Esercizi su ricorrenze

I seguenti esercizi sono proposti (prevalentemente) senza soluzioni.

Exercise 1.1 Risolvere, verificando la correttezza della soluzione trovata, la seguente equazione di ricorrenza valida *per ogni* $n \geq 0$:

$$T(n) = T(n-2) + 4n, \; n \geq 2, \quad T(1) = 4 \;\; , \;\; T(0) = 1$$

Exercise 1.2 Si consideri la seguente equazione di ricorrenza quando il parametro n è della forma 2^{2^i}, con $i \geq 0$:

$$T(n) = \frac{\sqrt{n}}{2} T\left(\sqrt{n}\right), \; n > 2, \quad T(2) = 2.$$

(a) Risolvere la ricorrenza, determinando la formula esatta per $T(n)$.

(b) Verificare la soluzione ottenuta utilizzando l'induzione.

Exercise 1.3 Si consideri la seguente equazione di ricorrenza quando il parametro n è della forma 2^{2^i}, con $i \geq 0$:

$$T(n) = T\left(\sqrt{n}\right) + (\log_2 n)^2, \; n > 2, \quad T(2) = 0.$$

(a) Risolvere la ricorrenza, determinando la formula esatta per $T(n)$.

(b) Verificare la soluzione ottenuta utilizzando l'induzione.

Exercise 1.4 Si risolva la seguente equazione di ricorrenza per valori del parametro $n = 3^{3^i}$:

$$T(n) = \begin{cases} T\left(\sqrt[3]{n}\right) + 2\log_3 \log_3 n, & n > 3, \\ 0 & n = 3. \end{cases}$$

Exercise 1.5 Si consideri la seguente equazione di ricorrenza per valori di n che siano potenze di due:

$$T(n) = \begin{cases} T(n/2) + T(n/4) + 2T(n/8) + n, & n \geq 8, \\ 4 & n < 8. \end{cases}$$

Si determini una costante $c > 0$ tale che $\forall n, T(n) \geq cn\log_2 n$.

Exercise 1.6 Si consideri la seguente relazione di ricorrenza definita per valori arbitrari positivi del parametro n:

$$T(n) = \begin{cases} 3, & n \leq 6, \\ T\left(\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor\right) + T\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1\right) + n, & n > 6. \end{cases}$$

Si dimostri che $T(n) = O(n)$.

Exercise 1.7 Si risolva la seguente equazione di ricorrenza per valori del parametro $n = 2^i$:

$$T(n) = \begin{cases} 3T\left(\frac{n}{2}\right) + 7n^{\log_2 3}, & n > 1, \\ 1 & n = 1. \end{cases}$$

Exercise 1.8 Si risolva e si verifichi la seguente equazione di ricorrenza per valori del parametro $n = 2^{2^i}$:

$$T(n) = \begin{cases} \sqrt{2}T\left(\sqrt{n}\right) + \sqrt{\log_2 n}, & n > 2, \\ 0 & n = 2. \end{cases}$$

Exercise 1.9 Si consideri la seguente equazione di ricorrenza definita per ogni valore positivo del parametro n:

$$T(n) = \begin{cases} 7T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + n^3, & n > 1, \\ 8 & n = 1. \end{cases}$$

Utilizzando l'induzione parametrica, si dimostri che $T(n) = O(n^3)$.

Exercise 1.10 Al variare dei due parametri interi positivi a e b, si consideri la seguente famiglia di ricorrenze, definite per $n = 2^{2^i}$:

$$T_{a,b}(n) = \begin{cases} 2^a T_{a,b}\left(\sqrt{n}\right) + \log_2^b n, & n > 2, \\ 0 & n = 2. \end{cases}$$

Si determini l'ordine di grandezza di $T_{a,b}(n)$ in funzione di n e dei due parametri a e b. (*Suggerimento:* Si applichi la formula generale e si discutano vari casi a seconda dei valori di a e b ...)

Exercise 1.11 Si consideri la seguente equazione di ricorrenza, definita per valori arbitrari parametro $n > 0$:

$$T(n) = \begin{cases} \lfloor\sqrt{n}\rfloor T\left(\lfloor\sqrt{n}\rfloor\right) + n^2, & n > 2, \\ 1 & n = 1, 2. \end{cases}$$

Si dimostri, utilizzando l'induzione parametrica, che $T(n) \in O(n^2)$.

Exercise 1.12 Sia n una potenza di due. Dato un problema Π, sia A^1_Π un algoritmo ricorsivo per Π la cui complessità in tempo $T_1(n)$ obbedisce alla seguente ricorrenza:

$$T_1(n) = \begin{cases} 1 & n = 1, \\ 2T_1\left(\frac{n}{2}\right) + 2n & n > 1. \end{cases}$$

Sia A^2_Π un ulteriore algoritmo per Π di complessità $T_2(n) = n^{3/2}$. Si determini la complessità in tempo del migliore algoritmo ibrido per Π ottenibile combinando A^1_Π e A^2_Π.