Esercizio 1 [10 punti]

Ex 1 [10 pti]. Si considerino 3 popolazioni P_1, P_2, P_3 che vivono nelle regioni A, B, C le cui numerosità sono indicate, rispettivamente, con x_1, x_2 e x_3. Si assuma che le 3 popolazioni interagiscono tra loro secondo le seguenti regole:

- nella regione A la popolazione P_1 prolifica con un tasso di natalità pari ad $a > 0$ (cioè la velocità di crescita della popolazione è direttamente proporzionale alla popolazione stessa, secondo un coefficiente di proporzionalità a);
- vi è un flusso dalla regione A verso la regione C con costante di proporzionalità b
- un flusso dalla regione C con costante c entra nella regione B;
- il flusso che proviene dal mondo esterno ad A, B, C è associato all'ingresso del sistema $u(t)$ ed entra sia in B che in C;
- viene monitorata la sola quantità $x_1(t)$, che rappresenta quindi l'uscita del sistema

Si considerino i due punti seguenti.

1. Si scriva un modello a tempo continuo per descrivere la dinamica delle 3 popolazioni.
2. Assumendo $a = b, b \neq 0, c \neq 0$ si calcolino i punti di equilibrio del sistema con ingresso costante $u(t) = 1$.

RIPORTARE LE SOLUZIONI DEI PUNTI 1 E 2 ALL'INTERNO DI QUESTO RIQUADRO

1) Modello:

2) Pti di equilibrio:

RIPORTARE SOTTO IL PROCEDIMENTO SEGUITO PER OTTENERE LE SOLUZIONI

Soluzione EX 1. Abbiamo facilmente un modello lineare descritto dalle matrici

$$F = \begin{bmatrix} a-b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \\ b & 0 & -c \end{bmatrix}, \; G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \; H = [\,1 \quad 0 \quad 0\,].$$

Per quanto riguarda il secondo punto, il rango della matrice risulta pari a 2. Il kernel della matrice ha quindi dimensione 1. Si vede facilmente che

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \\ b & 0 & -c \end{bmatrix} \longrightarrow \ker(F) = \langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rangle.$$

Le soluzioni di $Fx + Gu = 0$ soddisfano quindi $cx_3 = -1$ e $bx_1 - cx_3 = -1$. Una soluzione particolare risulta

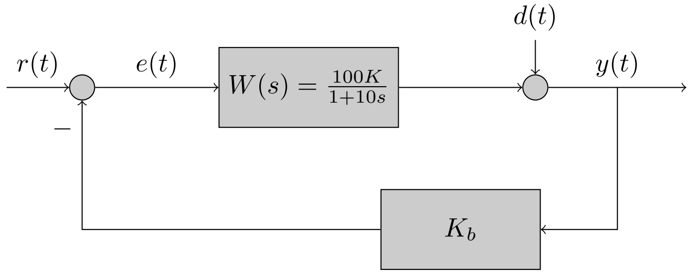
$$x = \begin{bmatrix} -2/b \\ 0 \\ -1/c \end{bmatrix}.$$

I punti di equilibrio quindi sono

$$\begin{bmatrix} -2/b \\ 0 \\ -1/c \end{bmatrix} + \langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rangle,$$

ovvero hanno componente x_2 arbitraria mentre $x_1 = -2/b$ e $x_3 = -1/c$.

Esercizio 2 [10 punti]
Si consideri il sistema di controllo



Si assuma $K = K_b = 1$.

1. Sia $r(t) = \delta_{-1}(t)$ e $d(t) = 0.1\delta_{-1}(t)$. Si determini l'istante t_r in cui l'uscita $y(t)$ raggiunge il 90% del suo valore finale y_∞.
2. Si assuma $r(t) = \delta_{-1}(t)$ e assenza di disturbo. Si calcoli di quanto varierebbe in percentuale il nuovo valore y_∞ ottenuto sotto queste nuove ipotesi se ci fosse una variazione del 5% di K.

RIPORTARE LE SOLUZIONI DEI PUNTI 1 E 2 ALL'INTERNO DI QUESTO RIQUADRO

1) Istante t_r: **2) Variazione percentuale:**

RIPORTARE SOTTO IL PROCEDIMENTO SEGUITO PER OTTENERE LE SOLUZIONI

Soluzione EX 2. La funzione di trasferimento in catena chiusa risulta

$$\widetilde{W}(s) = \frac{W(s)}{1+W(s)} = \frac{100}{10s+101} = \frac{10}{s+10.1}.$$

La funzione di sensitività risulta invece

$$S(s) = \frac{1}{1+W(s)} = \frac{10s+1}{10s+101} = \frac{s+0.1}{s+10.1}.$$

Si ha allora

$$Y(s) = \widetilde{W}(s)R(s) + S(s)D(s),$$

da cui

$$Y(s) = \frac{10}{s(s+10.1)} + 0.1\frac{s+0.1}{s(s+10.1)} = 0.1\frac{s+100.1}{s(s+10.1)}.$$

Con Heavyside si ottiene poi

$$Y(s) = \frac{0.9911}{s} - \frac{0.891}{s+10.1},$$

da cui

$$y(t) = 0.9911\delta_{-1}(t) - 0.891\exp(-10.1t), \quad t \geq 0.$$

Si ha

$$y_\infty = \lim_{s\to 0} sY(s) = \frac{100.1}{101} = 0.9911.$$

e

$$0.9y_\infty = 0.892.$$

Il sistema $y(t_r) = 0.892$, ovvero

$$0.9911 - 0.891\exp(-10.1t_r) = 0.892,$$

fornisce poi il valore

$$t_r \approx 0.21.$$

Per quanto riguarda il secondo punto, si ha

$$\frac{\Delta y_\infty}{y_\infty} = \frac{1}{1+W(0)}\frac{\Delta W(0)}{W(0)} = S(0)\frac{\Delta K}{K} = \frac{1}{101}\frac{5}{100} = 0.0495\%.$$

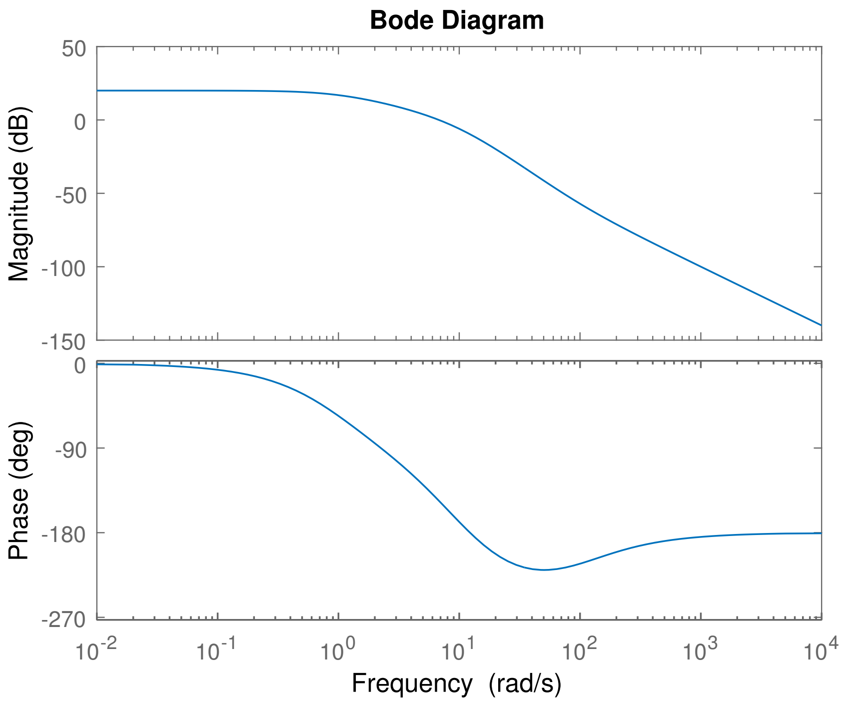
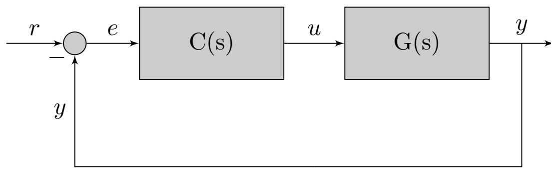


Figure 1: Diagrammi di Bode di $G(s)$.

TEMA A - Esercizio 3 [13 punti]



Si consideri il sistema retroazionato rappresentato in Figura e sia

$$G(s) = 10\frac{s+100}{(s+1)(s+10)^2}.$$

Si indica con $T(s)$ il sistema retroazionato $T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)}$.

1. Si traccino i diagrammi di Bode di $G(s)$.

2. Si consideri un controllore P, $C(s) = K_P > 0$. Utilizzando i diagrammi tracciati al punto precedente, si trovi il valore minimo ($\widetilde{K}_P$) di K_P tale per cui il criterio di Bode é applicabile. Si studi la stabilitá asintotica del sistema retroazionando $T(s)$ nei casi: (A) $K_P = 0.2$ e (B) $K_P = 10$.

3. Si consideri un generico controllore $C(s)$; si progetti $C(s)$ in modo da soddisfare le seguenti specifiche:
   - errore a regime in risposta al gradino di ampiezza unitaria $e_0^\infty \leq \frac{1}{11}$;
   - pulsazione di attraversamento $\omega_c = 1\ \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$;
   - margine di fase $\phi_m \geq 65°$.

Soluzione

[1] Per tracciare i diagrammi di Bode é innanzitutto necessario portare $G(s)$ in forma di Bode:

$$G(s) = 10\frac{1+\frac{s}{100}}{(1+\frac{s}{10})^2(1+s)}.$$

Il guadagno statico di $G(s)$ é pari a:

$$|G_a(j\omega)|_{\text{db}} = 20\log(10) = 20 \text{ dB}.$$

Dopo aver notato che non sono presenti poli/zeri nell'origine, si studiano i vari fattori della f.d.t.:

- é presente un doppio termine di primo grado $(1+\frac{s}{10})^2$ al denominatore (punto di spezzettamento in $\omega_{p_1} = 10\ \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$);
- é presente un altro termine di primo grado $(1+s)$ al denominatore (punto di spezzettamento in $\omega_{p_2} = 1\ \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$);
- é presente uno zero $(1+\frac{s}{100})$ con punto di spezzetamento in $\omega_{z_1} = 100\ \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$.

I grafici reali dei diagrammi di Bode di $G(s)$ sono rappresentati in Fig. 1. In particolare si puó osservare che:

- alle basse frequenze ($\omega < 1\ \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$), il valore del modulo é pari circa a 20 dB, il contributo di $G_a(s)$;

- la pendenza del diagramma del modulo -20 dB/dec in $\omega \in (1, 10)$ $\frac{\text{rad}}{\text{sec}}$, -60 dB/dec in $\omega \in (10, 100)$ $\frac{\text{rad}}{\text{sec}}$e -40 dB/dec per $\omega > 100$ $\frac{\text{rad}}{\text{sec}}$;

[2] Affinché il Criterio di Bode sia applicabile, é necessario che: (i) non siano presenti poli a parte reale positiva in $K_P G(s)$ (verificata) e che (ii) il diagramma del modulo di $K_P G(s)$ attraversi l'asse a 0 dB una sola volta. Osservando il diagramma del modulo di $G(s)$ é immediato verificare che l'asse a 0 dB viene attraversato una sola volta, a patto che K_P non faccia abbassare il grafico del modulo di piú di 20 dB (caso in cui non avviene nessun attraversamento dell'asse a 0 dB): per evitare che ció accada é necessario che $K_P > \widetilde{K}_P = 0.1$.

Dai diagrammi di Bode tracciati al punto precedente si puó apprezzare come per valori di K_P inferiori a 1 si abbia una pulsazione d'attraversamento inferiore a 10 $\frac{\text{rad}}{\text{sec}}$: in questi casi (e quindi anche nel caso A) si ottiene un margine di fase positivo e quindi, applicando il criterio di Bode, il sistema retroazionato é asintoticamente stabile. Per valori di $K_P > 1$ invece la pulsazione d'attraversamento é superiore a 10 $\frac{\text{rad}}{\text{sec}}$: in questi casi (che comprendono il caso B) il sistema retroazionato é instabile in quanto il margine di fase é negativo.

[3] Nel progetto del controllore si parte, come consuetudine, dal soddisfare la richiesta sull'errore a regime; essendo $G(s)$ un sistema di tipo 0, vale la seguente relazione:

$$\frac{1}{1 + \mu_G \mu_C} \leq \frac{1}{11} \Rightarrow \mu_C \geq 1.$$

Si sceglie $C(s) = 1 * \bar{C}(s)$: con questa scelta $\bar{L}(s) = G(s)$ ed é quindi possibile sfruttare il grafico tracciato al punto 1. per la progettazione della parte dinamica di $C(s)$.

Dallo studio dei diagrammi di Bode si puó apprezzare che

$$\omega_C^0 > \omega_C,$$
$$\phi_m^0 > \phi_m,$$

é opportuno quindi l'utilizzo di una rete ritardatrice. Si riprende la forma di una rete ritardatrice

$$\bar{C}(s) = \frac{1 + sT}{1 + srT},$$

con $T > 0$ e $r > 1$. Nella scelta di r (che andrá a modificare la pulsazione d'attraversamento) é necessario calcolare il valore attuale di $|\bar{L}(j\omega_C)|_{dB}$: dallo studio del diagramma del modulo (e ricordando che un termine del primo ordine introduce un errore di -3 dB fra diagramma del modulo reale e asintotico) é possibile stimare che $|\bar{L}(j\omega_C)|_{dB} \approx 17dB$; da un calcolo diretto del modulo in ω_C si ottiene:

$$\begin{aligned}\left|\bar{L}(j\omega_C)\right|_{dB} &= 10 \frac{\sqrt{1 + \frac{\omega_C^2}{10^4}}}{\sqrt{1 + \omega_C^2}\left(1 + \frac{\omega_C^2}{10^2}\right)} = 10 \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{10^4}}}{1.01\sqrt{2}} \\ &\approx 7 \approx 16.9 \text{ dB.}\end{aligned}$$

Per fare in modo tale che la rete ritardatrice faccia avvenire l'attraversamento dell'asse a 0 dB alla pulsazione desiderata, poniamo

$$-20\log(r) = -16.9 \Rightarrow r = 10^{\frac{16.9}{20}} \approx 7.$$

Scegliamo $T = 100$ in modo tale da non abbassare di molto il margine di fase (anche se la specifica di progetto é ampiamente soddisfatta nel caso in esame), cosí facendo la rete ritardatrice diventa:

$$C(s) = \frac{1 + 100s}{1 + 700s}.$$

TEMA B - Esercizio 3 [13 punti]

Si consideri il sistema retroazionato rappresentato in Figura e sia

$$G(s) = 1000\frac{s+1000}{(s+10)(s+100)^2}.$$

Si indichi con $T(s)$ il sistema retroazionato $T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)}$.

1. Si traccino i diagrammi di Bode di $G(s)$.
2. Si consideri un controllore P, $C(s) = K_P > 0$. Utilizzando i diagrammi tracciati al punto precedente, si trovi il valore minimo ($\widetilde{K}_P$) di K_P tale per cui il criterio di Bode é applicabile. Si studi la stabilitá asintotica del sistema retroazionando $T(s)$ nei casi: (A) $K_P = 0.2$ e (B) $K_P = 10$.
3. Si consideri un generico controllore $C(s)$; si progetti $C(s)$ in modo da soddisfare le seguenti specifiche:
   - errore a regime in risposta al gradino di ampiezza unitaria $e_0^\infty \leq \frac{1}{11}$;
   - pulsazione di attraversamento $\omega_c = 10\ \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$;
   - margine di fase $\phi_m \geq 65°$.

Soluzione

Il tema B é basato su una f.d.t. traslata di una decade verso le alte frequenze rispetto alla f.d.t. del tema A. Lo svolgimento di ogni punto dell'esercizio é lo stesso rispetto al tema A; in particolare, il valore di $\widetilde{K}_P$ é lo stesso e la rete correttrice proposta per il tema A soddisfa le specifiche anche per questo tema.