ORDINI DI GRANDEZZA - NOTAZIONI ASINTOTICHE

- $O(g(n)) = \{ f(n) \mid \exists \overset{>0}{\varepsilon}, \overset{>0}{n_\varepsilon} \text{ t.c. } 0 \le f(n) \le \varepsilon g(n) \ \forall n \ge n_\varepsilon \}$

  In altre parole "$f(n) \in O(g(n))$" sse $\exists \varepsilon > 0, n_\varepsilon > 0$ tali che $0 \le f(n) \le \varepsilon g(n) \ \forall n \ge n_\varepsilon$

  Si trova scritto anche "$f(n) = O(g(n))$" anche se non è corretto

- $f(n) \in \Omega(g(n))$ sse $\exists \varepsilon > 0, n_\varepsilon > 0$ t.c. $0 \le \varepsilon g(n) \le f(n) \ \forall n \ge n_\varepsilon$

- $f(n) \in \Theta(g(n))$ sse $\exists \varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0, n_\varepsilon > 0$ t.c. $0 \le \varepsilon_1 g(n) \le f(n) \le \varepsilon_2 g(n) \ \forall n \ge n_\varepsilon$

- ~~$f(n) \in o(g(n))$ sse $\exists \varepsilon > 0, n_\varepsilon > 0$ t.c. $0 \le f(n) < \varepsilon g(n) \ \forall n$~~

NOTA BENE

- $f(n) \in o(g(n))$ sse $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon > 0$ t.c. $0 \le f(n) < \varepsilon g(n) \ \forall n \ge n_\varepsilon$

  Proprietà: $\lim_{n \to +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$ sse $f(n) \in o(g(n))$

  In altre parole: $f(n)$ è infinitesima rispetto a $g(n)$.

- $f(n) \in \omega(g(n))$ sse $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon > 0$ t.c. $0 \le \varepsilon g(n) < f(n) \ \forall n \ge n_\varepsilon$

  Proprietà: $\lim_{n \to +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = +\infty$ sse $f(n) \in \omega(g(n))$

  In altre parole: $f(n)$ è un infinito di ordine superiore rispetto a $g(n)$.

ORDINE DI GRANDEZZA DEI POLINOMI

Dimostriamo che, $\forall k$, $a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \ldots + a_1 n + a_0 = \boxed{\sum_{i=0}^{k} a_i n^i \in O(n^k)}$

La dimostrazione procede per induzione su k sfruttando il fatto che, essendo k finito, esiste c tale che $a_i \le c \ \forall i \le k$. Più precisamente, dimostriamo che le costanti ε e n_ε nella definizione di notazione $O(\cdot)$ in questo caso sono

$$n_\varepsilon = \lceil c+1 \rceil \qquad \varepsilon = c+1$$

Quindi dimostriamo che $\forall n \ge \lceil c+1 \rceil$ si ha $\sum_{i=0}^{k} a_i n^i \le (c+1) n^k$.

CASO BASE $(k=0)$: $\sum_{i=0}^{0} a_i n^i = a_0 n^0 = a_0 \leq c < c+1 = (c+1)n^0 \quad \forall n$ OK

INDUZIONE Supposta la proprietà vera per $k-1$, si ha

$$\sum_{i=0}^{k} a_i n^i = a_k n^k + \sum_{i=0}^{k-1} a_i n^i \overset{\text{IP. IND.}}{\leq} a_k n^k + (c+1)n^{k-1} = \left(a_k + \frac{c+1}{n}\right) n^k \leq$$

$$\leq \left(c + \frac{c+1}{n}\right) n^k \leq \{\text{per } n \geq \lceil c+1 \rceil\} \leq (c+1)n^k \quad \text{OK}$$

Sempre per induzione si può dimostrare che $\sum^{k} a_i n^i = \Omega(n^k)$ e quindi che $\sum^{k} a_i n^i = \Theta(n^k)$.

Dimostriamo che $\boxed{n^k \in o(a^n) \text{ per } a>1 \text{ e } k \geq 1}$ ("qualsiasi esponenziale BATTE qualsiasi polinomio")

$$(\star) \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0 \implies \text{segue la tesi}$$

Analogamente:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n^k} = +\infty \implies a^n \in \omega(n^k)$$

Dimostriamo che $\boxed{\log^h m = o(n^k) \text{ per } h,k>0}$ ("qualsiasi polinomio BATTE qualsiasi logaritmo")

PENSATELO LOGARITMO IN BASE 2

Sostituendo n con $\log m$ e a con 2^α nel limite $(\star)$, otteniamo

$$0 = \lim_{m\to+\infty} \frac{(\log m)^k}{2^{\alpha \log m}} = \lim_{m\to+\infty} \frac{(\log m)^k}{(2^{\log m})^\alpha} = \lim_{m\to+\infty} \frac{(\log m)^k}{m^\alpha}$$

Da cui, con un cambio di lettere, segue la tesi.

Domanda: cambia qualcosa se cambia la base del logaritmo? Dimostreremo che la risposta è no, ma per farlo ricordiamo prima le seguenti

PROPRIETÀ DEI LOGARITMI

1) $\log(n \cdot m) = \log n + \log m$; $\log(n/m) = \log n - \log m \implies \log(n^k) = k \log n$
2) $a^{\log_b n} = n^{\log_b a}$
3) $\log_a n = \log_b n / \log_b a$ ←
4) $\log_a b = 1/\log_b a$ (è una conseguenza della 3)

Ora, dalla proprietà 3) discende che, se a e b sono costanti

$$\log_a n = \underbrace{\frac{1}{\log_b a}}_{\text{COSTANTE}} \cdot \log_b n$$

quindi

- $\log_a n = o(n^k)$ per ogni a costante (la proprietà dimostrata prima è quindi vera indipendentemente dalla base del logaritmo)
- $\log_a n = \Theta(\log_b n)$
- quando si usa la notazione asintotica non è necessario specificare la base del logaritmo... Anzi, non si deve specificarla

---

ORDINE TRAMITE I LOGARITMI

Già che stiamo parlando di logaritmi, osserviamo che a volte è più facile studiare l'ordine di grandezza di una funzione osservando l'andamento del suo logaritmo. Esempio:

$$f(n) = (\log n)^{\frac{\log n}{\log \log n}}$$

Osserviamo l'andamento del logaritmo di $f(n)$:

$$\log f(n) = \log\left[(\log n)^{\frac{\log n}{\log\log n}}\right] = \frac{\log n}{\cancel{\log\log n}} \cdot \cancel{\log\log n} = \log n$$

quindi
$$\log f(n) = \log n \iff$$
$$2^{\log f(n)} = 2^{\log n} \iff$$
$$f(n) = n$$

Per esercizio: semplificare $n^{1/\log n}$

SOMMATORIE NOTEVOLI

- $$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n = \Theta(n^2)$$ (SERIE ARITMETICA)

- $$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n = \Theta(n^3)$$

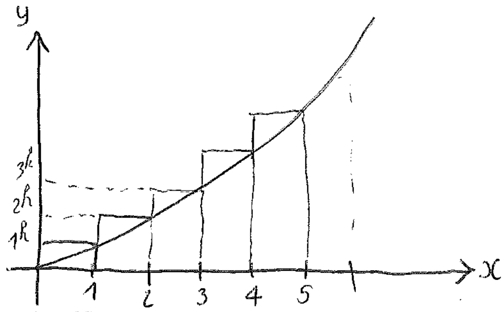
- In generale cosa si può dire di $\sum_{i=1}^{n} i^k$? Ebbene, dimostreremo ora che tale sommatoria è $\Theta(n^{k+1})$.

a) $\sum_{i=1}^{n} i^k = O(n^{k+1})$: infatti

$$\sum_{i=1}^{n} i^k \leq \sum_{i=1}^{n} n^k = n \cdot n^k = n^{k+1} = O(n^{k+1})$$

b) $\sum_{i=1}^{n} i^k = \Omega(n^{k+1})$: infatti

$$\sum_{i=1}^{n} i^k \geqslant \int_{0}^{n} i^k = \left[\frac{1}{k+1} i^{k+1}\right]_0^n = \frac{n^{k+1}}{k+1}$$



LIMITAZIONE DELLA SOMMATORIA TRAMITE UN INTEGRALE

e scegliendo $\varepsilon = \frac{1}{k+1}$, $n_\varepsilon = 1$ si dimostra subito che tale quantità è $\Omega(n^{k+1})$

- $$\sum_{i=0}^{n} a^i = \begin{cases} n+1 & \text{per } a=1 \\ \dfrac{1-a^{n+1}}{1-a} & \text{per } a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} \end{cases}$$ (SERIE GEOMETRICA)

Quando la sommatoria della serie geometrica è infinita e $0<a<1$, si ha

$$\sum_{i=0}^{+\infty} a^i = \lim_{n \to +\infty} \frac{1-a^{n+1}}{1-a} = \frac{1}{1-a}$$

Esercizio: calcolare $\sum_{i=1}^{n} a^i$ ← NOTA BENE

~~Determiniamo ora l'ordine di grandezza della serie geometrica~~

L'ordine di grandezza della sommatoria è

$$\sum_{i=0}^{n} a^i = \begin{cases} O(1) & \text{per } 0<a<1 \\ \Theta(n) & \text{per } a=1 \\ \Theta(a^n) & \text{per } a>1 \end{cases}$$

- $$\sum_{i=1}^{n} i a^i = \begin{cases} \dfrac{n(n+1)}{2} & \text{per } a = 1 \\ ? & \text{per } a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} \end{cases}$$

La sommatoria si può risolvere (per $a \neq 1$) conoscendo la serie geometrica e usando le derivate:

$$\sum_{i=1}^{n} i a^i = a \sum_{i=1}^{n} i a^{i-1} = a \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{da} a^i = a \frac{d}{da} \sum_{i=1}^{n} a^i =$$

$$= a \frac{d}{da} \frac{1-a^{n+1}}{1-a} =$$

ricordiamo che

$$\frac{d}{da} \frac{f(a)}{g(a)} = \frac{f'(a)g(a) - g'(a)f(a)}{g^2(a)}$$

$$= a \frac{-(n+1)a^n(1-a) - (-1)\cdot(1-a^{n+1})}{(1-a)^2} =$$

$$= a \frac{-na^n + na^{n+1} - a^n \cancel{+a^{n+1}} + 1 \cancel{-a^{n+1}}}{(1-a)^2} =$$

$$= a \frac{1-(n+1)a^n + na^{n+1}}{(1-a)^2}$$

Da cui si deduce anche

$$\sum_{i=1}^{+\infty} i a^i = \frac{a}{(1-a)^2}$$

NOTA BENE

• $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = ?$

La sommatoria può essere limitata (e quindi il suo ordine di grandezza determinato) utilizzando, ancora una volta, gli integrali:

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{x}\,dx \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \leq 1 + \int_1^{n} \frac{1}{x}\,dx$$

$$\left[\ln x\right]_1^{n+1} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \leq 1 + \left[\ln x\right]_1^{n}$$

$$\ln(n+1) \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \leq 1 + \ln n$$