} e \mathcal{B} avrebbe dimensione infinita.

(v) \Rightarrow (i) Se per assurdo \mathcal{B} non fosse autonomo, esisterebbero in \mathcal{B} due traiettorie distinte, \mathbf{w}_1 e \mathbf{w}_2 , per le quali $\mathbf{w}_1|_{(-\infty,0)} = \mathbf{w}_2|_{(-\infty,0)}$. Allora $\mathbf{w} := \mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2$ sarebbe una traiettoria di \mathcal{B} non nulla con supporto compatto a sinistra e, per il ragionamento svolto nel punto precedente, \mathcal{B} avrebbe dimensione infinita. ■

• ESERCIZIO 6.5.2 [DIMENSIONE E STRUTTURA DI UN BEHAVIOR COMPLETO E AUTONOMO]

Sia $\mathcal{B} = \ker_\infty H$ un behavior autonomo in $\mathbf{B}(\mathbb{F}^q)$. Si dimostri che

(i) la dimensione di \mathcal{B} coincide con il grado $\delta(\cdot)$ del MCD dei minori di ordine q di $H(z, z^{-1})$;

(ii) \mathcal{B} può sempre essere espresso come nucleo di una matrice quadrata non singolare.

I behavior controllabili e completi costituiscono un sottoinsieme proprio dei behavior completi, dal momento che sono rappresentabili come nucleo di matrici polinomiali dotate di particolari proprietà di fattorizzabilità. Essi ammettono inoltre una descrizione ad immagine e possono quindi essere pensati come l'insieme delle “uscite” di un sistema a memoria finita, sollecitato da “ingressi” arbitrari (con supporto comunque esteso). In accordo con questa interpretazione, il valore assunto dalla traiettoria ad un certo istante t è determinato dai valori del corrispondente ingresso in un insieme finito di istanti nell'intorno di t . Come vedremo (cfr. Esercizio 6.5.3), tale proprietà permette di “controllare a zero” ogni porzione finita di traiettoria, interpretandola come restrizione di una traiettoria a supporto finito, e di ricostruire l'intero behavior a partire dalle sue traiettorie finite.

Proposizione 6.5.3 [BEHAVIOR COMPLETI E CONTROLLABILI] Sia $\mathcal{B} = \ker_\infty H$, con $H(z, z^{-1})$ in $\mathbb{F}[z, z^{-1}]^{p \times q}$, un behavior di $\mathbf{B}(\mathbb{F}^q)$. Sono equivalenti i seguenti fatti:

(i) \mathcal{B} è controllabile;

(ii) $H(z, z^{-1})$ fattorizza nella forma

$$H(z, z^{-1}) = \bar{M}(z, z^{-1})\bar{H}(z, z^{-1}), \quad (6.23)$$

con $\bar{M}(z, z^{-1})$ e $\bar{H}(z, z^{-1})$ matrici polinomiali di Laurent, rispettivamente prima a destra e prima a sinistra;

- (iii) \mathcal{B} è descrivibile come nucleo di una matrice prima a sinistra;
- (iv) \mathcal{B} può essere rappresentato nella forma $\mathcal{B} = \text{Im}_\infty G$, con $G(z, z^{-1})$ matrice polinomiale di Laurent, che non è restrittivo supporre prima a destra.

DIMOSTRAZIONE (i) \Rightarrow (ii) Sia $\mathcal{B} = \ker_\infty H$ un behavior controllabile, e supponiamo che $H(z, z^{-1})$ abbia rango r . In base alla Proposizione 3.3.8, $H(z, z^{-1})$ può essere riscritta nella forma

$$H(z, z^{-1}) = \bar{M}(z, z^{-1})D(z, z^{-1})\bar{H}(z, z^{-1}), \quad (6.24)$$

con $\bar{M}(z, z^{-1})$ e $\bar{H}(z, z^{-1})$ matrici polinomiali prime, rispettivamente a destra e a sinistra, e $D(z, z^{-1})$ polinomiale quadrata non singolare.

Per concludere sarà sufficiente provare, sfruttando l'ipotesi di controllabilità, che $D(z, z^{-1})$ è unimodulare. Supponiamo per assurdo che non lo sia. Per la Proposizione 6.2.1, allora, il nucleo di $D(z, z^{-1})$ contiene una serie non nulla $\hat{\mathbf{u}}_1(z, z^{-1})$ e, dal momento che $\ker_\infty D(z, z^{-1})$ è un behavior autonomo, tale serie ha supporto che si estende all'infinito in entrambe le direzioni dell'asse \mathbb{Z} . Detta $\bar{H}^{-1}(z, z^{-1})$ un'inversa polinomiale destra di $\bar{H}(z, z^{-1})$, la serie formale

$$\hat{\mathbf{w}}_1(z, z^{-1}) := \bar{H}^{-1}(z, z^{-1})\hat{\mathbf{u}}_1(z, z^{-1})$$

appartiene a \mathcal{B} ma non a $\ker_\infty \bar{H}$.

Per l'ipotesi di controllabilità esistono un intero $\vartheta \geq 0$ ed una sequenza $\mathbf{v} \in (\mathbb{F}^q)^\mathbb{Z}$ tali che la sequenza a supporto compatto a destra $\mathbf{w} := \mathbf{w}_1 \circlearrowleft \mathbf{v} \circlearrowright \mathbf{0}$ appartiene a \mathcal{B} , ovvero soddisfa

$$H(z, z^{-1})\hat{\mathbf{w}}(z, z^{-1}) = \mathbf{0}$$

e quindi

$$D(z, z^{-1})\bar{H}(z, z^{-1})\hat{\mathbf{w}}(z, z^{-1}) = \mathbf{0}.$$

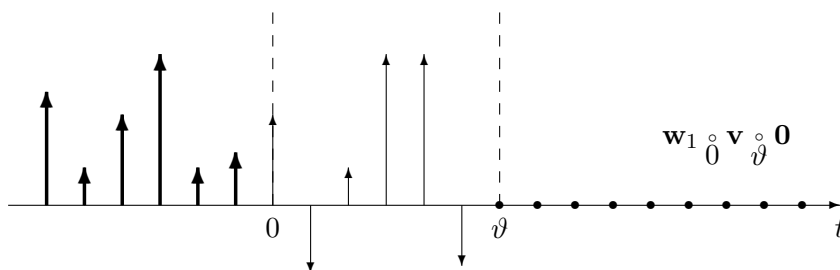


Fig. 6.3

Se $\bar{H}(z, z^{-1})\hat{\mathbf{w}}(z, z^{-1})$ non fosse nulla, avrebbe comunque supporto compatto a destra e non potrebbe trovarsi nel nucleo di $D(z, z^{-1})$, che contiene, oltre alla sequenza nulla, solo sequenze a supporto infinito in entrambe le direzioni. Se d'altra parte risulta $\bar{H}(z, z^{-1})\hat{\mathbf{w}}(z, z^{-1}) = \mathbf{0}$, per $\tau < 0$ sufficientemente lontano dall'origine si ha

$$\mathbf{0}|_{(-\infty, \tau]} = (\bar{H}(z, z^{-1})\hat{\mathbf{w}}(z, z^{-1}))|_{(-\infty, \tau]} = (\bar{H}(z, z^{-1})\hat{\mathbf{w}}_1(z, z^{-1}))|_{(-\infty, \tau]} = \hat{\mathbf{u}}_1|_{(-\infty, \tau]}.$$

Ma $\hat{\mathbf{u}}_1|_{(-\infty, \tau]}$ non può essere nullo, dal momento che il supporto di \mathbf{u}_1 si estende illimitatamente sul semiasse negativo. Pertanto $D(z, z^{-1})$ deve essere unimodulare.

(ii) \Rightarrow (iii) Supponiamo che \mathcal{B} sia il nucleo di una matrice $H(z, z^{-1})$ che fattorizza come in (6.23). Poichè $\bar{M}(z, z^{-1})$ è prima a destra, al suo nucleo appartiene soltanto la sequenza nulla, e quindi \mathcal{B} coincide con $\ker \bar{H}$, dove $\bar{H}(z, z^{-1})$ è matrice prima a sinistra.

(iii) \Rightarrow (iv) Supponiamo sia $\mathcal{B} = \ker_{\infty} \bar{H}$, con $\bar{H}(z, z^{-1}) \in \mathbb{F}[z, z^{-1}]^{r \times q}$ prima a sinistra. Indichiamo con $C_H(z, z^{-1})$ un completamento di $\bar{H}(z, z^{-1})$ ad una matrice unimodulare $q \times q$

$$U(z, z^{-1}) := \begin{bmatrix} \bar{H}(z, z^{-1}) \\ C_H(z, z^{-1}) \end{bmatrix},$$

e partizioniamo l'inversa di $U(z)$ nella forma

$$U^{-1}(z, z^{-1}) = [C_G(z, z^{-1}) \quad | \quad G(z, z^{-1})].$$

Vogliamo dimostrare che $\ker_{\infty} \bar{H} = \text{Im}_{\infty} G$, dove $G(z, z^{-1})$ è prima a destra. Se $\hat{\mathbf{w}}(z, z^{-1}) \in \ker_{\infty} \bar{H}$, consideriamo la serie

$$\hat{\mathbf{u}}(z, z^{-1}) := C_H(z, z^{-1})\hat{\mathbf{w}}(z, z^{-1})$$

a componenti in \mathcal{F}_{∞} . Dalla relazione $C_G \bar{H} + G C_H = I$ segue

$$\begin{aligned} G(z, z^{-1})\hat{\mathbf{u}}(z, z^{-1}) &= G(z, z^{-1})C_H(z, z^{-1})\hat{\mathbf{w}}(z, z^{-1}) \\ &= (I - C_G(z, z^{-1})\bar{H}(z, z^{-1}))\hat{\mathbf{w}}(z, z^{-1}) = \hat{\mathbf{w}}(z, z^{-1}) \end{aligned}$$

e quindi $\hat{\mathbf{w}}(z, z^{-1}) \in \text{Im}_{\infty} G$.

Viceversa, se $\hat{\mathbf{w}}(z, z^{-1})$ è in $\text{Im}_{\infty} G$, si ha

$$\begin{aligned} \bar{H}(z, z^{-1})\hat{\mathbf{w}}(z, z^{-1}) &= \bar{H}(z, z^{-1})[G(z, z^{-1})\hat{\mathbf{u}}(z, z^{-1})] \\ &= [\bar{H}(z, z^{-1})G(z, z^{-1})]\hat{\mathbf{u}}(z, z^{-1}) = \mathbf{0} \end{aligned}$$

e $\hat{\mathbf{w}}(z, z^{-1})$ è in $\ker_{\infty} \bar{H}$.

(iv) \Rightarrow (i) Se \mathbf{w}_1 e \mathbf{w}_2 sono traiettorie del behavior, esistono opportune sequenze bilatere \mathbf{u}_1 e \mathbf{u}_2 tali che

$$\hat{\mathbf{w}}_i(z, z^{-1}) = G(z, z^{-1})\hat{\mathbf{u}}_i(z, z^{-1}), \quad i = 1, 2.$$

Se $G(z, z^{-1}) = G_{\ell}z^{\ell} + G_{\ell+1}z^{\ell+1} + \dots + G_Lz^L$, con G_{ℓ} e G_L diverse da zero, e poniamo

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 \underset{L}{\circ} \mathbf{u}_2,$$

è facile verificare che la traiettoria di \mathcal{B} rappresentata dalla serie $\hat{\mathbf{w}}(z, z^{-1}) = \sum_t \mathbf{w}(t)z^{-t} := G(z, z^{-1})\hat{\mathbf{u}}(z, z^{-1}) = \sum_t \sum_{\nu=\ell}^L G_{\nu}\mathbf{u}(t+\nu)z^{-t}$ ha le seguenti proprietà:

$$\mathbf{w}|_{(-\infty, 0)} = \mathbf{w}_1|_{(-\infty, 0)}, \quad \mathbf{w}|_{[L-\ell, +\infty)} = \mathbf{w}_2|_{[L-\ell, +\infty)}.$$

Quindi \mathbf{w} è una traiettoria di \mathcal{B} che coincide con \mathbf{w}_1 per tempi negativi e con \mathbf{w}_2 per $t \geq L - \ell$. Ciò prova la controllabilità di \mathcal{B} . \blacksquare

- ESERCIZIO 6.5.3 [CONTROLLABILITÀ A ZERO] Un behavior lineare e invariante \mathcal{B} è controllabile se e solo se è *controllabile a zero*, ovvero per ogni $\mathbf{w} \in \mathcal{B}$ esiste un intero $\omega \geq 0$ ed una traiettoria $\mathbf{w}' \in \mathcal{B}$ tali che $\mathbf{w}'|_{(-\infty, 0)} = \mathbf{w}|_{(-\infty, 0)}$ e il supporto di \mathbf{w}' sia contenuto in $(-\infty, \omega)$
(Suggerimento: se \mathcal{B} è controllabile a zero e \mathbf{w}_1 e \mathbf{w}_2 sono in \mathcal{B} , esistono in \mathcal{B} due traiettorie \mathbf{w}'_1 e \mathbf{w}'_2 con supporto compatto a destra e soddisfacenti

$$\mathbf{w}_1|_{(-\infty, 0)} = \mathbf{w}'_1|_{(-\infty, 0)}, \quad \mathbf{w}_2|_{(-\infty, 0)} = \mathbf{w}'_2|_{(-\infty, 0)}.$$

Allora $\mathbf{w} := \mathbf{w}'_1 + (\mathbf{w}_2 - \mathbf{w}'_2)$ è in \mathcal{B} e soddisfa sia $\mathbf{w}|_{(-\infty, 0)} = \mathbf{w}_1|_{(-\infty, 0)}$, sia $\mathbf{w}|_{(\tau, \infty)} = \mathbf{w}_2|_{(\tau, \infty)}$ per τ abbastanza grande.)

- ESERCIZIO 6.5.4 Si dimostrino le seguenti proprietà dei behavior controllabili appartenenti a $\mathbf{B}(\mathbb{F}^q)$.

(i) [SIMULTANEA AUTONOMIA E CONTROLLABILITÀ DEI BEHAVIOR COMPLETI] L'unico behavior simultaneamente autonomo e controllabile è il behavior nullo.

Suggerimento: Sia $\mathcal{B} \neq \{\mathbf{0}\}$ completo. Se è un behavior autonomo, esso ha dimensione finita su \mathbb{F} , se è controllabile, esso contiene una traiettoria \mathbf{w} non nulla a supporto compatto, quindi contiene $\sigma^i \mathbf{w}, \forall i \in \mathbb{Z}$, quindi ha dimensione infinita su \mathbb{F} .

In alternativa: se \mathcal{B} è controllabile si ha $\mathcal{B} = \ker_{\infty} \bar{H}$, con \bar{H} prima a sinistra, tuttavia, se \mathcal{B} è autonomo, \bar{H} a rango di colonna pieno q . Quindi \bar{H} è una matrice unimodulare e $\ker_{\infty} \bar{H} = \{\mathbf{0}\}$

(ii) [CONTROLLABILITÀ UNIFORME DEI BEHAVIOR COMPLETI] \mathcal{B} è controllabile se e solo se esiste un intero $\vartheta \geq 0$ tale che, per ogni coppia di traiettorie \mathbf{w}_1 e \mathbf{w}_2 di \mathcal{B} , esiste una sequenza $\mathbf{v} \in (\mathbb{F}^q)^{\mathbb{Z}}$ per cui risulta $\mathbf{w}_1 \underset{0}{\circ} \mathbf{v} \underset{\vartheta}{\circ} \mathbf{w}_2 \in \mathcal{B}$. In altre parole, sotto l'ipotesi di completezza, la lunghezza dell'intervallo "di raccordo" tra \mathbf{w}_1 e \mathbf{w}_2 può essere fissata a priori, indipendentemente dalla specifica coppia di traiettorie.

Analogamente, si provi che (sotto l'ipotesi di completezza) la definizione di controllabilità a zero può essere riformulata in modo equivalente con riferimento ad un unico valore di ω , indipendente da \mathbf{w} .

(iii) \mathcal{B} è controllabile se e solo se esiste un intero $\Omega \geq 0$ tale che, per ogni insieme \mathcal{I} di \mathbb{Z} e per ogni traiettoria $\mathbf{w} \in \mathcal{B}$, esiste una traiettoria \mathbf{w}' in \mathcal{B} che soddisfa $\mathbf{w}'|_{\mathcal{I}} = \mathbf{w}|_{\mathcal{I}}$ e il cui supporto non contiene punti che distano da \mathcal{I} più di Ω . In altre parole, ogni "porzione" di traiettoria può essere estesa ad un'intera traiettoria a spese di un piccolo incremento del supporto (cfr.fig. 6.5). In particolare, ogni "porzione" finita di traiettoria è completabile ad una traiettoria finita (Suggerimento: se $\mathcal{B} = \text{Im}G$ e $\hat{\mathbf{w}} = G\hat{\mathbf{u}}$, si restringa \mathbf{u} a un opportuno sovrainsieme \mathcal{I}' di \mathcal{I} e si consideri $\hat{\mathbf{w}}' := G(\hat{\mathbf{u}}|_{\mathcal{I}'})$).

- ESERCIZIO 6.5.5* Si verifichi che sotto l'ipotesi di completezza, per un behavior \mathcal{B} appartenente a $\mathbf{B}(\mathbb{F}^q)$ le seguenti proprietà sono equivalenti:

P1) controllabilità (cfr. Definizione 6.5.1);

P2) per ogni coppia di traiettorie \mathbf{w}_1 e \mathbf{w}_2 di \mathcal{B} esistono un intero $\vartheta \geq 0$ ed una sequenza $\mathbf{v} \in (\mathbb{F}^q)^{\mathbb{Z}}$ tali che $\mathbf{w}_1 \underset{-\vartheta}{\circ} \mathbf{v} \underset{0}{\circ} \mathbf{w}_2 \in \mathcal{B}$;

P3) per ogni coppia di traiettorie \mathbf{w}_1 e \mathbf{w}_2 di \mathcal{B} esistono un intero $\vartheta \geq 0$ ed una sequenza $\mathbf{v} \in (\mathbb{F}^q)^{\mathbb{Z}}$ tali che $\mathbf{w}_1 \underset{0}{\circ} \mathbf{v} \underset{\vartheta}{\circ} \sigma^{\vartheta} \mathbf{w}_2 \in \mathcal{B}$;

P4) per ogni coppia di traiettorie \mathbf{w}_1 e \mathbf{w}_2 di \mathcal{B} esistono un intero $\vartheta \geq 0$ ed una sequenza $\mathbf{v} \in (\mathbb{F}^q)^{\mathbb{Z}}$ tali che $\sigma^{-\vartheta} \mathbf{w}_1 \underset{-\vartheta}{\circ} \mathbf{v} \underset{0}{\circ} \mathbf{w}_2 \in \mathcal{B}$.

Si dimostri, mediante esempi, che per behavior lineari e invarianti ma non completi le precedenti proprietà non sono equivalenti.

- ESERCIZIO 6.5.6* ["PATOLOGIE" DEI BEHAVIOR NON COMPLETI] L'ipotesi di completezza è essenziale per dimostrare le proprietà considerate nell'esercizio precedente. Per verificarlo si ponga $\hat{\mathbf{s}}(z, z^{-1}) := \sum_{i=0}^{\infty} z^{2^i}$, e si consideri il behavior lineare e invariante per traslazione

$$\mathcal{B} := \{\hat{\mathbf{w}}(z, z^{-1}) = p(z, z^{-1})\hat{\mathbf{s}}(z, z^{-1}) : p(z, z^{-1}) \in \mathbb{F}[z, z^{-1}]\}.$$

Si verifichi che

(i) \mathcal{B} non è completo (Suggerimento: ogni ridotta della serie $\sum_{j=0}^{+\infty} z^j$ è restrizione di una traiettoria di \mathcal{B} , tuttavia la serie non appartiene a \mathcal{B});

(ii) \mathcal{B} è sia autonomo che controllabile;

(iii) \mathcal{B} non è controllabile uniformemente, ovvero non è possibile individuare un intero positivo ϑ per il quale la proprietà di controllabilità sia verificata per ogni scelta di \mathbf{w}_1 e \mathbf{w}_2 in \mathcal{B} .

(iv) \mathcal{B} è zero-controllabile, ma non esiste un intero positivo Ω tale che per ogni \mathbf{w} in \mathcal{B} la traiettoria $\mathbf{w} \underset{0}{\circ} \mathbf{v} \underset{\Omega}{\circ} \mathbf{0}$ appartenga a \mathcal{B} per un'opportuna scelta di \mathbf{v} .

(v) Nessuna porzione finita di traiettoria di \mathcal{B} , ad eccezione della traiettoria nulla, è completabile ad una traiettoria a supporto finito.

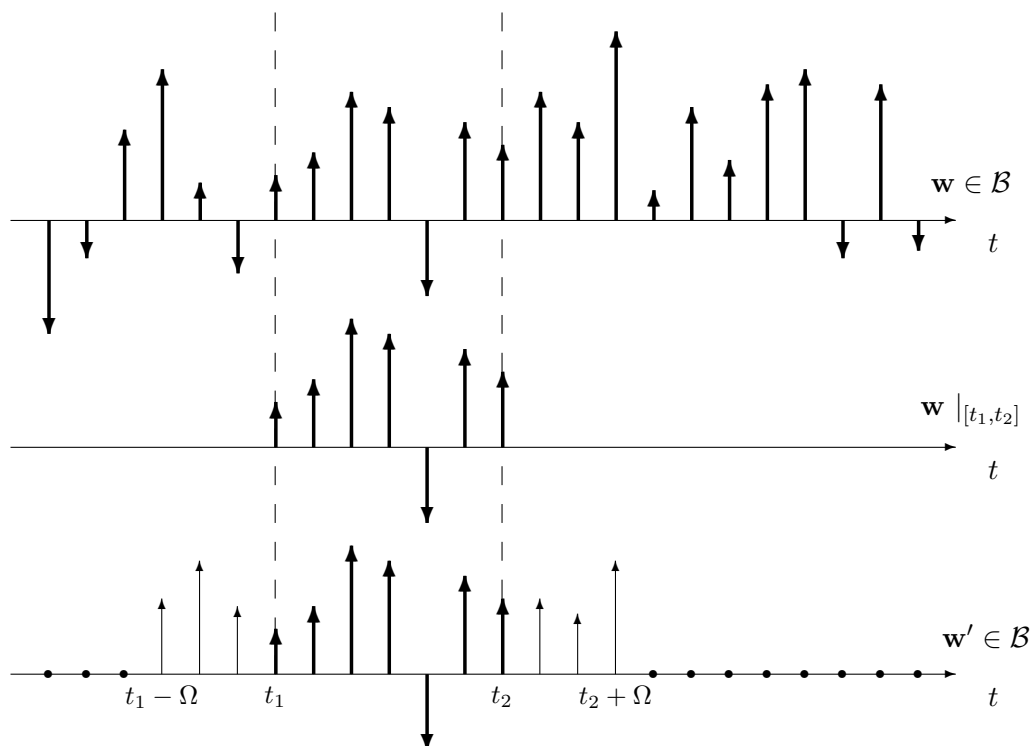


Fig. 6.5 [estendibilita' di una porzione finita di traiettoria]

beginitemize

ESERCIZIO 6.5.7 Sia $\mathcal{B} \in \mathbf{B}(\mathbb{F}^q)$ un behavior completo e controllabile, descritto (come è sempre possibile) nella forma $\mathcal{B} = \ker_{\infty} H = \text{Im}_{\infty} G$, con $H(z, z^{-1})$ e $G(z, z^{-1})$ matrici polinomiali di Laurent prime, rispettivamente, a sinistra e a destra.

(i) Si dimostri che per ogni behavior completo e controllabile $\mathcal{B}' \in \mathbf{B}(\mathbb{F}^q)$ con $\mathcal{B}' \supseteq \mathcal{B}$ si ha

$$\mathcal{B}' = \text{Im}_{\infty} G' = \text{Im}_{\infty} [G(z, z^{-1}) \mid C_G(z, z^{-1})],$$

con $G'(z, z^{-1})$ prima a destra.

(Suggerimento: sia $\mathcal{B}' = \text{Im}_{\infty} \tilde{G}$, con $\tilde{G}(z, z^{-1})$ prima a destra.

Da $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}'$ segue $G(z, z^{-1}) = \tilde{G}(z, z^{-1})P(z, z^{-1})$, con $P(z, z^{-1})$ prima a destra, altrimenti si avrebbe $P(z, z^{-1}) = \tilde{P}(z, z^{-1})\Delta(z, z^{-1})$ con $\Delta(z, z^{-1})$ quadrata non unimodulare, e $G(z, z^{-1}) = [\tilde{G}(z, z^{-1})\tilde{P}(z, z^{-1})]\Delta(z, z^{-1})$ non sarebbe prima a destra.

Se $U(z, z^{-1})$ completa $P(z, z^{-1})$ a una matrice unimodulare, basta porre

$$G' = \tilde{G}[P \ X] = \tilde{G}U = [G \mid C_G].)$$

(ii) Si dimostri che per ogni behavior controllabile $\mathcal{B}'' \in \mathbf{B}(\mathbb{F}^q)$ con $\mathcal{B}'' \subseteq \mathcal{B}$ esiste una matrice polinomiale $C_H(z, z^{-1})$, di dimensioni opportune, tale che

$$H''(z, z^{-1}) = \begin{bmatrix} H(z, z^{-1}) \\ C_H(z, z^{-1}) \end{bmatrix}$$

sia prima a sinistra e $\mathcal{B}'' = \ker_{\infty} H''$

(Suggerimento: sia $\tilde{H}(z, z^{-1})$ una matrice prima a sinistra tale che $\mathcal{B}'' = \ker_{\infty} \tilde{H}$. Si verifichi che $H(z, z^{-1}) = P(z, z^{-1})\tilde{H}(z, z^{-1})$ con $P(z, z^{-1})$ polinomiale prima a sinistra. Si proceda poi come al punto precedente).

ESERCIZIO 6.5.8 [CATENE DI BEHAVIOR COMPLETI] Sia $\mathcal{B} \in \mathbf{B}(\mathbb{F}^q)$. Se $\mathcal{B} = \text{Im}_{\infty} G$ è un behavior controllabile e r è il rango di $G(z, z^{-1})$, si dimostri che

(i) ogni catena strettamente ascendente di behavior controllabili $\mathcal{B} = \mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}_1 \subset \dots$ comprende, oltre a quello iniziale, al più $q - r$ termini;

(ii) ogni catena strettamente discendente di behavior controllabili $\mathcal{B} = \mathcal{B}_0 \supset \mathcal{B}_1 \supset \dots$ comprende, oltre a quello iniziale, al più r termini.

Se $\mathcal{B} = \ker_{\infty} H$ non è controllabile, allora

(iii) se $\mathcal{B} \neq \mathcal{F}_{\infty}^q$ esistono in $\mathbf{B}(\mathbb{F}^q)$ catene strettamente ascendenti $\mathcal{B} = \mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}_1 \subset \dots$ comprendenti infiniti termini

(Suggerimento: se $H(z, z^{-1})$ ha rango di riga pieno r e $\Delta(z, z^{-1}) \in \mathbb{F}[z, z^{-1}]^{r \times r}$ è una matrice non singolare con $\delta(\det \Delta(z, z^{-1})) \geq 1$ si ponga $\mathcal{B}_i := \ker_{\infty}(\Delta^i H)$).

(iv)* non esistono in $\mathbf{B}(\mathbb{F}^q)$ catene strettamente discendenti $\mathcal{B} = \mathcal{B}_0 \supset \mathcal{B}_1 \supset \dots$ comprendenti infiniti termini

(Suggerimento: Posto $\mathcal{B}_i = \ker_{\infty} H_i$, indichiamo con \mathcal{M}_i il sottomodulo di $\mathbb{F}[z, z^{-1}]^q$ generato dalle righe di $H_i(z, z^{-1})$. Allora $\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}_1 \subset \dots$)

Se, infine, $\mathcal{B} = \ker_{\infty} H$ non è autonomo e $\mathbf{A}(\mathcal{B}) \subset \mathbf{B}(\mathbb{F}^q)$ è l'insieme dei behavior autonomi contenuti in \mathcal{B} , allora

(v)* esiste in $\mathbf{A}(\mathcal{B})$ una catena infinita strettamente ascendente di behavior $\mathcal{B}_{a0} \subset \mathcal{B}_{a1} \subset \mathcal{B}_{a2} \subset \dots$

(Suggerimento: non è restrittivo supporre $H(z, z^{-1})$ a rango di riga pieno e minore di q . Si ponga allora $\mathcal{B}_{a0} = \ker_{\infty} \begin{bmatrix} H \\ C \end{bmatrix}$, con $\begin{bmatrix} H(z, z^{-1}) \\ C(z, z^{-1}) \end{bmatrix}$ non singolare, e $\mathcal{B}_{ai} = \ker_{\infty} \begin{bmatrix} H \\ p^i C \end{bmatrix}$, $i = 1, 2, \dots$, con $p(z, z^{-1}) \in \mathbb{F}[z, z^{-1}]$ e $\delta(p(z, z^{-1})) > 1$.)

6.6 Traiettorie a supporto finito

Come abbiamo visto, l'autonomia di un behavior completo $\mathcal{B} = \ker_{\infty} H$ dipende dalla sua parte finita, nel senso che \mathcal{B} è autonomo se e solo se l'insieme \mathcal{B}^{fin} delle traiettorie a supporto finito contiene la sola traiettoria nulla. Come vedremo, è anche possibile fornire criteri per la verifica della controllabilità basati su (un'opportuna operazione di estensione di) \mathcal{B}^{fin} .

A tale scopo, per ogni behavior lineare invariante costituito da traiettorie di durata finita

$$\mathcal{M} \subseteq \mathbb{F}[z, z^{-1}]^q$$

definiamo l'insieme di segnali $\mathcal{M}^{\infty} \subseteq \mathcal{F}_{\infty}^q$ dato da

$$\mathcal{M}^{\infty} = \left\{ \sum_{\nu \in F} \hat{s}_{\nu}(z, z^{-1}) \hat{\mathbf{w}}_{\nu}(z, z^{-1}), \hat{\mathbf{w}}_{\nu} \in \mathcal{M}, \hat{s}_{\nu}(z, z^{-1}) \in \mathcal{F}_{\infty}, |F| < \infty \right\} \quad (6.25)$$

ovvero l'insieme di tutti i segnali ottenibile “combinando” un numero finito di vettori di \mathcal{M} mediante combinatori che siano serie scalari bilatere.

Si tratta, evidentemente, di un sottospazio invariante di \mathcal{F}_∞^q . Inoltre, essendo \mathcal{M} un sottomodulo del modulo noetheriano $\mathbb{F}[z, z^{-1}]^q$, esso è dotato di un numero finito di generatori $\hat{\mathbf{g}}_1(z, z^{-1}), \dots, \hat{\mathbf{g}}_N(z, z^{-1})$, e quindi

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \left\{ \sum_{i=1}^N p_i(z, z^{-1}) \hat{\mathbf{g}}_i(z, z^{-1}), p_i(z, z^{-1}) \in \mathbb{F}[z, z^{-1}] \right\} \\ &:= \text{Im}_\pm [\hat{\mathbf{g}}_1 \quad \dots \quad \hat{\mathbf{g}}_N] = \text{Im}_\pm G(z, z^{-1}) \end{aligned} \quad (6.26)$$

Tenuto conto di (6.26), ricaviamo allora

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^\infty &= \left\{ \sum_{\nu \in F} \left(\sum_{i=1}^N p_{i\nu}(z, z^{-1}) \hat{\mathbf{g}}_i(z, z^{-1}) \right) \hat{s}_\nu(z, z^{-1}) \right\} \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^N \hat{\mathbf{g}}_i(z, z^{-1}) \hat{r}_i(z, z^{-1}) \right\} = \text{Im}_\infty G(z, z^{-1}) \end{aligned} \quad (6.27)$$

dove $\hat{s}_\nu(z, z^{-1})$ e $\hat{r}_i(z, z^{-1})$ sono serie bilatere scalari e $p_{i\nu}(z, z^{-1})$ polinomi di Laurent scalari. Concludendo, possiamo affermare che, qualunque sia il modulo $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{F}[z, z^{-1}]^q$, il behavior \mathcal{M}^∞ è controllabile ed è l'immagine della matrice le cui colonne generano il modulo \mathcal{M} .

Veniamo ora al caso particolare in cui il modulo \mathcal{M} sia la parte finita di un behavior lineare invariante \mathcal{B} . Evidentemente l'insieme di traiettorie

$$\left(\mathcal{B}^{\text{fin}} \right)^\infty = \sum_{\nu \in F} \hat{s}_\nu(z, z^{-1}) \hat{\mathbf{w}}_\nu(z, z^{-1}), \quad (6.28)$$

con F un insieme finito di indici, $\hat{\mathbf{w}}_\nu \in \mathcal{B}^{\text{fin}}$ e $\hat{s}_\nu(z, z^{-1}) \in \mathcal{F}_\infty$, risulta un behavior controllabile.

Se \mathcal{B} è completo, i.e. se $\mathcal{B} = \ker_\infty H$, allora $\left(\mathcal{B}^{\text{fin}} \right)^\infty$ è sempre contenuto in \mathcal{B} .

Infatti, se $\hat{\mathbf{w}}_\nu \in \mathcal{B}^{\text{fin}}$, allora risulta $0 = H \hat{\mathbf{w}}_\nu = H(\hat{\mathbf{w}}_\nu \hat{s}_\nu)$ per ogni serie bilatera $\hat{s}(z, z^{-1})$ e quindi (6.28) è in $\ker_\infty H$.

Tuttavia, in generale, $\left(\mathcal{B}^{\text{fin}} \right)^\infty$ è un sottospazio proprio di \mathcal{B} , ovvero esistono traiettorie in \mathcal{B} che non possono essere ottenute estendendo le sequenze di \mathcal{B}^{fin} .

Esempio 6.6.1 Si consideri il behavior completo

$$\mathcal{B} = \ker_\infty [(z-1) \mid (z-1)(z+1)] = \ker_\infty (z-1) [1 \mid z+1].$$

Se \mathbf{w} è una traiettoria finita e non nulla di \mathcal{B} , da $(z-1)[1 \mid z+1] \hat{\mathbf{w}} = 0$ segue $[1 \mid z+1] \hat{\mathbf{w}} = 0$, altrimenti esisterebbe un vettore polinomiale non nullo annullato dal polinomio $z-1$.

\mathcal{B} ha come parte finita \mathcal{B}^{fin} il sottomodulo di $\mathbb{F}[z, z^{-1}]^2$ costituito dai vettori

$$\begin{bmatrix} z+1 \\ -1 \end{bmatrix} p(z, z^{-1}), \quad p(z, z^{-1}) \in \mathbb{F}[z, z^{-1}],$$

e quindi $(\mathcal{B}^{\text{fin}})^\infty$ è costituito dagli elementi di \mathcal{F}_∞^2 del tipo

$$\begin{bmatrix} z+1 \\ -1 \end{bmatrix} \hat{s}(z, z^{-1}), \quad \hat{s}(z, z^{-1}) \in \mathcal{F}_\infty. \quad (6.29)$$

È evidente che il vettore $[1 \mid 1]^T \sum_{i=-\infty}^{+\infty} z^i$ corrisponde ad una traiettoria di \mathcal{B} che non è del tipo (6.29).

Vogliamo dimostrare che, nella classe dei behavior completi $\mathbf{B}(\mathbb{F}^q)$, i behavior controllabili sono esattamente quelli che soddisfano la condizione $\mathcal{B} = (\mathcal{B}^{\text{fin}})^\infty$.

Lemma 6.6.1 [PARTE FINITA DI UN BEHAVIOR CONTROLLABILE] *Sia $G(z, z^{-1}) \in \mathbb{F}[z, z^{-1}]^{q \times m}$ e sia*

$$G(z, z^{-1}) = \bar{G}(z, z^{-1})T(z, z^{-1})$$

una sua fattorizzazione, con $\bar{G}(z, z^{-1})$ prima a destra e $T(z, z^{-1})$ polinomiale $r \times m$ a rango pieno di riga. Allora

$$\mathcal{B} = \text{Im}_\infty G = \text{Im}_\infty \bar{G} \quad \text{e} \quad \mathcal{B}^{\text{fin}} = \text{Im}_\pm \bar{G},$$

dove

$$\text{Im}_\pm \bar{G} = \{\hat{\mathbf{w}}(z, z^{-1}) = \bar{G}(z, z^{-1})\hat{\mathbf{u}}(z, z^{-1}), \hat{\mathbf{u}}(z, z^{-1}) \in \mathbb{F}[z, z^{-1}]^r\}.$$

DIMOSTRAZIONE Poichè $\text{Im}_\infty G = \text{Im}_\infty \bar{G}$, si ha

$$\text{Im}_\pm \bar{G} \subseteq \text{Im}_\infty \bar{G} \cap \mathbb{F}[z, z^{-1}]^q = \text{Im}_\infty G \cap \mathbb{F}[z, z^{-1}]^q = \mathcal{B}^{\text{fin}}.$$

Per provare l'inclusione inversa, consideriamo un generico elemento $\hat{\mathbf{v}}(z, z^{-1})$ in \mathcal{B}^{fin} . Chiaramente

$$\hat{\mathbf{v}}(z, z^{-1}) = \bar{G}(z, z^{-1})\hat{\mathbf{u}}(z, z^{-1})$$

per qualche vettore $\hat{\mathbf{u}}(z, z^{-1})$ a componenti in \mathcal{F}_∞ . Detta $\bar{G}^{-1}(z, z^{-1}) \in \mathbb{F}[z, z^{-1}]^{r \times q}$ un'inversa polinomiale sinistra di $\bar{G}(z, z^{-1})$, si ha che $\hat{\mathbf{u}}(z, z^{-1}) = \bar{G}^{-1}(z, z^{-1})\hat{\mathbf{v}}(z, z^{-1})$ è un vettore polinomiale. Quindi $\hat{\mathbf{v}}(z, z^{-1})$ appartiene a $\text{Im}_\pm \bar{G}$. ■

Proposizione 6.6.2 [BEHAVIOR CONTROLLABILI CONTENUTI IN UN BEHAVIOR COMPLETO] *Se \mathcal{B} è un behavior completo in $\mathbf{B}(\mathbb{F}^q)$, allora*

- $(\mathcal{B}^{\text{fin}})^{\infty}$ è il più grande behavior controllabile contenuto in \mathcal{B}
- \mathcal{B} è controllabile se e solo se coincide con $(\mathcal{B}^{\text{fin}})^{\infty}$.

DIMOSTRAZIONE Per quanto detto all'inizio del paragrafo, \mathcal{B}^{fin} , in quanto sottomodulo del modulo noetheriano $\mathbb{F}[z, z^{-1}]^q$, è dotato di un numero finito di generatori $\hat{\mathbf{g}}_1(z, z^{-1}), \dots, \hat{\mathbf{g}}_N(z, z^{-1}) \in \mathbb{F}[z, z^{-1}]^q$ e, posto

$$G(z, z^{-1}) := \left[\hat{\mathbf{g}}_1(z, z^{-1}) \mid \dots \mid \hat{\mathbf{g}}_N(z, z^{-1}) \right].$$

si ha $\mathcal{B}^{\text{fin}} = \text{Im}_{\pm} G$ e $(\mathcal{B}^{\text{fin}})^{\infty} = \text{Im}_{\infty} G$. Quindi $(\mathcal{B}^{\text{fin}})^{\infty}$, essendo immagine di una matrice polinomiale, è un behavior controllabile, contenuto in \mathcal{B} perché $\mathcal{B} = \ker_{\infty} \mathcal{H}$ implica che stiano in $\ker_{\infty} H$ tutte le traiettorie di \mathcal{B}^{fin} e quindi tutte le combinazioni che danno luogo a $(\mathcal{B}^{\text{fin}})^{\infty}$.

Dimostriamo ora che $(\mathcal{B}^{\text{fin}})^{\infty}$ è massimale tra i behavior completi e controllabili contenuti in \mathcal{B} . Sia $\mathcal{B}_c = \text{Im}_{\infty} G_c$, con $G_c(z, z^{-1})$ prima a destra, un arbitrario behavior controllabile contenuto in \mathcal{B} . Per il lemma 6.6.1,

$$\mathcal{B}_c^{\text{fin}} = \text{Im}_{\pm} G_c,$$

quindi

$$(\mathcal{B}_c^{\text{fin}})^{\infty} = (\text{Im}_{\pm} G_c)^{\infty} = \text{Im}_{\infty} G_c = \mathcal{B}_c.$$

Ma allora da

$$\mathcal{B}_c^{\text{fin}} \subseteq \mathcal{B}^{\text{fin}}$$

segue

$$\mathcal{B}_c = (\mathcal{B}_c^{\text{fin}})^{\infty} \subseteq (\mathcal{B}^{\text{fin}})^{\infty},$$

che prova la massimalità di $(\mathcal{B}^{\text{fin}})^{\infty}$ fra i behavior controllabili contenuti in \mathcal{B} . L'ultima parte dell'enunciato segue immediatamente. ■

Nel seguito $(\mathcal{B}^{\text{fin}})^{\infty}$ verrà chiamato *parte controllabile del behavior* \mathcal{B} .

- ESERCIZIO 6.6.1 Si dimostri, mediante un controesempio, che l'ipotesi di completezza è necessaria per provare che $(\mathcal{B}^{\text{fin}})^{\infty}$ è contenuto in \mathcal{B} .
- ESERCIZIO 6.6.2 [MODULI POLINOMIALI E BEHAVIOR FINITI] Sia

$$\mathcal{M} = \text{Im}_{\pm} G$$

il sottomodulo di $\mathbb{F}[z, z^{-1}]^q$ generato dalle colonne della matrice $G(z, z^{-1}) \in \mathbb{F}[z, z^{-1}]^{q \times m}$ e sia

$$G(z, z^{-1}) = \bar{G}(z, z^{-1})P(z, z^{-1}) \quad (6.30)$$

una fattorizzazione in $\mathbb{F}[z, z^{-1}]$, con $\bar{G}(z, z^{-1})$ di dimensioni $q \times r$ prima a destra e $P(z, z^{-1}) \in \mathbb{F}[z, z^{-1}]^{r \times m}$ a rango pieno di riga.

Si verifichi che

$$(i) \mathcal{M}^\infty := \left\{ \sum_{\nu \in F} s_\nu(z, z^{-1}) \hat{\mathbf{w}}_\nu(z, z^{-1}) : \mathbf{w}_\nu \in \mathcal{M}, s_\nu(z, z^{-1}) \in \mathcal{F}_\infty \right\} = \text{Im}_\infty G = \text{Im}_\infty \bar{G}$$

(ii) $(\mathcal{M}^\infty)^{\text{fin}} = \text{Im}_\pm \bar{G} \supseteq \mathcal{M}$ e l'eguaglianza vale se e solo se P è prima a sinistra.

(Suggerimento: evidentemente $G(z, z^{-1}) \hat{\mathbf{u}}(z, z^{-1}) \in (\mathcal{M}^\infty)^{\text{fin}}$ per ogni vettore polinomiale $\hat{\mathbf{u}}(z, z^{-1})$ e quindi $\text{Im}_\pm G \subseteq (\mathcal{M}^\infty)^{\text{fin}}$. Ogni traiettoria polinomiale $\hat{\mathbf{w}}(z, z^{-1})$ in \mathcal{M} si ottiene come $\bar{G}(z, z^{-1}) \hat{\mathbf{u}}(z, z^{-1})$ per un opportuno vettore $\hat{\mathbf{u}}(z, z^{-1}) \in \mathcal{F}_\infty^m$. Ma \bar{G} ha un'inversa sinistra polinomiale e quindi è polinomiale $\hat{\mathbf{u}}(z, z^{-1})$, ovvero $\hat{\mathbf{w}}(z, z^{-1}) \in \text{Im}_\pm \bar{G}$.

Se P è prima a sinistra, ha un'inversa destra P^{-1} polinomiale e se $G\hat{\mathbf{u}} \in (\mathcal{M}^\infty)^{\text{fin}}$, da

$$G\hat{\mathbf{u}} \in (\mathcal{M}^\infty)^{\text{fin}} \Rightarrow \bar{G}(P\hat{\mathbf{u}}) \text{ polinomiale} \Rightarrow P\hat{\mathbf{u}} \text{ polinomiale} \Rightarrow \hat{\mathbf{h}} := P^{-1}(P\hat{\mathbf{u}}) \text{ polinomiale}$$

segue che

$$G\hat{\mathbf{u}} = \bar{G}P\hat{\mathbf{u}} = \bar{G}(PP^{-1})P\hat{\mathbf{u}} = (\bar{G}P)(P^{-1}P\hat{\mathbf{u}}) = G\hat{\mathbf{h}} \in \text{Im}_\pm G$$

Se in vece P non è prima a sinistra, esiste un vettore polinomiale $\hat{\mathbf{v}} = P\hat{\mathbf{r}}$ ottenibile come immagine di un vettore $\hat{\mathbf{r}}$ razionale, ma non come immagine di un vettore polinomiale. Allora la traiettoria

$$G\hat{\mathbf{r}} = \bar{G}P\hat{\mathbf{r}} = \bar{G}\hat{\mathbf{v}} \in (\mathcal{M}^\infty)^{\text{fin}}$$

non appartiene a $\text{Im}_\pm G$, altrimenti sarebbe ottenibile come $\bar{G}P\hat{\mathbf{p}}$ con $\hat{\mathbf{p}}$ vettore polinomiale. Poiché \bar{G} è operatore iniettivo, dovrebbe essere $P\hat{\mathbf{r}} = P\hat{\mathbf{p}}$, impossibile perché $P\hat{\mathbf{r}}$ non è immagine di un vettore polinomiale.

Il precedente esercizio mostra come non tutti i sottomoduli di $\mathbb{F}[z, z^{-1}]^q$ possano essere interpretati come l'insieme delle traiettorie a supporto finito di qualche behavior completo e come, in generale, applicando a un sottomodulo di $\mathbb{F}[z, z^{-1}]^q$ l'operazione di estensione seguita da quella di estrazione della parte finita, si ottenga un modulo più grande.

Una situazione del tutto simmetrica si presenta quando, partendo da un behavior completo, applichiamo le due operazioni in ordine opposto, come risulta dalla soluzione del seguente esercizio.

- ESERCIZIO 6.6.3 [COMPLETAMENTO DELLA PARTE FINITA DI UN BEHAVIOR] Sia

$$\mathcal{B} = \ker_\infty H$$

un behavior completo e sia

$$H(z, z^{-1}) = P(z, z^{-1})\bar{H}(z, z^{-1})$$

una fattorizzazione di $H(z, z^{-1})$ in $\mathbb{F}[z, z^{-1}]$, con $P(z, z^{-1})$ a rango di colonna pieno e $\bar{H}(z, z^{-1})$ prima a sinistra. Si dimostri che

(i) $\mathcal{B}^{\text{fin}} = \ker_\pm H = \ker_\pm \bar{H}$, dove

$$\ker_\pm H := \{ \hat{\mathbf{w}}(z, z^{-1}) \in \mathbb{F}[z, z^{-1}]^q : H(z, z^{-1})\hat{\mathbf{w}}(z, z^{-1}) = \mathbf{0} \}.$$

(ii) $(\mathcal{B}^{\text{fin}})^\infty = \ker_\infty \bar{H} \subseteq \mathcal{B}$ e $(\mathcal{B}^{\text{fin}})^\infty$ coincide con \mathcal{B} se e solo se $P(z, z^{-1})$ è prima a destra.

6.7 Somma di behavior e teorema di decomposizione

I behavior autonomi e quelli controllabili manifestano proprietà diametralmente opposte rispetto al concatenazione delle traiettorie, e sono gli elementi costitutivi per la descrizione di ogni altro tipo di behavior. Come vedremo, ogni behavior $\mathcal{B} \in \mathbf{B}(\mathbb{F}^q)$ può essere rappresentato come somma di un behavior autonomo e di un behavior controllabile, il secondo dei quali coincide con $(\mathcal{B}^{\text{fn}})^\infty$ ed è quindi univocamente determinato.

Definizione 6.7.1 [SOMMA E INTERSEZIONE DI BEHAVIOR] Siano \mathcal{B}_1 e \mathcal{B}_2 due arbitrari behavior in $(\mathbb{F}^q)^\mathbb{Z}$. Il *behavior somma* di \mathcal{B}_1 e \mathcal{B}_2 è lo spazio di traiettorie generato da $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$, ovvero

$$\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2 := \{\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 : \mathbf{w}_i \in \mathcal{B}_i, i = 1, 2\},$$

e il *behavior intersezione* di \mathcal{B}_1 e \mathcal{B}_2 è l'insieme di traiettorie $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$.

Proposizione 6.7.2 [COMPLETEZZA, CONTROLLABILITÀ E AUTONOMIA NELLA SOMMA E NELL'INTERSEZIONE DI BEHAVIOR] Siano \mathcal{B}_1 e \mathcal{B}_2 due behavior in $\mathbf{B}(\mathbb{F}^q)$. Allora

- (i) $\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2$ e $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$ sono elementi di $\mathbf{B}(\mathbb{F}^q)$;
- (ii) se \mathcal{B}_1 e \mathcal{B}_2 sono controllabili, lo è anche la loro somma;
- (iii) se \mathcal{B}_1 e \mathcal{B}_2 sono autonomi, lo sono anche la loro somma e la loro intersezione.

DIMOSTRAZIONE In virtù dell'ipotesi di completezza, possiamo assumere $\mathcal{B}_1 = \ker_\infty H_1$ e $\mathcal{B}_2 = \ker_\infty H_2$ per opportune matrici polinomiali di Laurent $H_1(z, z^{-1})$ e $H_2(z, z^{-1})$, con q colonne ciascuna.

(i) È immediato verificare che

$$\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \ker_\infty \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix}, \quad (6.31)$$

e quindi è completo.

Per quanto concerne il behavior somma, osserviamo che esso può essere descritto come la totalità delle traiettorie $\mathbf{w} \in (\mathbb{F}^q)^\mathbb{Z}$ che soddisfano il seguente modello ARMA

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_q \end{bmatrix} \hat{\mathbf{w}}(z, z^{-1}) = \begin{bmatrix} H_1(z, z^{-1}) & 0 \\ 0 & H_2(z, z^{-1}) \\ I_q & I_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_1(z, z^{-1}) \\ \hat{\mathbf{u}}_2(z, z^{-1}) \end{bmatrix},$$

e quindi è completo per la Proposizione 6.4.5.

(ii) In virtù dell'ipotesi di controllabilità esistono matrici polinomiali di Laurent $G_1(z, z^{-1})$ e $G_2(z, z^{-1})$, con q righe, per cui si ha $\mathcal{B}_1 = \text{Im}_\infty G_1$ e $\mathcal{B}_2 = \text{Im}_\infty G_2$. È allora immediato che $\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2$ è esprimibile come $\text{Im}_\infty [G_1 \mid G_2]$, e quindi è controllabile.

(iii) Per provare che $\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2$ e $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$ sono autonomi è sufficiente osservare che somma e intersezione di sottospazi vettoriali di dimensione finita hanno ancora dimensione finita, e applicare la Proposizione 6.5.2. ■

Esempio 6.7.1 [NON CONTROLLABILITÀ DELL'INTERSEZIONE] I behavior

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_1 &= \ker_\infty [z^2 + 1 \quad z - 1] \\ \mathcal{B}_2 &= \ker_\infty [z^2 - z + 2 \quad z^2 - 1]\end{aligned}$$

sono completi e controllabili, in quanto nuclei di matrici prime a sinistra, tuttavia

$$\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \ker_\infty \begin{bmatrix} z^2 + 1 & z - 1 \\ z^2 - z + 2 & z^2 - 1 \end{bmatrix}$$

è nucleo di una matrice quadrata non singolare e non unimodulare, e quindi è un behavior autonomo, ma non controllabile (cfr. Esercizio 6.5.4).

Esempio 6.7.2 Siano $\mathcal{B}_i = \ker_\infty p_i$ con $p_i(z, z^{-1}) \in \mathbb{F}[z, z^{-1}]$, $i = 1, 2$, due behavior autonomi, e sia $m(z, z^{-1}) = \text{m.c.m.}(p_1(z, z^{-1}), p_2(z, z^{-1}))$. Vogliamo dimostrare che

$$\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2 = \ker_\infty m. \quad (6.32)$$

Sia $c = \text{MCD}(p_1, p_2)$, cosicchè

$$p_i(z, z^{-1}) = c(z, z^{-1})\bar{p}_i(z, z^{-1}), \quad i = 1, 2, \quad \bar{p}_1, \bar{p}_2 \text{ coprimi}$$

e

$$m(z, z^{-1}) = c(z, z^{-1})\bar{p}_1(z, z^{-1})\bar{p}_2(z, z^{-1}) = p_1(z, z^{-1})\bar{p}_2(z, z^{-1}) = p_2(z, z^{-1})\bar{p}_1(z, z^{-1}).$$

Chiaramente, se $\hat{\mathbf{w}}$ appartiene a $\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2$, ovvero $\hat{\mathbf{w}} = \hat{\mathbf{w}}_1 + \hat{\mathbf{w}}_2$, con $\mathbf{w}_i \in \ker p_i$, $i = 1, 2$, allora

$$\begin{aligned} & m(z, z^{-1})\hat{\mathbf{w}}(z, z^{-1}) \\ &= \bar{p}_2(z, z^{-1})(p_1(z, z^{-1})\hat{\mathbf{w}}_1(z, z^{-1})) + \bar{p}_1(z, z^{-1})(p_2(z, z^{-1})\hat{\mathbf{w}}_2(z, z^{-1})) \\ &= 0, \end{aligned}$$

e quindi $\hat{\mathbf{w}}$ appartiene a $\ker_\infty m$.

Viceversa, supponiamo che $\hat{\mathbf{w}}$ appartenga a $\ker_\infty m$ e \mathbf{v} sia una sequenza di $\mathbb{F}^{\mathbb{Z}}$ tale che $\hat{\mathbf{w}}(z, z^{-1}) = m(z, z^{-1})\hat{\mathbf{v}}(z, z^{-1})$. Per la coprialità di \bar{p}_1 e \bar{p}_2 , esistono $a(z, z^{-1})$ e $b(z, z^{-1})$ in $\mathbb{F}[z, z^{-1}]$ tali che

$$1 = \bar{p}_1(z, z^{-1})a(z, z^{-1}) + \bar{p}_2(z, z^{-1})b(z, z^{-1}),$$

e quindi

$$\hat{\mathbf{v}}(z, z^{-1}) = \bar{p}_1(z, z^{-1})a(z, z^{-1})\hat{\mathbf{v}}(z, z^{-1}) + \bar{p}_2(z, z^{-1})b(z, z^{-1})\hat{\mathbf{v}}(z, z^{-1}). \quad (6.33)$$

Moltiplicando ambo i membri di (6.33) per $m(z, z^{-1})$ si ottiene

$$\hat{\mathbf{w}}(z, z^{-1}) = \bar{p}_1(z, z^{-1})a(z, z^{-1})\hat{\mathbf{w}}(z, z^{-1}) + \bar{p}_2(z, z^{-1})b(z, z^{-1})\hat{\mathbf{w}}(z, z^{-1}),$$

e si vede che

$$\bar{p}_1(z, z^{-1})a(z, z^{-1})\hat{\mathbf{w}}(z, z^{-1}) \in \mathcal{B}_2 = \ker p_1, \quad \bar{p}_2(z, z^{-1})b(z, z^{-1})\hat{\mathbf{w}}(z, z^{-1}) \in \mathcal{B}_1 = \ker p_1$$

Lemma 6.7.3 [SCOMPOSIZIONE IN PARTE CONTROLLABILE E PARTE AUTONOMA]
 Se \mathcal{B} ha due scomposizioni della forma

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_a + \mathcal{B}_{c1} = \mathcal{B}_a + \mathcal{B}_{c2},$$

con $\mathcal{B}_a \in \mathbf{B}(\mathbb{F}^q)$ autonomo e $\mathcal{B}_{c1}, \mathcal{B}_{c2} \in \mathbf{B}(\mathbb{F}^q)$ controllabili, allora $\mathcal{B}_{c1} = \mathcal{B}_{c2}$.

DIMOSTRAZIONE Per assurdo, supponiamo \mathcal{B}_{c1} diverso da \mathcal{B}_{c2} . Allora è propria una almeno delle inclusioni $\mathcal{B}_{c1} \subseteq \mathcal{B}_{c1} + \mathcal{B}_{c2}$, $\mathcal{B}_{c2} \subseteq \mathcal{B}_{c1} + \mathcal{B}_{c2}$, ad esempio la prima, e valgono le inclusioni

$$\mathcal{B}_{c1} \subset \mathcal{B}_{c1} + \mathcal{B}_{c2} \subseteq \mathcal{B}. \quad (6.34)$$

Inoltre vale la catena di eguaglianze

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_a + \mathcal{B}_{c1} = \mathcal{B}_a + (\mathcal{B}_{c1} + \mathcal{B}_{c2}). \quad (6.35)$$

Per (6.34) e per l'esercizio 6.5.7, esistono matrici polinomiali prime a destra e con C matrice non vuota

$$\bar{G}_1(z, z^{-1}), \quad \bar{G}_2(z, z^{-1}) = [\bar{G}_1(z, z^{-1}) \mid C(z, z^{-1})]$$

per cui valgono le identità

$$\mathcal{B}_{c1} = \text{Im}_\infty \bar{G}_1, \quad \mathcal{B}_{c1} + \mathcal{B}_{c2} = \text{Im}_\infty \bar{G}_2.$$

Esisterà quindi un vettore polinomiale \mathbf{p} , ortogonale alle colonne di \bar{G}_1 ma non a quelle di C , ovvero si avrà

$$\mathbf{p}^T(z, z^{-1})[\bar{G}_1(z, z^{-1}) \mid C(z, z^{-1})] = [0 \mid \mathbf{m}^T(z, z^{-1})], \quad (6.36)$$

con $\mathbf{m}^T(z, z^{-1}) \neq \mathbf{0}$ vettore riga polinomiale.

Esisterà anche (cfr. Esercizio 6.5.2) una matrice quadrata non singolare $H_a(z, z^{-1})$ tale che

$$\mathcal{B}_a = \ker_\infty H_a$$

e, in corrispondenza, un vettore razionale \mathbf{r} che soddisfa l'equazione

$$\mathbf{r}^T(z, z^{-1})H_a = \mathbf{p}^T(z, z^{-1}).$$

Moltiplicando \mathbf{r} per un multiplo comune $d(z, z^{-1})$ dei suoi denominatori si ottiene un vettore $\mathbf{v}(z, z^{-1}) \in \mathbb{F}[z, z^{-1}]^q$ tale che

$$\mathbf{v}^T H_a[\bar{G}_1 | C] = d\mathbf{r}^T H_a[\bar{G}_1 | C] = [0 | d\mathbf{m}^T], \quad (6.37)$$

con $d(z, z^{-1})\mathbf{m}^T(z, z^{-1}) \in \mathbb{F}[z, z^{-1}]$ non nullo.

In base alla decomposizione $\mathcal{B} = \mathcal{B}_a + \mathcal{B}_{c1}$, ogni traiettoria $\hat{\mathbf{w}}(z, z^{-1}) \in \mathcal{B}$ può essere espressa nella forma $\hat{\mathbf{w}}(z, z^{-1}) = \hat{\mathbf{w}}_a(z, z^{-1}) + \bar{G}_1(z, z^{-1})\hat{\mathbf{u}}_1(z, z^{-1})$ e quindi

$$\mathbf{v}^T H_a \hat{\mathbf{w}} = \mathbf{v}^T H_a \hat{\mathbf{w}}_a + \mathbf{v}^T H_a \bar{G}_1 \hat{\mathbf{u}}_1 = 0, \quad \forall \hat{\mathbf{w}} \in \mathcal{B}. \quad (6.38)$$

D'altra parte, scelto un vettore $\mathbf{u}_2(z, z^{-1})$ a componenti in $\mathbb{F}[z, z^{-1}]$ tale che

$$0 \neq d\mathbf{m}^T \mathbf{u}_2 = \mathbf{v}^T H_a(z, z^{-1})C(z, z^{-1})\mathbf{u}_2(z, z^{-1}),$$

il vettore non nullo

$$\hat{\mathbf{w}}_2(z, z^{-1}) := C(z, z^{-1})\mathbf{u}_2(z, z^{-1})$$

appartiene a $\text{Im}_\infty \bar{G}_2$, quindi a \mathcal{B}_{c2} , quindi a $\mathcal{B}_a + (\mathcal{B}_{c1} + \mathcal{B}_{c2}) = \mathcal{B}$. Tuttavia

$$\mathbf{v}^T H_a \hat{\mathbf{w}}_2 = \mathbf{v}^T H_a C \mathbf{u}_2 \neq 0,$$

che contraddice la (6.38). ■

Le caratterizzazioni fornite per i behavior autonomi e controllabili ci consentono di enunciare un teorema di struttura che mostra come un arbitrario behavior completo \mathcal{B} in $\mathbf{B}(\mathbb{F}^q)$ possa essere sempre decomposto nella somma di un behavior autonomo e di uno controllabile.

Proposizione 6.7.4 [ESISTENZA E PROPRIETÀ DELLA SCOMPOSIZIONE] *Per ogni behavior completo \mathcal{B} in $\mathbf{B}(\mathbb{F}^q)$,*

a) *esiste una coppia di behavior \mathcal{B}_a e \mathcal{B}_c in $\mathbf{B}(\mathbb{F}^q)$, il primo autonomo ed il secondo controllabile, tali che*

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_a + \mathcal{B}_c; \quad (6.39)$$

b) \mathcal{B}_c è univocamente individuato come $(\mathcal{B}^{\text{fin}})^\infty$, la parte controllabile di \mathcal{B} ;

c) La parte autonoma, \mathcal{B}_a , può essere scelta in modo tale che la somma in (6.39) sia diretta.

DIMOSTRAZIONE a) Sia $\mathcal{B} = \ker_\infty H$, con $H(z, z^{-1})$ una matrice $r \times q$ di rango r (cfr Prop 6.2.1). Allora $H(z, z^{-1})$ fattorizza nella forma

$$H(z, z^{-1}) = M(z, z^{-1})\bar{H}(z, z^{-1}),$$

con $M(z, z^{-1}) \in \mathbb{F}[z, z^{-1}]^{r \times r}$ non singolare e $\bar{H}(z, z^{-1}) \in \mathbb{F}[z, z^{-1}]^{r \times q}$ prima a sinistra. Sia inoltre $C_H(z, z^{-1})$ una matrice in $\mathbb{F}[z, z^{-1}]^{(q-r) \times q}$ che completa $\bar{H}(z, z^{-1})$ ad una matrice unimodulare

$$U(z, z^{-1}) := \begin{bmatrix} \bar{H}(z, z^{-1}) \\ C_H(z, z^{-1}) \end{bmatrix}.$$

Se poniamo

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_c &:= \ker_\infty \bar{H} \\ \mathcal{B}_a &:= U^{-1}(z, z^{-1}) \ker_\infty \begin{bmatrix} M & | & 0_{r \times (q-r)} \\ \hline 0_{(q-r) \times r} & | & I_{q-r} \end{bmatrix} = \ker_\infty \left(\begin{bmatrix} M & | & 0_{r \times (q-r)} \\ \hline 0_{(q-r) \times r} & | & I_{q-r} \end{bmatrix} U \right), \end{aligned}$$

per le Proposizioni 6.5.2 e 6.5.3, \mathcal{B}_c e \mathcal{B}_a sono entrambi completi e \mathcal{B}_c è controllabile mentre \mathcal{B}_a è autonomo.

Chiaramente $\mathcal{B}_c \subseteq \mathcal{B}$. Inoltre se $\hat{\mathbf{w}}_a(z, z^{-1}) \in \mathcal{B}_a$ allora

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & I_{q-r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{H} \\ C_H \end{bmatrix} \hat{\mathbf{w}}_a \Rightarrow M\bar{H}\hat{\mathbf{w}}_a = H\hat{\mathbf{w}}_a = \mathbf{0}$$

e dunque $\mathcal{B}_a \subseteq \mathcal{B}$. Pertanto

$$\mathcal{B}_a + \mathcal{B}_c \subseteq \mathcal{B}.$$

Viceversa, se $\hat{\mathbf{w}}$ appartiene a \mathcal{B} , si ha $M(z, z^{-1})\bar{H}(z, z^{-1})\hat{\mathbf{w}}(z, z^{-1}) = \mathbf{0}$ e il vettore r -dimensionale

$$\hat{\mathbf{v}}(z, z^{-1}) := \bar{H}(z, z^{-1})\hat{\mathbf{w}}(z, z^{-1})$$

appartiene al nucleo di $M(z, z^{-1})$. Allora il vettore q -dimensionale

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{v}}(z, z^{-1}) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \in \ker_\infty \begin{bmatrix} M & | & 0_{r \times (q-r)} \\ \hline 0_{(q-r) \times r} & | & I_{q-r} \end{bmatrix},$$

soddisfa la condizione

$$U^{-1}(z, z^{-1}) \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{v}}(z, z^{-1}) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \in \ker_\infty \begin{bmatrix} M & | & 0_{r \times (q-r)} \\ \hline 0_{(q-r) \times r} & | & I_{q-r} \end{bmatrix} U = \mathcal{B}_a.$$

La differenza

$$\hat{\mathbf{w}} - U^{-1}(z, z^{-1}) \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{v}}(z, z^{-1}) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (6.40)$$

è un elemento di \mathcal{B}_c come si vede premoltiplicando la (6.40) per $\bar{H}(z, z^{-1})$ e tenendo conto del fatto che $\bar{H}(z, z^{-1})U^{-1}(z, z^{-1}) = [I \ 0]$.

b) Sia $\mathcal{B} = \bar{\mathcal{B}}_a + \bar{\mathcal{B}}_c$ un'altra decomposizione di \mathcal{B} nella somma di un behavior autonomo e di uno controllabile. Poichè \mathcal{B}_a e $\bar{\mathcal{B}}_a$ sono entrambi contenuti in \mathcal{B} , si ha anche

$$\mathcal{B} = (\mathcal{B}_a + \bar{\mathcal{B}}_a) + \mathcal{B}_c = (\mathcal{B}_a + \bar{\mathcal{B}}_a) + \bar{\mathcal{B}}_c.$$

Il behavior $\mathcal{B}_a + \bar{\mathcal{B}}_a$ è autonomo in quanto somma di autonomi (cfr. Proposizione 6.7.2), ma allora, per il Lemma 6.7.3, \mathcal{B}_c e $\bar{\mathcal{B}}_c$ coincidono. Ne consegue l'unicità del behavior controllabile che soddisfa la (6.39).

c) Vogliamo provare che la somma dei behavior \mathcal{B}_a e \mathcal{B}_c definiti nella prova del punto a) è diretta. Ogni traiettoria $\hat{\mathbf{w}}$ in $\mathcal{B}_a \cap \mathcal{B}_c$ soddisfa sia

$$\mathbf{0} = \bar{H}(z, z^{-1})\hat{\mathbf{w}}(z, z^{-1})$$

sia

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} M(z, z^{-1}) & | & 0_{r \times (q-r)} \\ 0_{(q-r) \times r} & | & I_{q-r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{H}(z, z^{-1}) \\ C_H(z, z^{-1}) \end{bmatrix} \hat{\mathbf{w}}(z, z^{-1}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ C_H(z, z^{-1})\hat{\mathbf{w}}(z, z^{-1}) \end{bmatrix}.$$

Da ciò segue

$$U(z, z^{-1})\hat{\mathbf{w}}(z, z^{-1}) = \begin{bmatrix} \bar{H}(z, z^{-1}) \\ C_H(z, z^{-1}) \end{bmatrix} \hat{\mathbf{w}}(z, z^{-1}) = \mathbf{0},$$

e, per l'unimodularità di $U(z, z^{-1})$, $\hat{\mathbf{w}}$ è la sequenza nulla. ■

- ESERCIZIO 6.7.1 [BEHAVIOR AUTONOMI CONTENUTI NELLA PARTE CONTROLLABILE] Sia $\mathcal{B} = \mathcal{B}_a + \mathcal{B}_c$ una decomposizione di $\mathcal{B} \in \mathbf{B}(\mathbb{F}^q)$ come somma diretta di un behavior autonomo e di uno controllabile, con $\mathcal{B}_c \neq \{0\}$. Si verifichi che

- (i) esistono behavior autonomi non banali contenuti in \mathcal{B}_c ;
- (ii) se \mathcal{B}'_a è uno di tali behavior, allora

$$\mathcal{B} = (\mathcal{B}_a + \mathcal{B}'_a) + \mathcal{B}_c$$

è ancora una decomposizione di \mathcal{B} nella somma (non diretta) di una parte autonoma ed una parte controllabile.

- ESERCIZIO 6.7.2 Siano \mathcal{B}_1 e \mathcal{B}_2 due behavior in $\mathbf{B}(\mathbb{F}^q)$. Si dimostri che

- (i) se \mathcal{B}_2 è autonomo allora $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$ è autonomo;
- (ii) $(\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2)^{\text{fin}} = \mathcal{B}_1^{\text{fin}} \cap \mathcal{B}_2^{\text{fin}}$;
- (iii) in generale $(\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2)^{\text{fin}} \neq \mathcal{B}_1^{\text{fin}} + \mathcal{B}_2^{\text{fin}}$;
- (iv) se \mathcal{B}_1 è controllabile e \mathcal{B}_2 autonomo allora

$$(\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2)^{\text{fin}} = \mathcal{B}_1^{\text{fin}} + \mathcal{B}_2^{\text{fin}} = \mathcal{B}_1^{\text{fin}}.$$

(Suggerimento: si dimostri che \mathcal{B}_1 è la parte controllabile di $\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2$, e si sfrutti la precedente proposizione.)

6.8 Dualità

Riferimenti bibliografici

La teoria dei behavior è essenzialmente dovuta a J.C.Willems. Per il contenuto di questo capitolo, per approfondimenti ed estensioni si rinvia ai seguenti lavori:

1. J.C.Willems, “ From time series to linear systems, part I: finite dimensional linear time invariant systems”, *Automatica*, 22 (1986), pp.561-580
2. J.C.Willems, “ Models for Dynamics”, in *Dynamics Reported*, vol.2, U.Kirchgraber and H.O.Walther eds., J.Wiley & Sons Ltd. and B.G.Teubner, 1989, pp. 171-269
3. J.C.Willems, “ Paradigms and puzzles in the theory of dynamical systems”, *IEEE Trans. Aut.Contr.*, 36 (1991), pp. 259-294

oltre che alla recente monografia

4. J.W.Polderman, J.C.Willems , “Introduction to Mathematical Systems Theory - A Behavioral Approach” Springer, 1998