ESERCIZIO SULLA FORMA DI JORDAN

Prof. Gianluigi Pillonetto

16 OTTOBRE 2018

Si consideri la matrice

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Si calcoli la forma di Jordan e la relativa matrice di cambiamento di base.

Soluzione:
Come primo passo calcoliamo il polinomio caratteristico di F, ovvero $\Delta_F(s) = \det(sI - F)$. Si ha

$$\Delta_F(s) = \det \begin{bmatrix} s & 0 & 0 & -1 \\ -1 & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s \end{bmatrix} = (-1)^2 \times s \times s^3 + (-1)^5 \times 0 = s^4,$$

dove si e' utilizzata la prima riga per lo svolgimento del calcolo. Vi e' quindi un solo autovalore $\lambda = 0$ con molteplicita' algebrica pari a $\nu = 4$. Calcoliamo ora la molteplicita' geometrica e relativo autospazio: si ha

$$\ker(F - \lambda I) = \ker F = \langle v_1, v_2 \rangle,$$

dove

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

La molteplicita' geometrica risulta quindi pari a due e dovremo costruire ulteriori vettori da aggiungere alla "struttura":

$$[v_2 \quad v_1].$$

Calcoliamo quindi

$$\ker(F - \lambda I)^2 = \ker F^2 = \ker \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle,$$

dove

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Deve poi essere

$$\ker(F - \lambda I)^3 = \ker F^3 = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle,$$

dove

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

La "struttura" e' quindi

$$\begin{bmatrix} v_2 & v_1 \\ v_3 & \\ v_4 & \end{bmatrix}$$

e va ora sostituita con

$$\begin{bmatrix} F^2 v_4 & v_1 \\ F v_4 & \\ v_4 & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_2 & v_1 \\ w_3 & \\ v_4 & \end{bmatrix},$$

dove

$$w_3 = Fv_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad w_2 = F^2 v_4 = Fw_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

La matrice di cambiamento di base e' quindi

$$T = [w_2 \ w_3 \ v_4 \ v_1] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e si ha

$$J = T^{-1}FT = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nota: Se avessimo costruito la struttura invertendo v_1 e v_2, ovvero usando

$$\begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ v_3 & \\ v_4 & \end{bmatrix},$$

avremmo ottenuto

$$\begin{bmatrix} w_2 & v_2 \\ w_3 & \\ v_4 & \end{bmatrix}$$

ma $w_2 = v_2$ quindi non avremmo definito una base per R^4. Risulterebbe quindi necessario proprio scambiare v_2 e v_1 tornando alla struttura precedente. Come fatto generale, si noti quindi che quando si crea w_i, puo' capitare che non si possa sostituire con v_i poiche' il numero di vettori indipendenti puo' diminuire. In pratica, se cio' accade, si deve operare una permutazione nei vettori v_i presenti nella riga per mantenere il numero completo di vettori indipendenti nella struttura.