CONTROLLI AUTOMATICI

Introduzione al corso

Prof. Gianluigi Pillonetto
Dott. Mattia Bruschetta

Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione
Università di Padova

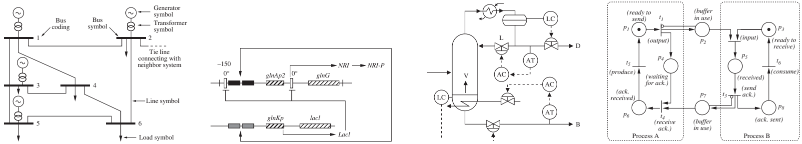
Sistemi e ...

"Il tutto è maggiore della somma delle parti" (Aristotele)

Sistema:

Un sistema può essere definito come l'unità fisica e funzionale, costituita da più parti (tessuti, organi od elementi ecc.) interagenti (od in relazione funzionale) tra loro (e con altri sistemi), formando un tutt'uno in cui, ogni parte, dà un contributo per una finalità comune od un target identificativo di quel sistema.

(Wikipedia - http://it.wikipedia.org)



(a) Power electronics (b) Cell biology (c) Process control (d) Networking

... Modelli

Modello:

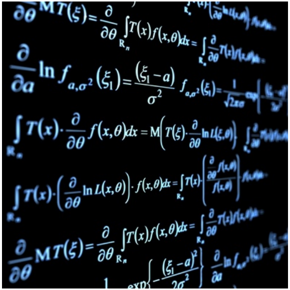
Un modello è una rappresentazione di un oggetto o di un fenomeno, che corrisponde alla cosa modellata per il fatto di riprodurne alcune caratteristiche o comportamenti fondamentali in modo tale che questi aspetti possano essere mostrati, studiati, conosciuti laddove l'oggetto modellato non sia direttamente accessibile.

(Wikipedia - http://it.wikipedia.org)

- Modelli fisici: in scala ridotta come navi, dighe, aeroplani
- Modelli matematici: relazioni matematiche che descrivono quantitativamente il comportamento del sistema
- Modelli verbali: descrizione qualitative tramite linguaggio di un fenomento
- Modelli grafici: schemi, relazioni tra le parti, flusso di informazione

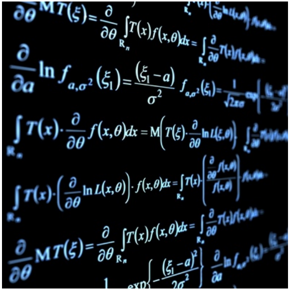
Modelli Matematici

- Vantaggi:
  - Descrizione sintetica di un fenomeno
  - Descrizione non ambigua di un fenomeno
  - Riproducibilità: possibilità di riprodurre il fenomeno in maniera ripetibile e su PC
  - Analisi quantitativa: possibilità di analizzare le proprietà di un modello
  - Accessibilità: possibilità di modificare e testare il modello
  - Universali: utilizzati in tutte le aree della scienza e dell'ingegneria
- Problematiche:
  - Quando un modello matematico è un buon modello ?
  - Come costruire un modello matematico?



Modelli Matematici

- Vantaggi:
  - Descrizione sintetica di un fenomeno
  - Descrizione non ambigua di un fenomeno
  - Riproducibilità: possibilità di riprodurre il fenomeno in maniera ripetibile e su PC
  - Analisi quantitativa: possibilità di analizzare le proprietà di un modello
  - Accessibilità: possibilità di modificare e testare il modello
  - Universali: utilizzati in tutte le aree della scienza e dell'ingegneria



- Problematiche:
  - Quando un modello matematico è un buon modello ?
  - Come costruire un modello matematico?

In pratica, tutti i modelli sono sbagliati, ma alcuni sono utili
(George Box - statistico)

Sistemi e modelli dinamici

Sistemi dinamici

Sono sistemi che evolvono nel tempo, caratterizzati da un insieme di segnali di ingresso e di uscita. In particolare l'uscita(effetto) all'istante t di un sistema dinamico dipende dalla storia passata degli ingressi(cause) del sistema. Sono tipicamente modellizzati tramite equazioni differenziali e variabili di stato.

Sistemi e modelli dinamici

Sistemi dinamici

Sono sistemi che evolvono nel tempo, caratterizzati da un insieme di segnali di ingresso e di uscita. In particolare l'uscita(effetto) all'istante t di un sistema dinamico dipende dalla storia passata degli ingressi(cause) del sistema. Sono tipicamente modellizzati tramite equazioni differenziali e variabili di stato.

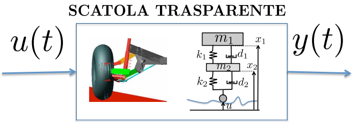
Modello matematico per sistemi dinamici (tempo continuo)

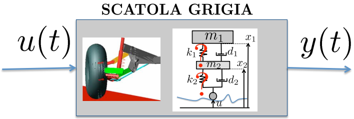
$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt}(t) &= f(x(t), u(t), t) \\ y &= h(x(t), u(t), t) \end{aligned}$$

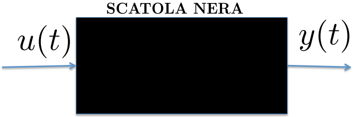
- x, u, y sono vettori
- u - controlli, disturbi, rumore
- x - non accessibile direttamente
- f, h - funzioni statiche (anche non lineari)

Come si costruisce un modello matematico?

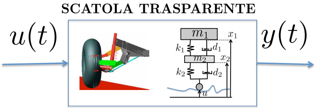
- Scatola trasparente: si usano leggi costruttive del fenomeno (fisiche,biologiche,chimiche,etc) per derivare il modello matematico
- Scatola grigia: si usano leggi costruttive del fenomeno e misure sperimentali $\{u(t), y(t)\}$ per stimare alcuni parametri non noti (massa, costante di degradazione, etc..)
- Scatola nera (Modelli di dati): si usano solamente delle misure sperimentali di $\{u(t), y(t)\}$





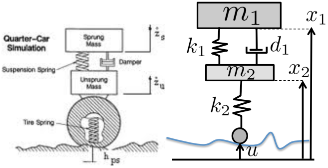


Approccio White-Box (1/2)



Scatola trasparente

Il sistema é decomposto in componenti elementari di cui si conosce il modello matematico tramite i principi fondamentali delle scienze (fisica, biologia, chimica, ecc..) ed il valore esatto dei parametri coinvolti (massa, costanti di decadimento, coefficienti di attrito, ecc..).

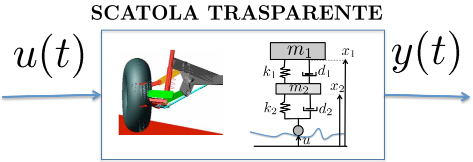


$$
\begin{aligned}
m_1\ddot{x}_1 &= -k_1(x_1 - x_2) - d_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)\\
m_2\ddot{x}_2 &= k_1(x_1 - x_2) + d_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k_2(x_1 - u)\\
y &= x_1
\end{aligned}
$$

Variabili: x_1 altezza auto, x_2 altezza sospensione, u altezza profilo stradale

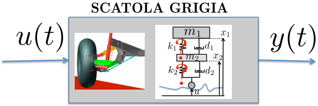
Parametri: k_1 costante elasica sospensione, k_2 costante elastica pneumatico, d_1 coefficiente attrito sospensione

Approccio White-Box (2/2)



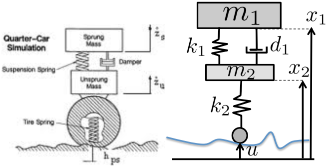
- Vantaggi:
  - Non servono dati sperimentali
  - Facilità nel modificare il modello (nell'esempio: aggiungere un termine di attrito per il pneumatico)
- Svantaggi:
  - Spesso si devono fare ipotesi semplificative (nell' esempio: considerare un modello lineare dell'attrito)
  - Poco accurato se i parametri del modello non sono noti (nell'esempio: pressione aria pneumatico che influenza costante elastica k_2)
  - Sistemi con molte componenti portano a modelli complessi con molte equazioni anche se il comportamento globale è "semplice"
  - A volte le leggi costruttive elementari non sono note (molti esempi in economia, biologia, ecologia, ecc...)

Approccio Gray-Box (1/2)



Scatola grigia

Si conoscono (almeno parzialmente) principi fondamentali delle scienze che regolano il sistema ma il valore dei parametri coinvolti non è noto.

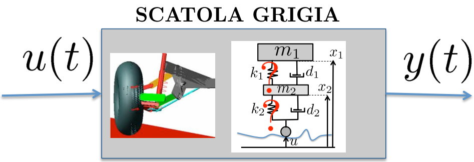


- Equazioni del modello:

$$
\begin{aligned}
m_1\ddot{x}_1 &= -k_1(x_1 - x_2) - d_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \\
m_2\ddot{x}_2 &= k_1(x_1 - x_2) + d_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k_2(x_1 - u) \\
y &= x_1
\end{aligned}
$$

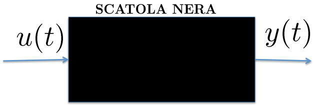
- Identificazione: Si utilizzano i dati di ingresso/uscita $\{u(t), y(t)\}_{t=0}^{T}$ e le equazioni del modello per ricavare il valore esatto dei parametri k_1, k_2, d_1

Approccio Gray-Box (2/2)



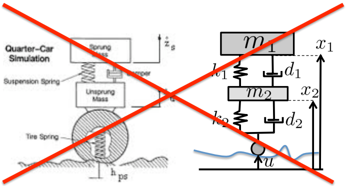
- Vantaggi:
  - Modello più accurato
  - Permette di ricavare il valore di parametri non misurabili direttamente
  - Interpretazione chiara delle varie variabili in gioco
- Svantaggi:
  - Necessità di raccogliere i dati
  - Spesso il calcolo dei parametri richiede una complessa ottimizzazione non-lineare
  - Efficace in genere solo se numero parametri è piccolo
  - Problemi di identificabilità dei parametri (esempio se $k_1 = L\kappa$ e $d_1 = Lb$, L-lunghezza sospensione, κ-costante elastica per unità di lunghezza, b-coefficiente d'attrito per unità di lunghezza, si vuole trovare valori di κ, L, b).

Approccio Black-Box (1/2)



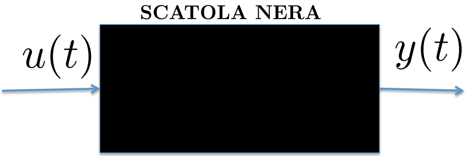
Scatola nera (Modelli di dati)

Non si conoscono i principi fondamentali che regolano il fenomeno, oppure sono troppo complessi e si crea un modello matematico solamente a partire dai dati sperimentali.



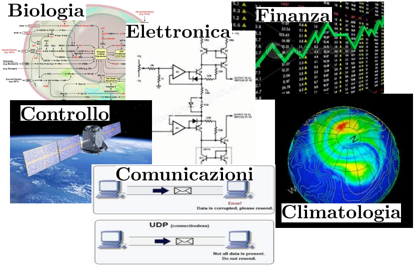
- Dati disponibili: Il profilo del terreno $\{u(t)\}$ (o sua descrizione statistica) e l'altezza del veicolo $\{y(t)\}$ campionati a $t = kT$, dove T è il tempo di campionamento, quindi i dati sono $\mathcal{D} = \{(u_1, y_1), (u_2, y_2), \ldots, (u_N, y_N)\}$.
- Identificatione: Si utilizzano solo i dati di ingresso/uscita $\mathcal{D}$ per ricavare un modello matematico (tipicamente lineare)

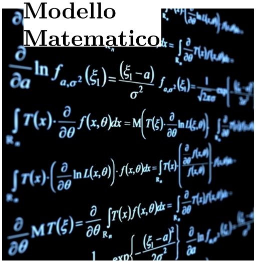
Approccio Black-Box (2/2)



- Vantaggi:
    - Modello che descrive solo i fenomeni più rilevanti
    - Buone capacità predittive
    - Universale in quanto non richiede conoscenza sulla natura dei dati
- Svantaggi:
    - Necessità di raccogliere i dati
    - Poco efficace se il modello originale è fortemente non-lineare
    - Variabili in gioco non hanno significato fisico (differentemente da gray/white-box)
    - Molto variabile se dati disponibili sono pochi e/o rumorosi

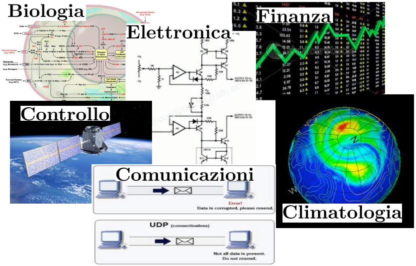
Obiettivi del corso





- Modelizzazione di sistemi dinamici tramite modelli matematici (Identificazione white-box)
- Analisi qualitativa e quantitativa di sistemi dinamici regolati da equazioni differenziali
- Identificazione gray-box dei parametri incogniti di un sistema dinamico a partire da dati fisici (misure) e stima dei segnali di ingresso tramite deconvoluzione.

Modellizzazione



$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= f(x, u, t) \\
y &= h(x, u, t)
\end{aligned}
$$

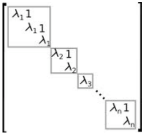
- Esempi di sistemi dinamici da Ingegneria Informatica, Ingegneria delle Telecomunicazioni, Bioingegneria, Ingegneria Elettronica, Ingegneria dell'Automazione
- Definizioni di classi di modelli matematici per sistemi dinamici

Analisi (1/4): Sistemi Lineari Autonomi a tempo continuo

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x,u,t) \\ y &= h(x,u,t) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} &\dot{x}(t) = Ax(t), \\ &x \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^{n \times n} \end{aligned}$$

- Esponenziale di matrici
- Forma di Jordan
- Analisi modale
- Autovettori
- Autovettori generalizzati

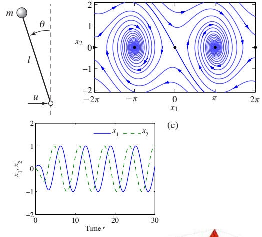
$$A = TFT^{-1} \qquad F =$$

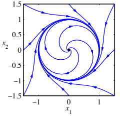


$$det(sI - A) = (s - \lambda_1)^{\nu_1}(s - \lambda_2)^{\nu_2} \cdots (s - \lambda_n)^{\nu_n}$$

Analisi (2/4): Teoria della Stabilità

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x,u,t) \\ y &= h(x,u,t) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \dot{x}(t) = f(x(t)),\; x \in \mathbb{R}^n$$

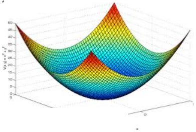




(a) (b) (c)

- Punti di equilibrio
- Funzioni di Lyapunov
- Linearizzazione
- Diagramma delle fasi

$$V(x) = x^T P x$$



$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_n} & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}, \dot{x} = f(x) \approx Ax$$

Analisi (3/4): Sistemi non autonomi e a tempo discreto

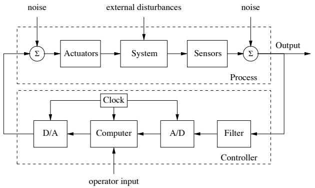
TEMPO CONTINUO

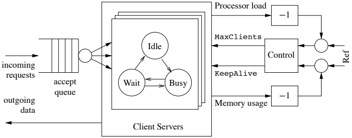
$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t)\\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}$$

TEMPO DISCRETO

$$\begin{aligned}x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k)\\ y(k) &= Cx(k) + Du(k)\end{aligned}$$

- Sistema a regime
- Funzioni di trasferimento
- Trasformata Zeta
- Analogie e differenze tra modelli a tempo continuo e discreto





Gianluigi Pillonetto Gian Antonio Susto

Esercizi di CONTROLLI AUTOMATICI con note teoriche

SOCIETÀ EDITRICE ESCULAPIO

Indice

Esercizio 1 [10 punti]

Ex 1 [10 pti]. Si considerino 3 popolazioni P_1, P_2, P_3 che vivono nelle regioni A, B, C le cui numerosità sono indicate, rispettivamente, con x_1, x_2 e x_3. Si assuma che le 3 popolazioni interagiscono tra loro secondo le seguenti regole:

- nella regione A la popolazione P_1 prolifica con un tasso di natalità pari ad $a > 0$ (cioè la velocità di crescita della popolazione è direttamente proporzionale alla popolazione stessa, secondo un coefficiente di proporzionalità a);
- vi è un flusso dalla regione A verso la regione C con costante di proporzionalità b
- un flusso dalla regione C con costante c entra nella regione B;
- il flusso che proviene dal mondo esterno ad A, B, C è associato all'ingresso del sistema $u(t)$ ed entra sia in B che in C;
- viene monitorata la sola quantità $x_1(t)$, che rappresenta quindi l'uscita del sistema

Si considerino i due punti seguenti.

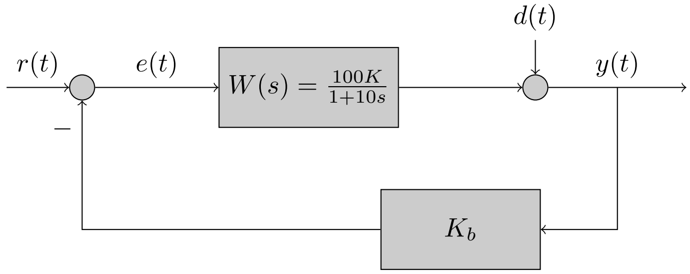
1. Si scriva un modello a tempo continuo per descrivere la dinamica delle 3 popolazioni.
2. Assumendo $a = b, b \neq 0, c \neq 0$ si calcolino i punti di equilibrio del sistema con ingresso costante $u(t) = 1$.

RIPORTARE LE SOLUZIONI DEI PUNTI 1 E 2 ALL'INTERNO DI QUESTO RIQUADRO

1) Modello: **2) Pti di equilibrio:**

RIPORTARE SOTTO IL PROCEDIMENTO SEGUITO PER OTTENERE LE SOLUZIONI

Esercizio 2 [10 punti]
Si consideri il sistema di controllo



Si assuma $K = K_b = 1$.

1. Sia $r(t) = \delta_{-1}(t)$ e $d(t) = 0.1\delta_{-1}(t)$. Si determini l'istante t_r in cui l'uscita $y(t)$ raggiunge il 90% del suo valore finale y_∞.
2. Si assuma $r(t) = \delta_{-1}(t)$ e assenza di disturbo. Si calcoli di quanto varierebbe in percentuale il nuovo valore y_∞ ottenuto sotto queste nuove ipotesi se ci fosse una variazione del 5% di K.

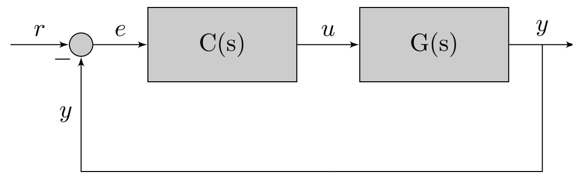
RIPORTARE LE SOLUZIONI DEI PUNTI 1 E 2 ALL'INTERNO DI QUESTO RIQUADRO

---

1) Istante t_r: **2) Variazione percentuale:**

RIPORTARE SOTTO IL PROCEDIMENTO SEGUITO PER OTTENERE LE SOLUZIONI

Esercizio 3 [13 punti]



Si consideri il sistema retroazionato rappresentato in Figura e sia

$$G(s) = 10\frac{s+100}{(s+1)(s+10)^2}.$$

Si indica con $T(s)$ il sistema retroazionato $T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)}$.

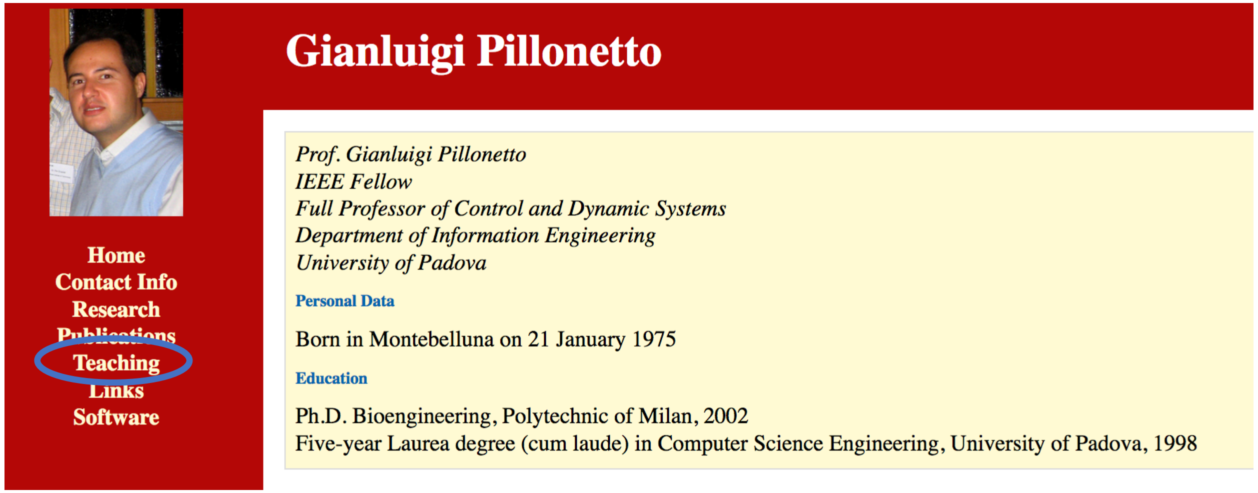
1. Si traccino i diagrammi di Bode di $G(s)$.
2. Si consideri un controllore P, $C(s) = K_P > 0$. Utilizzando i diagrammi tracciati al punto precedente, si trovi il valore minimo ($\widetilde{K}_P$) di K_P tale per cui il criterio di Bode é applicabile. Si studi la stabilitá asintotica del sistema retroazionando $T(s)$ nei casi: (A) $K_P = 0.2$ e (B) $K_P = 10$.
3. Si consideri un generico controllore $C(s)$; si progetti $C(s)$ in modo da soddisfare le seguenti specifiche:
   - errore a regime in risposta al gradino di ampiezza unitaria $e_0^\infty \leq \frac{1}{11}$;
   - pulsazione di attraversamento $\omega_c = 1\ \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$;
   - margine di fase $\phi_m \geq 65°$.

Soluzione

Dove trovare il materiale per il corso

- Sito elearning
- Sito http://www.dei.unipd.it/~giapi/

Voce teaching



Date Appelli

Martedì 25 Gennaio 2022 ore 9

Venerdì 11 Febbraio 2022 ore 9

Martedì 21 Giugno 2022 ore 9

Giovedì 1 Settembre 2022 ore 9

RICHIAMI DI ALGEBRA E GEOMETRIA

$\mathbb{R}^n$ E $\mathbb{C}$: ESEMPI DI SPAZI VETTORIALI CON LE USUALI SOMME E PRODOTTI

$v \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $s \in \mathbb{C}$ ($s = \sigma + j\omega$, $\sigma \in \mathbb{R}$, $\omega \in \mathbb{R}$, $j = \sqrt{-1}$)

SOTTOSPAZIO:

SOTTOINSIEME DI UNO SPAZIO VETTORIALE CHE È ESSO STESSO SPAZIO VETTORIALE.

ESEMPIO

SOTTOSPAZI DI $\mathbb{R}^3$:

ESEMPIO

SOTTOSPAZI DI $\mathbb{R}^3$:

$\{ \underline{0}$, TUTTE LE RETTE CHE PASSANO PER $\underline{0}$,

TUTTI I PIANI CHE PASSANO PER $\underline{0}$,

$\mathbb{R}^3 \}$

MATRICI

$A \in \mathbb{R}^{n \times m}$,

SE $v \in \mathbb{R}^m$, $Av \in \mathbb{R}^n$

a_i VETTORE COLONNA IN $\mathbb{R}^m$

$$A = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1^T \\ \vdots \\ a_n^T \end{bmatrix}$$

VETTORE COLONNA $\in \mathbb{R}^n$

RANGO DI A = N° VETTORI v_i INDIPENDENTI

= N° VETTORI RIGA a_i^T INDIP.

NOTA: IN GENERALE OGNI VETTORE SARÀ UN VETTORE COLONNA SE NON SPECIFICATO

MATRICI QUADRATE

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, INVERTIBILE SE

$$\text{RANGO } A = n$$

$$\Updownarrow$$

$$\det A \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{\operatorname{adj} A}{\det A}$$

$\operatorname{adj} A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ CON ELEMENTO (i, j) DEFINITO DA

$$\left[\operatorname{adj} A\right]_{ij} = (-1)^{i+j} \det\left(A_{-j,-i}\right)$$

DOVE

$A_{-j,-i} \in \mathbb{R}^{n-1, n-1}$ OTTENUTA

TOGLIENDO DA A LA j-ESIMA

$A_{-j,-i} \in \mathbb{R}^{n-1,n-1}$ OTTENUTA TOGLIENDO DA A LA j-ESIMA RIGA E i-ESIMA COLONNA

ESEMPIO 1

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad [\operatorname{adj} A]_{13} = ?$$

$$A_{-3,-1} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A_{-3,-1}) = 2 - 12 = -10$$

$$\Downarrow$$

$$[\operatorname{adj} A]_{13} = (-1)^{1+3} \cdot (-10) = -10$$

ESEMPIO 2

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$\det A = ad - bc$

SE $\det A \neq 0$ $\exists$ A^{-1} E

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} / (ad - bc)$$

NOTA: adj A È LA MATRICE DEI COFATTORI TRASPOSTA

NUCLEO/KERNEL/ SPAZIO NULLO DI UNA MATRICE

DATA $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (MA POTREBBE + IN GENERALE ESSERE RETTANGOLARE)

SI HA

$$S = \{ v \in \mathbb{R}^n \text{ T.C. } Av = 0 \}$$

È UN SOTTOSPAZIO DI $\mathbb{R}^n$.

SI HA

$$S = \{ v \in \mathbb{R}^n \text{ T.C. } Av = 0 \}$$

È UN SOTTOSPAZIO DI $\mathbb{R}^n$.

È QUINDI ESPRIMIBILE

COME

$$S = \left\{ \sum_{i=1}^{d} \alpha_i v_i , \ \alpha_i \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \langle v_1, v_2, \dots, v_d \rangle$$

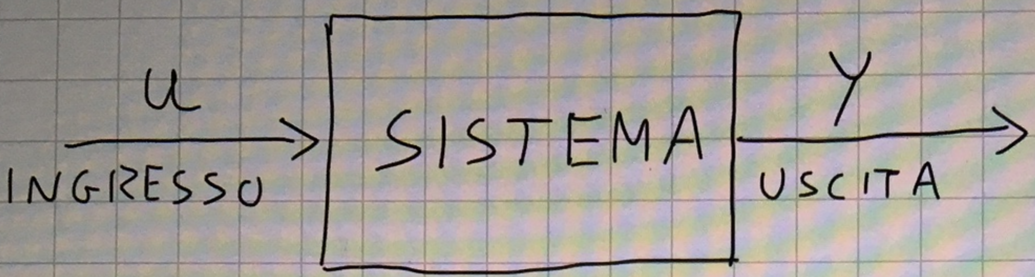
DOVE I VETTORI v_i SONO

INDIPENDENTI E $d = \text{DIM } S$.

SI HA SEMPRE

$$n = \text{RANGO } A + \text{DIM } S$$

SISTEMI (STATICI E DINAMICI)



SEGNALI TUTTI DETERMINISTICI

$u : t \to \mathbb{R}$

$t \in \mathbb{R}$ (TEMPO CONTINUO)

$t \in \mathbb{Z}$ (TEMPO DISCRETO)

$\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$

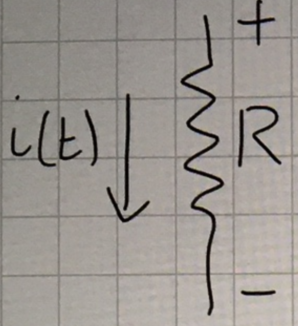
FENOMENO STATICO:

$$y(t) = f(u(t))$$

FENOMENO DINAMICO:

ALCUNE DELLE VARIABILI IN GIOCO SONO FUNZIONI DELL'EVOLUZIONE DI ALTRE IN UN INTERO INTERVALLO DI TEMPO

ESEMPIO FENOMENO STATICO



RESISTORE R

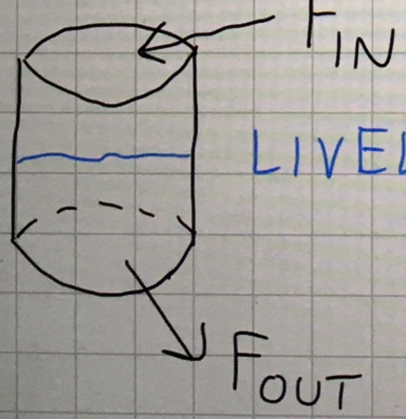
$$v(t) = R\,i(t)$$

È ANCHE UNA RELAZIONE LINEARE (RADDOPPIA i, RADDOPPIA v)

PRIMI ESEMPI DI FENOMENI DINAMICI

RETE IDRICA

Un serbatoio cilindrico di sezione S viene riempito attraverso un flusso Fin (l/min) e distribuisce acqua attraverso un flusso Fout (l/min). Descrivere l'evoluzione nel tempo del livello di acqua nel serbatoio considerando il flusso in entrata come l'ingresso del sistema e assumendo che il flusso di uscita sia proporzionale al volume di acqua nel serbatoio secondo la costante positiva a.



LIVELLO ACQUA $= V/S$

SOLUZIONE:

PER DEFINIZIONE DI FLUSSO:

$$dV(t) = -F_{OUT}(t)\,dt + F_{in}(t)\,dt$$

$$\Downarrow$$

$$\dot{V}(t) = -F_{OUT}(t) + F_{in}(t)$$

$u :=$ INGRESSO DEL SISTEMA

STATO $x := V$

$y :=$ USCITA

PER ASSUNZIONE $F_{OUT}(t) = \alpha x(t)$

$$\Downarrow$$

$$\dot{x}(t) = -\alpha x(t) + u(t)$$

$$y(t) = \frac{x(t)}{S}$$

È UN MODELLO DI STATO A TEMPO CONTINUO CON DIMENSIONE DELLO STATO PARI AD UNO. È LINEARE

Note

BANCA

Una banca propone un tasso di interesse del 3% trimestrale, una seconda banca il 12.5% annuale. Assumendo di voler mantenere il capitale investito per un anno, si stabilisca quale dei due investimenti risulta piu` vantaggioso.

SOLUZIONE:

CONSIDERIAMO LA PRIMA BANCA

$x(k) \quad k = 0, 1, 2, \ldots$

$\shortparallel$

AMMONTARE SOLDI IN FUNZIONE DEL TRIMESTRE K

$x(0) =$ INVESTIMENTO INIZIALE

TASSO 3% $\Rightarrow \alpha = 0.03$

$$x(k+1) = x(k) + \alpha x(k)$$
$$= (1+\alpha) x(k)$$

$$\Downarrow$$

$$x(k) = (1+\alpha)^k x(0)$$

DOPO UN ANNO

$$x(4) = (1+\alpha)^4 x(0)$$
$$= 1.03^4 x(0)$$
$$\simeq 1.1255 x(0)$$

CONSIDERIAMO LA PRIMA BANCA

$x(k) \quad k=0,1,2,\ldots$

$\shortparallel$

AMMONTARE SOLDI IN FUNZIONE DEL TRIMESTRE K

$x(0)$ = INVESTIMENTO INIZIALE

TASSO 3% $\Rightarrow \alpha = 0.03$

$$x(k+1) = x(k) + \alpha x(k)$$
$$= (1+\alpha)\, x(k)$$
$$\Downarrow$$
$$x(k) = (1+\alpha)^k x(0)$$

DOPO UN ANNO

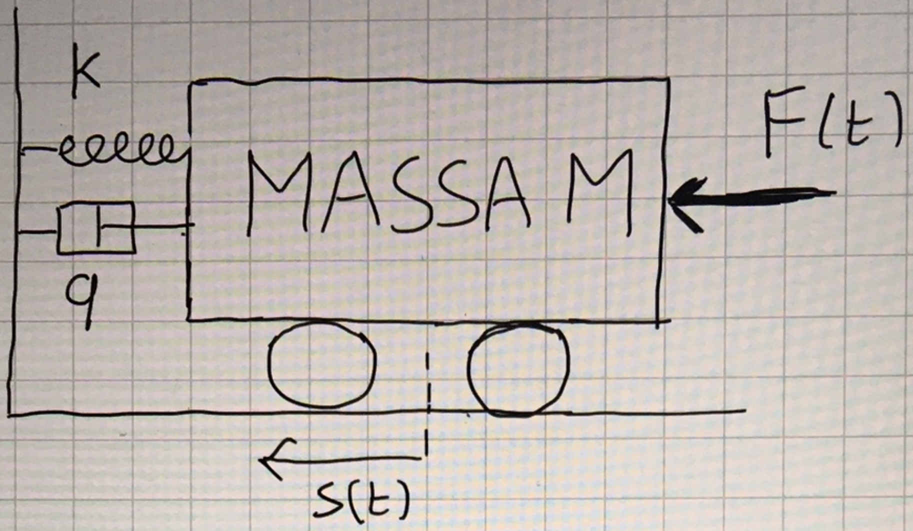
$$x(4) = (1+\alpha)^4 x(0)$$
$$= 1.03^4 x(0)$$
$$\simeq 1.1255\, x(0)$$
$$\Downarrow$$

TASSO ANNUALE = 12.55 %

$$12.55 > 12.5$$
$$\Downarrow$$

CONVIENE LA PRIMA BANCA

CARRELLO



Esso e` fissato ad una parete con una molla avente costante elastica kl (Nt/m) e uno smorzatore con coefficiente d'attrito ql (Nt/sec·m). Il carrello e` soggetto ad una forza F(t) che rappresenta l'ingresso del sistema. Si scriva un modello di stato che descriva la dinamica del carrello utilizzando come variabili di stato lo spostamento s del carrello e la sua velocità e assumendo come uscita lo spostamento

SOLUZIONE:

DALLA LEGGE DI BILANCIO DELLE FORZE:

$$M\ddot{s}(t) = F(t) - q\,\dot{s}(t) - K\,s(t)$$

SIA

$$x_1(t) = s(t)\ ,\quad x_2(t) = \dot{s}(t)$$

$$x_1(t) = s(t) \quad , \quad x_2(t) = \dot{s}(t)$$

$$y(t) = s(t)$$

$$\Downarrow$$

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{q}{M}\, x_2(t) - \frac{k}{M}\, x_1(t) + \frac{u(t)}{M}$$

IN FORMA MATRICIALE

$$\dot{x} = F x + G u$$

$$y = H x$$

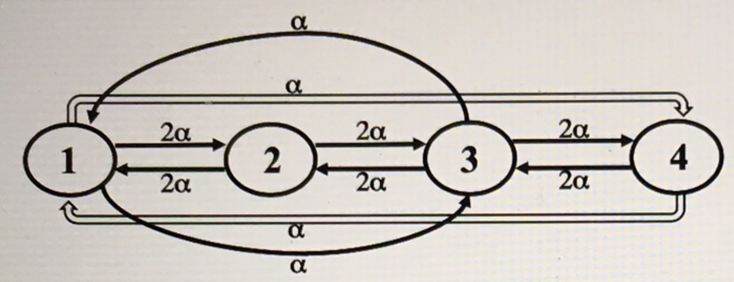
DOVE

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{M} & -\frac{q}{M} \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} \quad , \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

AUTOSTRADE

4 CITTÀ COLLEGATE DA AUTOSTRADE E STRADE PROVINCIALI SECONDO LO SCHEMA



SI ASSUMA CHE IL FLUSSO IN USCITA DA UNA CITTÀ SIA PROPORZIONALE AL N° DI VEICOLI PRESENTI IN CITTÀ CON FATTORI

2α PER AUTOSTRADE

α PER STRADE PROVINCIALI

DESCRIVERE L'EVOLUZIONE NEL TEMPO DELLE AUTO

SOLUZIONE:

SOLUZIONE:

$x_i(t)$ = N° AUTO CITTÀ i AL TEMPO t

$$\dot{x}_1(t) = -4\alpha x_1(t)$$
(UNA AUTOSTRADA E DUE PR. IN USCITA)

$$+2\alpha x_2(t)$$
(AUTOSTRADA DALLA CITTÀ 2)

$$+\alpha x_3(t) + \alpha x_4(t)$$
(PROVINCIALE DA 3 E PROVINCIALE DA 4)

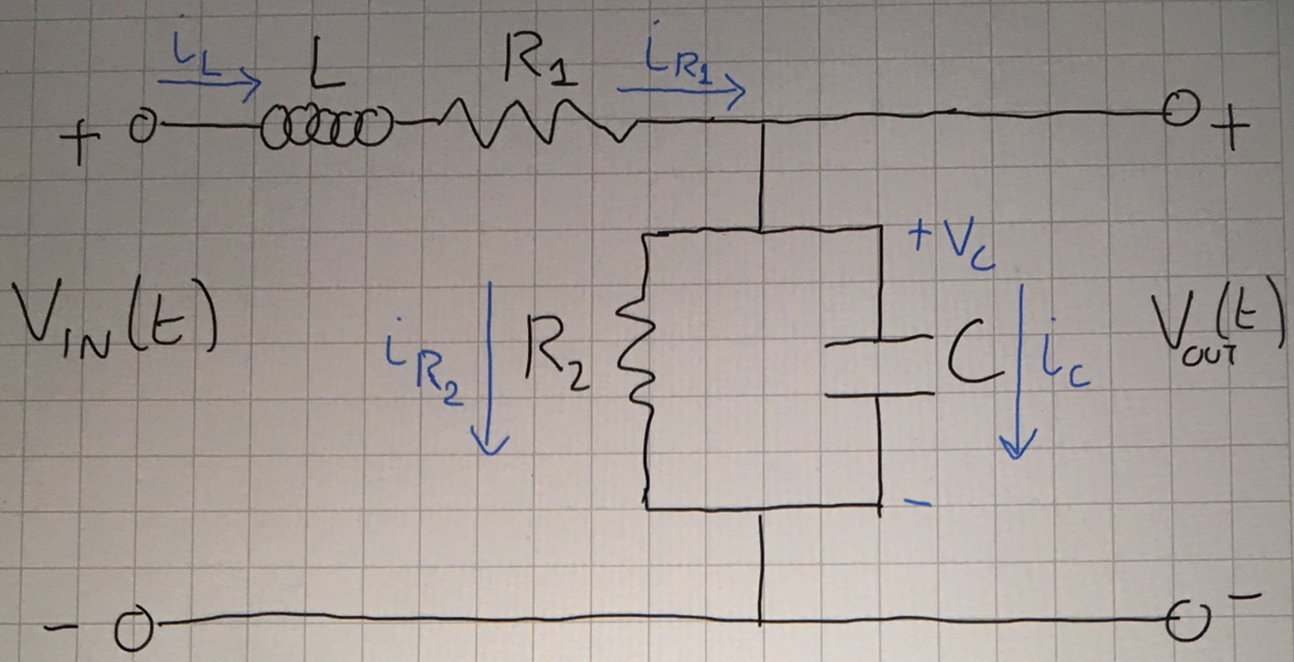
RAGIONANDO POI IN MODO ANALOGO PER LE ALTRE CITTÀ:

$\dot{x} = Fx$, $x(0) = x_0$ = N° TOT AUTO AL TEMPO ZERO

$$F = \alpha \begin{bmatrix} -4 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

NOTA: IL SISTEMA È LINEARE ED AUTONOMO (ASSENZA DI INGRESSI)

RETE ELETTRICA



$$V_{R_j}(t) = R_j \, i_{R_j}(t) \quad , \quad j = 1,2$$

$$V_L(t) = L \frac{d\, i_L(t)}{dt} \quad , \quad i_C(t) = C \frac{d\, V_C(t)}{dt}$$

INTRODUCIAMO DELLE VARIABILI DI STATO:

$$x_1(t) := i_L(t) \, , \quad x_2(t) := v_C(t)$$

KIRCHOFF :

$$\left.\begin{aligned} x_1(t) = i_L(t) = i_{R_1}(t) &= i_{R_2}(t) + i_C(t) \\ &= x_2(t)/R_2 + C\,\dot{x}_2(t) \end{aligned}\right\}$$

CORRENT

$$\left.\begin{aligned} x_1(t) = i_L(t) = i_{R_1}(t) &= i_{R_2}(t) + i_C(t) \\ &= x_2(t)/R_2 + C\,\dot{x}_2(t) \end{aligned}\right\} \text{RRENTI}$$

$$\left. x_2(t) + \underbrace{v_{R_1}(t)}_{R_1 x_1(t)} + L\,\dot{x}_1(t) = V_{IN}(t) =: u(t) \right\} \text{TENSIONI}$$

DA CUI

EQ. DI STATO

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -\dfrac{R_1}{L}\, x_1(t) - \dfrac{1}{L}\, x_2(t) + \dfrac{1}{L}\, \overbrace{V_{IN}(t)}^{\text{INGRESSO } u} \\[2ex] \dot{x}_2(t) = \dfrac{1}{C}\, x_1(t) - \dfrac{1}{R_2 C}\, x_2(t) \end{cases}$$

EQ. DI USCITA

$$y(t) := V_{OUT}(t) = x_2(t)$$

IN FORMA MATRICIALE

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_1/L & -1/L \\ 1/C & -1/R_2 C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u$$

$$\Downarrow$$

$$\dot{x} = Fx + Gu$$
$$y = Hx + Ju$$

GLI ESEMPI VISTI RIENTRANO TUTTI NELLA CLASSE FONDAMENTALE DEI MODELLI DI STATO A TEMPO CONTINUO O DISCRETO (EX. BANCA) LINEARI, TEMPO INVARIANTI E FINITO DIMENSIONALI

TEMPO CONTINUO

$$\dot{x} = Fx + Gu$$

TRANSIZIONE DI

TEMPO CONTINUO

$$\dot{x} = Fx + Gu$$ TRANSIZIONE DI STATO

$$F \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$ n = DIMENSIONE SPAZIO DI STATO

$$G \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}$$ m = DIMENSIONE SPAZIO DI INGRESSO

$$y = Hx + Ju$$ EQUAZIONE DI USCITA

$$H \in \mathbb{R}^{p \times n}, \quad J \in \mathbb{R}^{p \times m}$$

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix} \qquad p = \text{DIMENSIONE SPAZIO DI USCITA}$$

TEMPO DISCRETO

L'UNICA DIFFERENZA È NELL'EQ. DI TRANSIZIONE DI STATO. DA EQ. DIFFERENZIALE A EQ. ALLE DIFFERENZE

$$x(t+1) = F\,x(t) + G\,u(t)$$
$$y(t) = H\,x(t) + J\,u(t)$$

O ANCHE

$$x_{k+1} = F\,x_k + G\,u_k$$
$$y_k = H\,x_k + J\,u_k$$

LO STATO INIZIALE

FISSIAMO L'ISTANTE INIZIALE

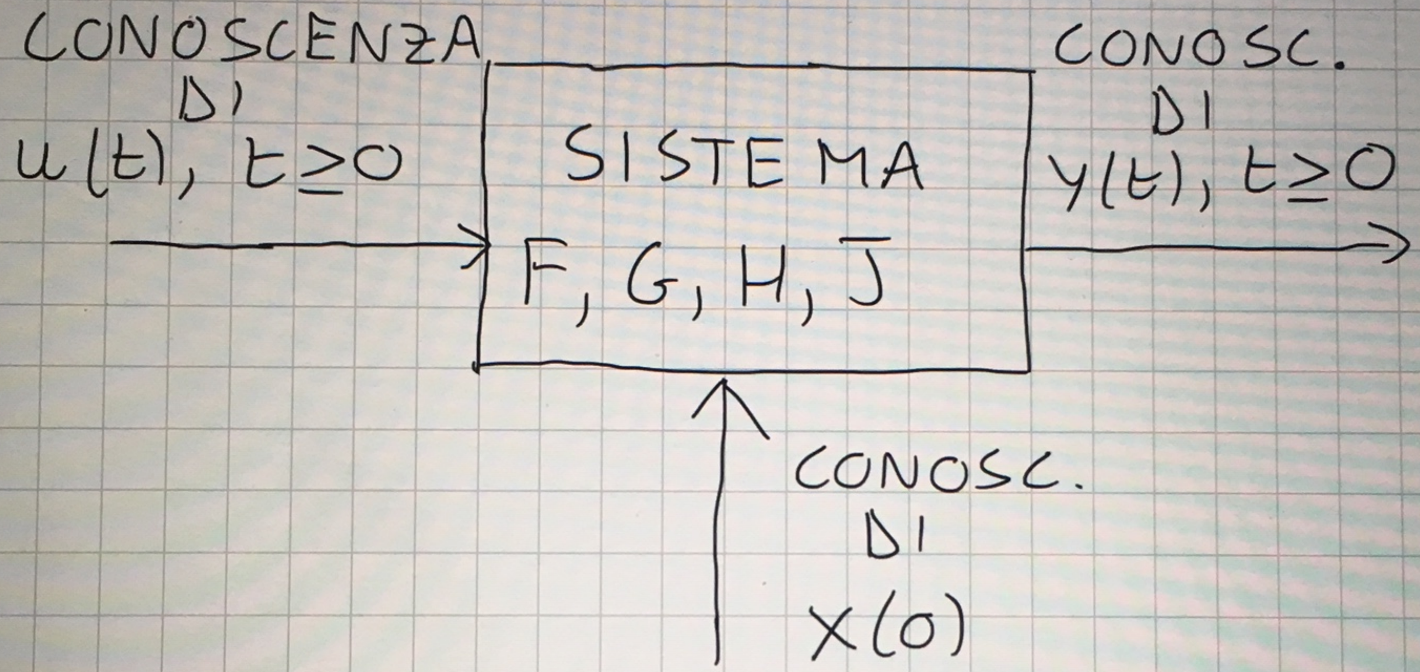
LO STATO INIZIALE

FISSIAMO L'ISTANTE INIZIALE A $t=0$. QUESTO SENZA PERDITA DI GENERALITÀ DATA LA TEMPO INVARIANZA = (F, G, H, J) SONO MATRICI CHE NON VARIANO NEL TEMPO

$x(0)$ = STATO INIZIALE: INCLUDE L'INFORMAZIONE SU QUELLO CHE È ACCADUTO NEL PASSATO, PRIMA DI $t=0$.

IN PARTICOLARE

IN PARTICOLARE



LOTKA – VOLTERRA

Esempio 1.5 (modello di Lotka-Volterra) Consideriamo un sistema isolato dove coesistono solo due specie: i predatori e le prede. La popolazione dei predatori aumenta se la quantita` di cibo (le prede) supera una soglia di sussistenza. La quantita` di cibo e` legata al numero di incontri tra predatori e prede. Le prede hanno una fonte inesauribile di cibo sufficiente a far aumentare il loro numero in assenza di predatori, ma possono essere uccise dai predatori.

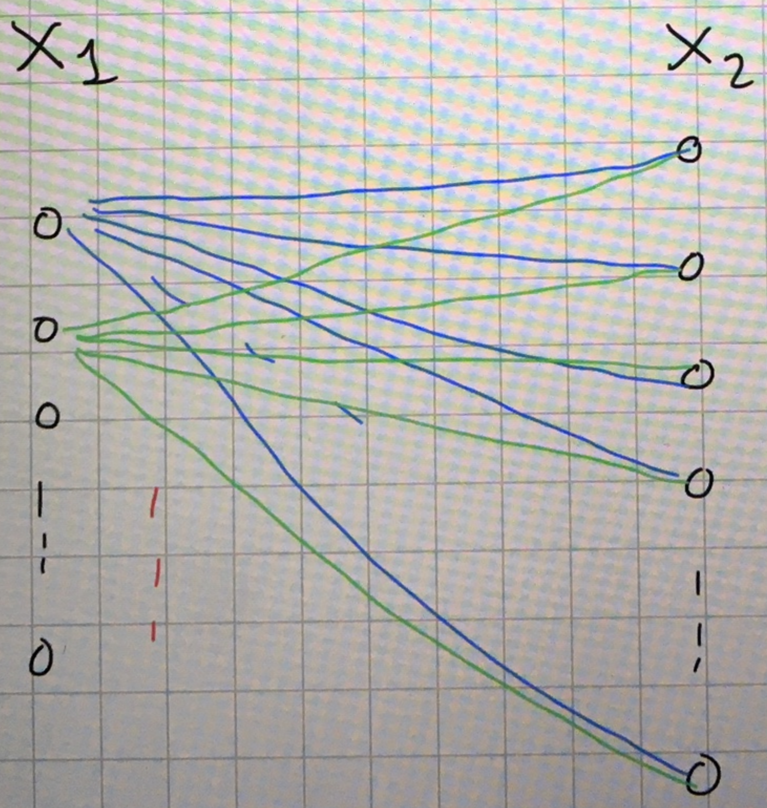
INTRODUCIAMO DUE VARIABILI DI STATO:

$$x_1(t) = N^\circ \text{ DI PREDATORI}$$

$$x_2(t) = N^\circ \text{ DI PREDE}$$

(SONO VARIABILI DISCRETE MA LE STUDIAMO NEL CONTINUO)

IPOTESI: N° DI INCONTRI PROPORZIONALE A $x_1 \cdot x_2$



$S :=$ SOGLIA DI SUSSISTENZA DEI PREDATORI

$a, b, c \in \mathbb{R} :=$ SCALARI OPPORTUNI

$\Downarrow$

$$\dot{x}_1(t) = a\,\overbrace{\left(x_2(t) - S\right)}^{\text{IL SEGNO DIPENDE DAL N° DI PREDE, SE SOPRA O SOTTO } S}$$

$$\dot{x}_2(t) = \underbrace{b\,x_2(t)}_{\text{PREDE NATE (PER UNITÀ DI TEMPO)}} - \underbrace{c\,x_1(t)\,x_2(t)}_{\text{PREDE MANGIATE}}$$

È NON LINEARE!

SIR (SUSCETTIBILI, INFETTI, RIMOSSI)

MODELLO PER LE EPIDEMIE

$$S \longrightarrow I \longrightarrow R$$

$$\dot{S}(t) = -b\,\gamma(t)\,S(t)\,I(t)$$

$$\dot{I}(t) = b\,\gamma(t)\,S(t)\,I(t) - b\,I(t)$$

$$\dot{R}(t) = b\,I(t)$$

$y(t)$ = DATI EPIDEMIOLOGICI
(EX. N° DI INFETTI RILEVATI $\neq I$)

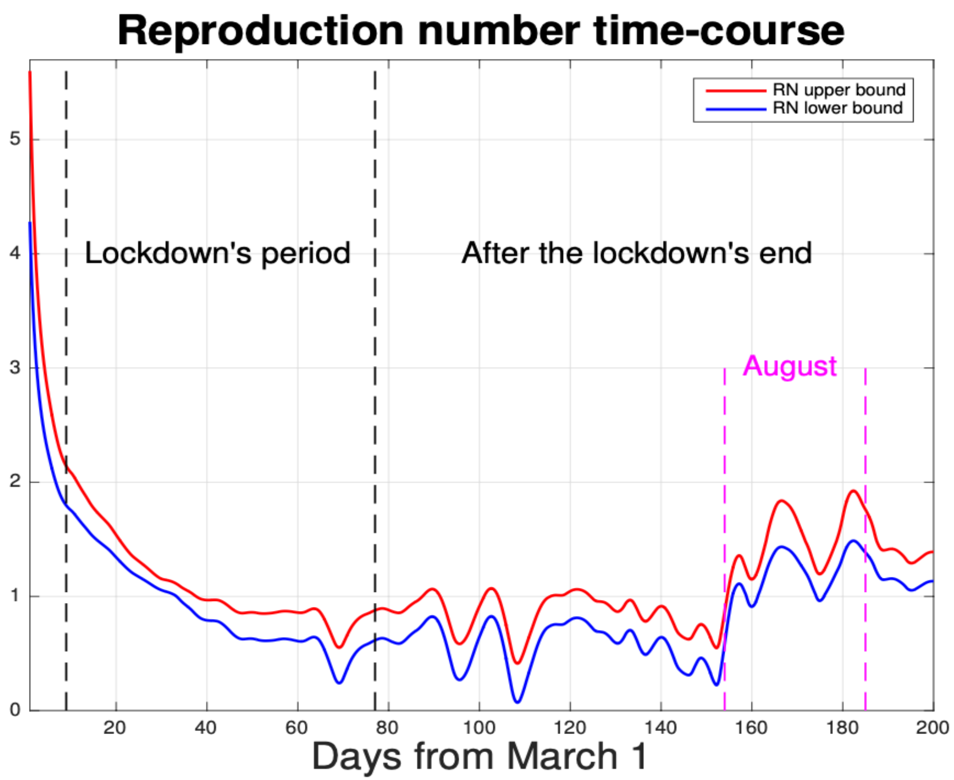
DIMENSIONE DELLO STATO

$n = 3 \quad (S, I, R)$

È NON LINEARE E TEMPO VARIANTE PER LA PRESENZA DI $\gamma(t)$

$\gamma(t)$ = REPRODUCTION NUMBER

$\gamma(t) < 1$ = EPIDEMIA SOTTO CONTROLLO



Tracking the time course of reproduction number and lockdown's effect during SARS-CoV-2 epidemic: nonparametric estimation

Gianluigi Pillonetto, Mauro Bisiacco, Giorgio Palù, Claudio Cobelli

https://arxiv.org/abs/2008.12337

MODELLI DI STATO: LE VARIE CLASSI

NON LINEARI TEMPO VARIANTI

$$\dot{x} = f(x, u, t)$$
$$y = h(x, u, t)$$

TEMPO CONTINUO

$$x_{k+1} = f(x_k, u_k, k)$$
$$y_k = h(x_k, u_k, k)$$

TEMPO DISCRETO

NON LINEARI TEMPO INVARIANTI

TC
$$\dot{x} = f(x, u)$$
$$y = h(x, u)$$

TD
$$x_{k+1} = f(x_k, u_k)$$
$$y_k = h(x_k, u_k)$$

LINEARI TEMPO VARIANTI

TC
$$\dot{x} = F(t)\, x + G(t)\, u$$
$$y = H(t)\, x + J(t)\, u$$

LE MATRICI POSSONO VARIARE

TC $\dot{x} = F(t)x + G(t)u$

$y = H(t)x + J(t)u$

LE MATRICI POSSONO VARIARE NEL TEMPO

TD $x_{k+1} = F_k x_k + G_k u_k$

$y_k = H_k x_k + J_k u_k$

LINEARI TEMPO INVARIANTI

TC $\dot{x} = Fx + Gu$

$y = Hx + Ju$

LE MATRICI NON VARIANO NEL TEMPO

TD $x_{k+1} = Fx_k + Gu_k$

$y_k = Hx_k + Ju_k$

ESERCIZI DI MODELLISTICA

CELLULE

Esercizio 1.8 (dinamica di cellule) In una popolazione di cellule si distinguono tre stati diversi: cellule giovani, mature e vecchie. Si modelli il fenomeno, considerando una dinamica a tempo discreto avente come uscita il numero totale di cellule, dove, ad ogni passo

1. vengono prodotte ex novo cellule giovani, in numero pari ad u (che rappresenta l'ingresso del sistema);

2. ... cellule giovani diventano mature;

ESERCIZI DI MODELLISTICA

CELLULE

Esercizio 1.8 (dinamica di cellule) In una popolazione di cellule si distinguono tre stati diversi: cellule giovani, mature e vecchie. Si modelli il fenomeno, considerando una dinamica a tempo discreto avente come uscita il numero totale di cellule, dove, ad ogni passo
1. vengono prodotte ex novo cellule giovani, in numero pari ad u (che rappresenta l'ingresso del sistema);
2. le cellule giovani diventano mature;
3. un ottavo delle cellule mature si duplica, scomparendo (come cellule mature) ed originando due cellule giovani, mentre i rimanenti sette ottavi diventa- no vecchie (in sostanza, esistono due distinti meccanismi di generazione di cellule nuove: ex novo - vedi il punto 1 - e da duplicazione di cellule mature);
4. delle cellule vecchie, la meta` muore e l'altra meta` sopravvive rimanendo nello stato di cellula vecchia.

SOLUZIONE:

$t \in \{ \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \}$

$x_1(t)$ = CELLULE GIOVANI

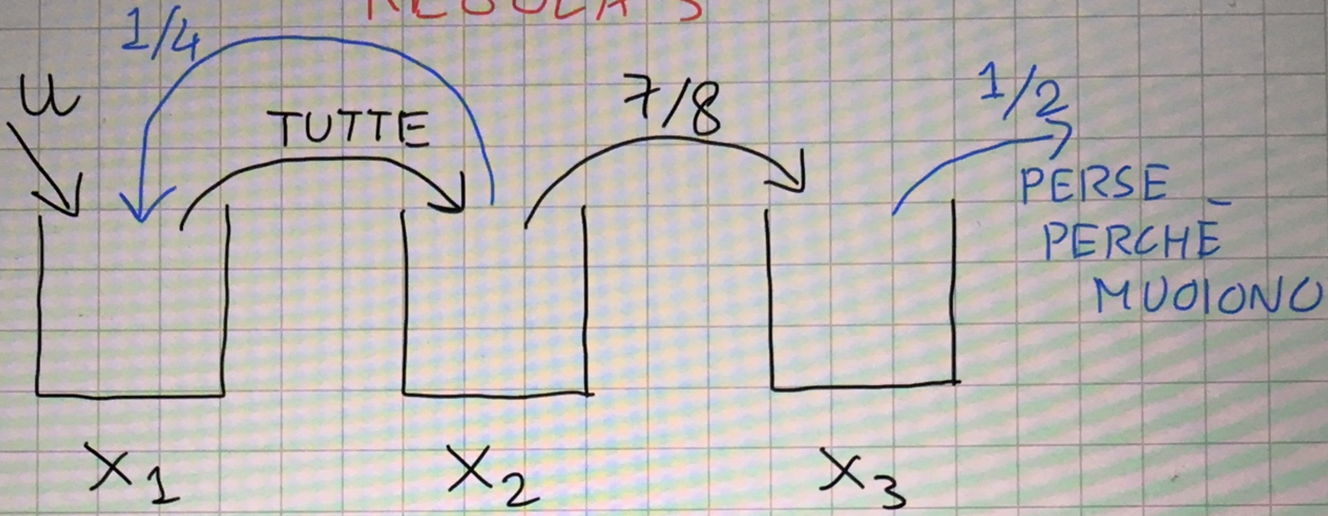
$x_2(t)$ = MATURE, $x_3(t)$ = VECCHIE

$$x_1(t+1) = \underbrace{u(t)}_{\text{REGOLA 1}} + \underbrace{2x_2(t)/8}_{\text{REGOLA 3}}$$

$$x_2(t+1) = \underbrace{x_1(t)}_{\text{REGOLA 2}}$$

$$x_3(t+1) = \frac{7}{8}\, x_2(t) + \frac{x_3(t)}{2}$$

REGOLA 3 REGOLA 4



IN FORMA MATRICIALE

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1/4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7/8 & 1/2 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x(t+1) = F\,x(t) + G\,u(t)$$

$$y(t) = H\,x(t)$$

DINAMICA STUDENTI

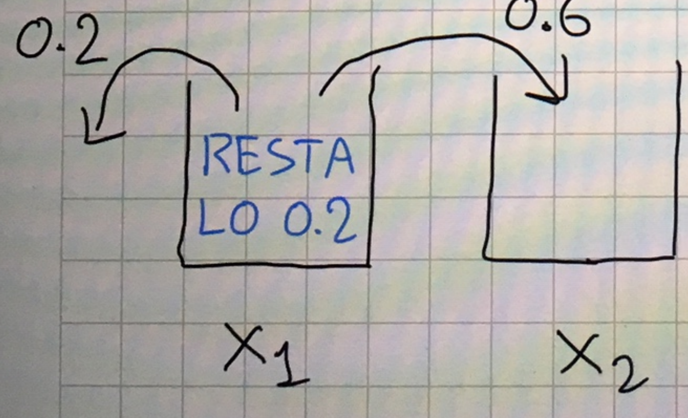
Esercizio 1.10 (dinamica del numero di studenti) Si costruisca un modello che descrive la dinamica di una coorte di N studenti che il 1o Ottobre 2013 (inizio dell'anno scolastico t = 0) si immatricola in un corso di studi triennale. Le variabili di stato xi(t), i = 1, 2, 3 sono le numerosita` degli studenti iscritti al 1o , 2o e 3o anno del corso di studi all'inizio degli anni scolastici successivi al 2013. Quindi t = 1 si riferisce all'anno scolastico che inizia il 1o Ottobre 2014, t = 2 all'anno scolastico che inizia il 1o Ottobre 2015, e cosi' via. Si fanno le seguenti ipotesi, che valgono per ogni anno scolastico:

- degli studenti iscritti al 1o anno del corso di studi, il 20% abbandona il corso di studi, il 60% viene promosso al 2o anno di corso di studi;
- degli studenti iscritti al 2o anno del corso di studi, il 5% abbandona, l'80% viene promosso al 3o anno del corso di studi;
- non ci sono abbandoni tra gli iscritti al 3o anno del corso di studi;
- il 90% degli iscritti al 3o anno del corso di studi supera con successo gli esami finali e ottiene il titolo;
- Le variabili di uscita yi(t), i = 1,2 sono, rispettivamente, il numero totale di iscritti al corso di studi all'inizio dell'anno scolastico t, e il numero di studenti che nell'anno scolastico t ottiene il titolo.

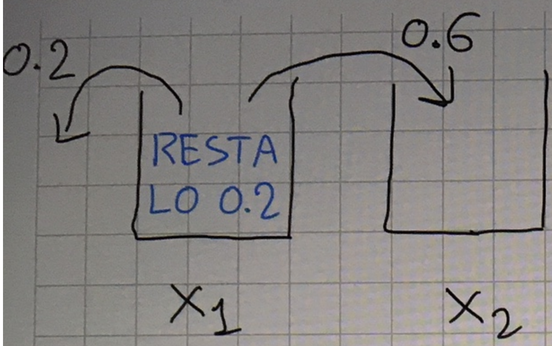
SOLUZIONE:

$$x_1(t+1) = 0.2\, x_1(t)$$

VISTO CHE IL 20% ABBANDONA E IL 60% PASSA AL 2° ANNO



$$x_2(t+1) = 0.6\, x_1(t) + 0.15\, x_2(t)$$

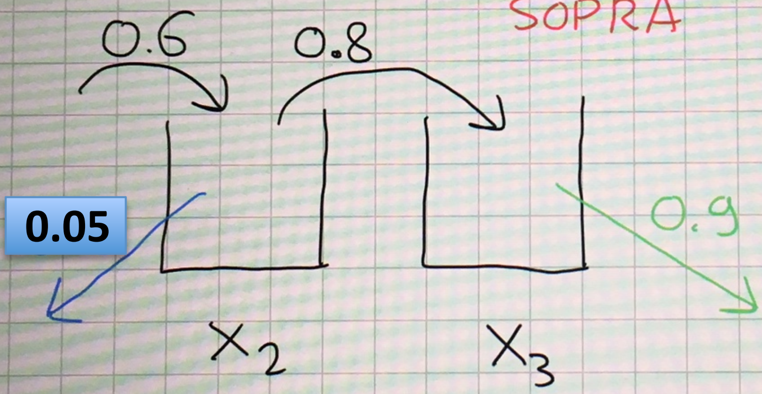


IL 20% ABBANDONA E IL 60% PASSA AL 2° ANNO

$$x_2(t+1) = 0.6\,x_1(t) \quad + \quad 0.15\,x_2(t)$$

SONO QUELLI CHE PROVENGONO DAL 1° ANNO, COME DA FIGURA SOPRA

5% LASCIA, 80% PROMOSSO
⇓
15% RESTA AL 2° ANNO



$$x_3(t+1) = 0.8\,x_2(t) \quad + \quad 0.1\,x_3(t)$$

DAL 2° ANNO, VEDI FIGURA SOPRA

90% SI LAUREA, VEDI FIGURA, USCENDO DAL SISTEMA

DINAMICA POPOLAZIONI

DINAMICA POPOLAZIONI

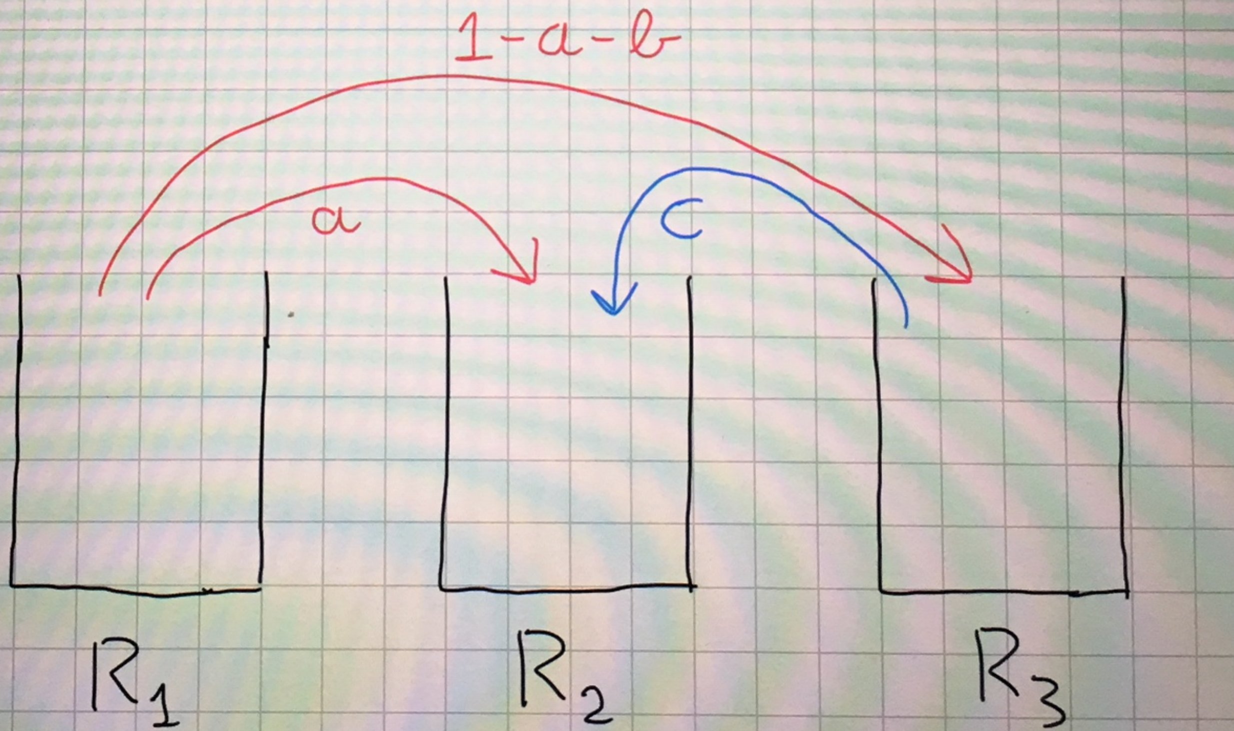
Tre regioni sono soggette a fenomeni di immigrazione/emigrazione. Indicando con xi(t), i = 1, 2, 3 il numero di soggetti nelle regioni 1, 2, 3, rispettivamente, all'inizio dell'anno t−esimo, le migrazioni sono soggette alle seguenti regole

- ogni anno, solo una percentuale (della popolazione presente all'inizio del- l'anno) b (0 < b < 1) rimane nella regione 1, una percentuale a (0 < a < 1 − b) emigra verso la regione 2 e la rimanente percentuale emigra verso la regione 3
- ogni anno, una percentuale (della popolazione presente all'inizio dell'anno) c (0 < c < 1) emigra dalla regione 3 alla regione 2

Si ricavi un modello di stato (a tempo discreto) per descrivere la dinamica delle popolazioni delle 3 regioni.

SOLUZIONE

— = REGOLA 1 — = REGOLA 2



$$x_1(t+1) = b\, x_1(t)$$

$$x_1(t+1) = b\, x_1(t)$$

$$x_2(t+1) = a\, x_1(t) + c\, x_3(t) + \underbrace{x_2(t)}_{\text{NESSUNO EMIGRA DA } R_2}$$

$$x_3(t+1) = (1-a-b)\, x_1(t) + (1-c)\, x_3(t)$$

DINAMICA DI UNA SPECIE

Una specie A e` caratterizzata da un tasso di natalita` pari ad a > 0 (la derivata della popolazione e` direttamente proporzionale, tramite il coefficiente a, alla popolazione stessa) ed uno di mortalita` b (stesso significato precedente, a meno di un cambio di segno). La specie A abita tre regioni R1 , R2 , R3 , e puo` spostarsi tra le varie regioni, caratterizzate da diversi comportamenti nei flussi e nella mortalita`. Siano x1,x2,x3 le popolazioni rispettive nelle tre regioni e sia y l'uscita pari alla popolazione totale associata alla specie A. Si considerino le seguenti regole dove viene introdotta anche una seconda specie B che va associata ad x4:

• Dalla regione R2 esiste un flússo solo verso R3, caratterizzato dal coefficien- te di flusso 1.5;

• Non esistono altri flussi tra le tre regioni oltre ai precedenti e in tutte le regioni R1,R2,R3 il tasso di natalita` e` a = 3;

•Nelle regioni cambia il tasso di mortalità':in R1 e`b=1+0.01x1(cresce con la popolazione causa carenza di cibo), in R2 e R3 e` b = 1 (costante essendoci cibo in abbondanza);

• In R2 vi e` pero` un ulteriore motivo di mortalita´: la presenza di una specie B (predatori) che si nutre di A, aumentando il tasso di mortalita` di 0.1x4 e portandolo a b = 1 + 0.1x4 (x4 = popolazione B);

• La specie B ha tasso di natalita` a = 2 e di mortalita` b = 3−0.02x2 (A da` cibo abbassando la mortalita`).

Si scriva un modello di stato che descrive la dinamica della specie.

SOLUZIONE:

SOLUZIONE:

TASSO DI MORT. NON COST., FUNZIONE DI x_1 $\Rightarrow$ NON LINEARITÀ

$$\dot{x}_1 = \underbrace{3x_1}_{\text{NATALITÀ}} - \underbrace{\overbrace{(1+0.01x_1)}^{\text{TASSO DI MORT. NON COST., FUNZIONE DI } x_1 \Rightarrow \text{NON LINEARITÀ}}x_1}_{\text{MORTALITÀ}}$$

$$\dot{x}_2 = \underbrace{3x_2}_{\text{NATALITÀ}} - \underbrace{(1+0.1x_4)x_2}_{\text{MORTALITÀ}} \underbrace{- 1.5x_2}_{\text{FLUSSO VERSO } R_3}$$

$$\dot{x}_3 = \underbrace{3x_3}_{\text{NAT.}} - \underbrace{x_3}_{\text{MORT.}} + \underbrace{1.5x_2}_{\text{FLUSSO DA } R_2}$$

NOTA:
I FLUSSI SI COMPENSANO, NAT. E MORT. OVVIAMENTE NO

$$\dot{x}_4 = \underbrace{2x_4}_{\text{NAT.}} - \underbrace{(3-0.02x_2)x_4}_{\text{MORT.}}$$

$$y = x_1 + x_2 + x_3$$

TERMOREGOLAZIONE

E richiesto di modellizzare la termoregolazione della temperatura di una stanza, supponendo che valgano le seguenti regole:

- esistono due temperature di riferimento (da considerare come gli ingressi del sistema): la temperatura desiderata (all'interno della stanza) e la temperatura presente all'esterno della stanza;
- esistono altre due temperature (da considerare come variabili di stato): la temperatura effettiva all'interno della stanza e quella misurata da un termometro (che gioca anche il ruolo di variabile di uscita del sistema). La misura del termometro non si adatta istantaneamente alle variazioni di temperatura, ma obbedisce ad una legge di aggiornamento in base alla qua- le la derivata temporale della misura e` proporzionale, secondo la costante a > 0, alla differenza tra la temperatura effettiva e la misura fornita dal termometro all'istante attuale;
- un elemento riscaldante fornisce un flusso di calore proporzionale, secondo la costante b > 0, alla differenza tra la temperatura desiderata e quella misurata dal termometro e, a causa della dispersione termica dei muri, esiste anche un flusso di calore verso l'esterno, proporzionale, secondo la costante c > 0, alla differenza tra la temperatura effettiva all'interno della stanza e quella all'esterno;
- la temperatura effettiva risente dei flussi di calore appena menzionati, secondo una legge in base alla quale la derivata temporale della temperatura effettiva e` proporzionale, secondo la costante d > 0, alla somma (algebrica) dei flussi entranti/ uscenti di calore

SOLUZIONE

DUE INGRESSI:

$u_1(t)$ = TEMPERATURA DESIDERATA

$u_2(t)$ = TEMPERATURA ESTERNA

R1

STATI:

$x_1(t)$ = TEMP. EFFETTIVA

R2

$$\left.\begin{array}{l} x_1(t) = \text{TEMP. EFFETTIVA} \\ x_2(t) = \text{TEMP. MISURATA} \\ \dot{x}_2 = a(x_1 - x_2) \end{array}\right\} \text{R2}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{FLUSSO CALORE ENTRANTE} = b(u_1 - x_2) \\ \text{FLUSSO CALORE USCENTE} = -c(x_1 - u_2) \end{array}\right\} \text{R3}$$

$$\dot{x}_1 = d\left(b(u_1 - x_2) - c(x_1 - u_2)\right) \quad \text{R4}$$

FORMA MATRICIALE

$$\dot{x} = Fx + Gu$$

$$F = \begin{bmatrix} -cd & -bd \\ a & -a \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} bd & cd \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

SE VOGLIAMO COME USCITA

SOLO LA TEMP. MISURATA

$$y = Hx, \quad H = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

GESTIONE DI UN AEREOPORTO

Un aeroporto dispone di quattro aree di manovra: l'area A1 e` destinata alle operazioni di sbarco dei passeggeri ed e` collegata direttamente alla pista di atterraggio; l'area A2 e` destinata alle operazioni di imbarco ed e` collegata alla pista di decollo attraverso un'area di attesa A4; l'area A3 e` dedicata alla sosta degli aeromobili che arrivano dall'area A1 pri- ma di essere trasferiti nell'area A2.
Si descriva con un modello l'evoluzione dinamica del numero di aerei (equazioni e condizioni iniziali) sotto le seguenti ipotesi

- il flusso di aerei che, appena atterrati, si immettono nell'area A1 dipende dal tempo, seguendo un andamento descritto dalla funzione F1(t);
- il flusso di aerei dall'area A1 all'area A3 e` proporzionale, con costante di proporzionalita` unitaria, alla quantita` di aerei presenti in A1;
- il flusso di aerei dall'area A3 all'area A2 e` proporzionale, con costante di proporzionalita` α, alla disponibilita` di spazio nell'area A2, misurata come differenza tra il numero massimo di aerei in essa ospitabili (Xmax) e il numero di aerei effettivamente presenti;
- il flusso di aerei dall'area A2 all'area A4 e` proporzionale, con costante di proporzionalita` unitaria, alla quantita` di aerei presenti in A2;
- Il flusso di aerei che decollano nell'unita` di tempo e` proporzionale, con co- stante di proporzionalita` pari a β, alla quantita` di aerei nell'area di attesa A4;
- tutti i flussi non menzionati sono non ammessi, e quindi sono da considerare nulli;
- al tempo zero, le aree A1, A2, A4 sono vuote mentre ci sono 100 apparecchi nell'area di sosta.

SOLUZIONE: x_i = N° AEREI IN A_i

$$\dot{x}_1 = \overbrace{F_1}^{R_1} - \overbrace{x_1}^{R_2}$$

$$\dot{x}_2 = \underbrace{-x_2}_{R_4} + \underbrace{\alpha(x_{MAX} - x_2)}_{R_3}$$

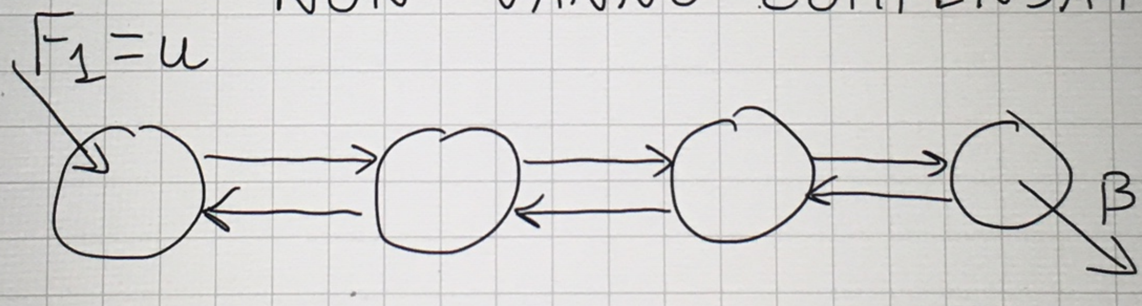
$$\dot{x}_3 = \underbrace{x_1} - \underbrace{\alpha(x_{MAX} - x_2)}$$ COMPENSANO I DUE VISTI

$$\dot{x}_3 = \underbrace{x_1}_{R_2} - \underbrace{\alpha(x_{MAX} - x_2)}_{R_3}$$

COMPENSANO I DUE VISTI PRIMA

$$\dot{x}_4 = \underbrace{x_2}_{R_4} - \underbrace{\beta x_4}_{R_5}$$

NOTA: F_1 E $-\beta x_4$ FLUSSI IN INGRESSO E USCITA CHE NON VANNO COMPENSATI



INFINE

$$y(t) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$

$$x_1(0) = x_2(0) = x_4(0) = 0$$

$$x_3(0) = 100$$

$$\Downarrow$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_1(0) = x_2(0) = x_4(0) = 0$$

$$x_3(0) = 100$$

$$\Downarrow$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \\ 0 \end{bmatrix}$$

PUNTI DI EQUILIBRIO

SONO PUNTI NEI QUALI IL SISTEMA RIMANE FERMO, $x(t) = x_0 \quad \forall t$

CONSIDERIAMO

$$\dot{x} = \bar{f}(x, u) \qquad TC$$

TIPICAMENTE SI FA RIFERIMENTO A SISTEMI CON INGRESSO COSTANTE OPPURE AUTONOMI PER LA DEFINIZIONE FORMALE. QUINDI CI RICONDUCIAMO A CONSIDERARE

$$\dot{x} = f(x).$$

x_0 È PTO DI EQUILIBRIO SE

$$\boxed{f(x_0) = 0} \qquad TC$$

SE CONSIDERIAMO IL TEMPO DISCRETO:

$$x_{k+1} = f(x_k)$$

SE CONSIDERIAMO IL TEMPO DISCRETO:

$$x_{k+1} = f(x_k)$$

$$\boxed{\begin{array}{c} x_0 \text{ È PTO DI} \\ \text{EQUILIBRIO} \\ \text{SE} \\ x_0 = f(x_0) \end{array}} \quad \text{TD}$$

L'INSIEME DEI PUNTI DI EQ. SI TROVA QUINDI RISOLVENDO DELLE EQUAZIONI ALGEBRICHE. NON POSSIAMO A PRIORI DIRE NULLA SULLA SUA STRUTTURA. POTREBBE ANCHE ESSERE $\emptyset$ (INSIEME VUOTO)

CASO LINEARE

$$\dot{x} = Fx$$

CASO LINEARE

$\dot{x} = Fx$

x_0 È PTO DI EQUILIBRIO SE

$$Fx_0 = 0$$

$$\Downarrow$$

S = INSIEME PTI DI EQ. = KER F

LINEARE TC

$S \neq \emptyset$ PERCHÉ CONTIENE ALMENO 0

S = SOTTOSPAZIO

$x_{k+1} = Fx_k$

$$x_{k+1} = F x_k$$

x_0 È PTO DI EQUILIBRIO

SE

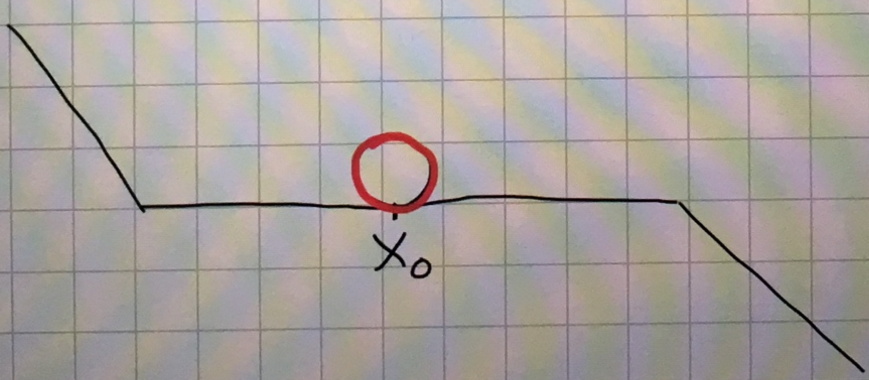
$$A x_0 = 0, \quad A = F - I$$

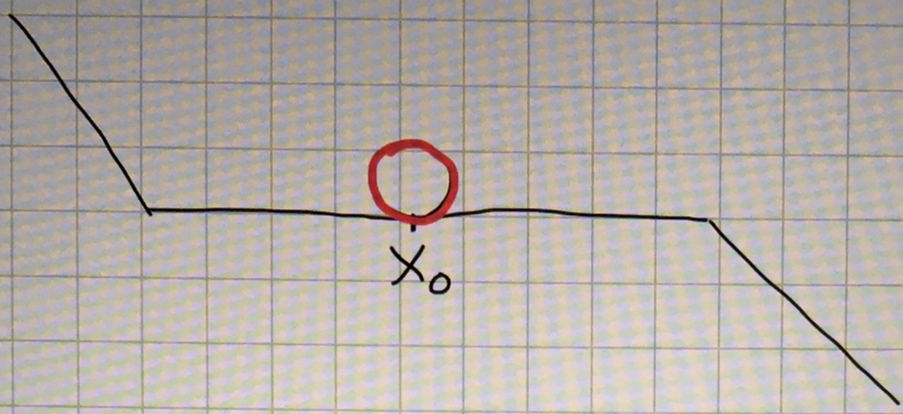
$$S = \ker A$$

LINEARE TD

STABILITÀ

INTUITIVAMENTE UN PTO DI EQ. x_0 È STABILE SE UN PICCOLO SCOSTAMENTO DA x_0 DETERMINA UN'EVOLUZIONE I CUI PUNTI SONO VICINI AD x_0





EQUILIBRIO SEMPLICEMENTE STABILE

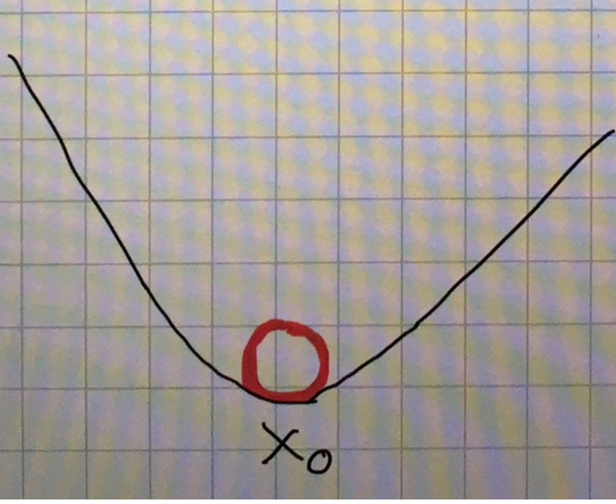
x_e È PUNTO DI EQ. SEMPL. STABILE

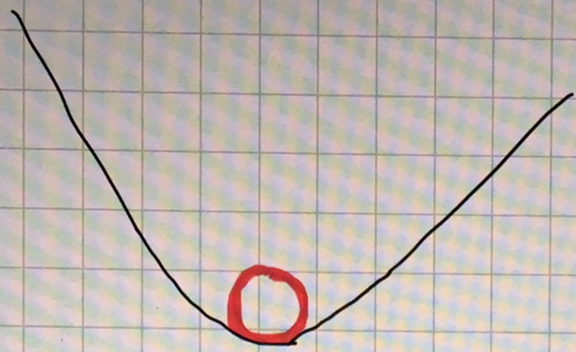
SE $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ T.C.

$$\| x(0) - x_e \| \leq \delta \Rightarrow \| x(t) - x_e \| \leq \varepsilon$$

$$\forall t \geq 0$$

($x(t)$ = EV. LIBERA DA $x(0)$)





x_0

EQUILIBRIO ASINTOTICAMENTE STABILE

x_e È PTO DI EQUILIBRIO ASINTOTICAMENTE STABILE SE

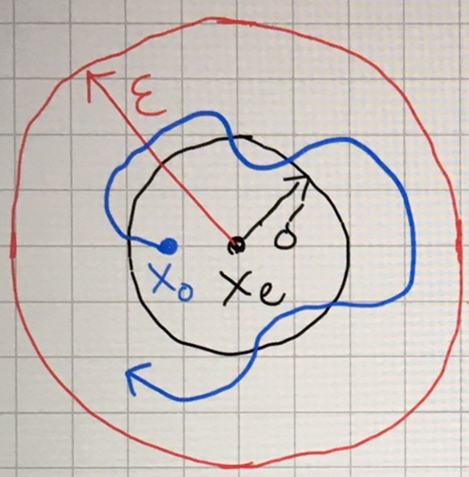
- È SEMPLICEMENTE STABILE
- $\exists\ \delta > 0$ T.C.

$$\|x(0) - x_e\| < \delta \implies \lim_{t \to +\infty} \|x(t) - x_e\| = 0$$

SEMPLICEMENTE STABILE

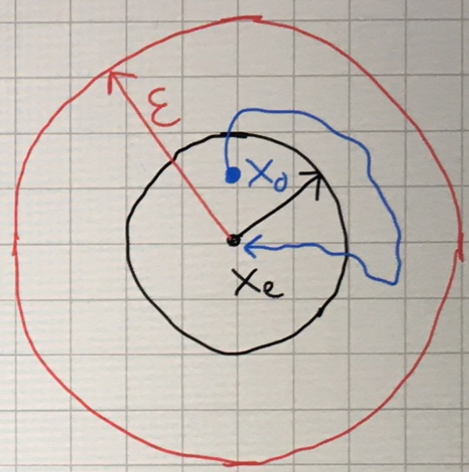
ASINTOTICAM. STABILE

SEMPLICEMENTE STABILE



RIMANE A DISTANZA $< \varepsilon$ DA x_e SE PARTE DA DISTANZA $< \delta$

ASINTOTICAM. STABILE



NON SOLO RIMANE A DISTANZA $< \varepsilon$ MA POI CONVERGE A x_e

NOTE PROPEDEUTICHE AD UN IMPORTANTE TEOREMA

- PER SISTEMI LINEARI SI PUÒ PARLARE DI STABILITÀ DEL SISTEMA INVECE CHE DEL PUNTO DI EQ.

- PER SISTEMI LINEARI SI PUÒ PARLARE DI STABILITÀ DEL SISTEMA INVECE CHE DEL PUNTO DI EQ.

INFATTI CI SI PUÒ SEMPRE RICONDURRE ALLO STUDIO DELL'EQ. DELL'ORIGINE:

SIA x_e PTO DI EQ. E INTRODUCIAMO

$$z = x - x_e \Rightarrow \dot{z} = \dot{x}$$

$$\Rightarrow \dot{z} = \dot{x} = Fx = F(z + x_e)$$

$$= Fz + \underbrace{Fx_e}_{\substack{=0 \\ \text{PER HP}}} = Fz$$

$$\Downarrow$$

CI SIAMO RICONDOTTI A STUDIARE LA STABILITÀ IN $z=0$ $(x=x_e)$ DI

$\dot{z} = Fz$ (È LO STESSO SISTEMA DI PARTENZA $\dot{x} = Fx$ CON x_e DIVENTATO L'ORIGINE)

- $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}, \quad \|v\|^2 = \sum_{i=1}^{n} v_i^2$

SI HA $\forall\ F \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$\|Fv\| \leq \gamma \|v\|$$

$$\gamma := n\sqrt{n} \max_{i,j} |F_{ij}| \quad (*)$$

TEOREMA (3.8 NEL LIBRO)

CONSIDERIAMO $\dot{x} = Fx$

1) STABILITÀ SEMPLICE $\Longleftrightarrow$ LIMITATEZZA DEI MODI DI e^{Ft}

2) ASINTOTICA STABILITÀ $\Longleftrightarrow$ CONVERGENZA DEI MODI DI e^{Ft} $(\mathrm{Re}\,\lambda_i < 0\ \forall i)$

(COERENTE CON LA DEF. DI SISTEMA AS. STABILE DATA TEMPO FA)

ESERCIZIO SUI PUNTI DI EQUILIBRIO (1.18)

CERCHEREMO PUNTI DI EQ.
ANCHE PER INGRESSI $u(t) \neq 0$
E COSTANTI, $u(t) = \bar{u} \ \forall t$
SOTTOLINEANDO LA STRUTTURA
DELLE SOLUZIONI.

a) $F = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, $G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

CALCOLARE I PTI DI EQ.
PER

$$\dot{x} = Fx + Gu$$

E

$$x_{t+1} = Fx_t + Gu_t$$

CON $u(t) = 4 = u_t \quad \forall t$

TEMPO CONTINUO

TEMPO CONTINUO

IN GENERALE I PTI DI EQ.

SONO LE x T.C.

$$Fx + G\bar{u} = 0 \quad (*)$$

E FORMANO L'INSIEME AFFINE, EVENTUALMENTE VUOTO,

$$\bar{x} + KER(F)$$

DOVE $\bar{x}$ È UNA QUALSIASI SOLUZIONE DI $(*)$.

SE F HA RANGO PIENO

$$\bar{x} = -F^{-1}G\bar{u}$$

$$KER(F) = \emptyset$$

QUESTO ACCADE NELL'EX, POICHÉ

$$\det F = \det \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} = 8.$$

$$\det F = \det \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = 8 .$$

SI HA

$$F^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 \\ -1/4 & 1/8 \end{bmatrix}$$

$$G\bar{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\bar{x} = -F^{-1} G\bar{u} = -\begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

TEMPO DISCRETO

SI DEVONO ORA TROVARE

x T.C.

$$Fx + G\bar{u} = x$$

$$Fx + G\bar{u} = x$$

$$\Updownarrow$$

$$Ax + G\bar{u} = 0, \quad A = F - I.$$

QUINDI I PTI DI EQ. FORMANO L'INSIEME AFFINE

$$\bar{x} + KER(A).$$

NELL' EX. PROPOSTO,

$$A = F - I = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

ED È CHIARAMENTE INVERTIBILE

$$\Downarrow$$

$$\bar{x} = -A^{-1}G\bar{u} = -A^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

INVECE DI INVERTIRE A

INVECE DI INVERTIRE A

POSSIAMO ANCHE IMPOSTARE

IL SISTEMA

$$A\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} b = 0 \\ 2a + 3b = -4 \end{cases} \iff a = -2, \; b = 0$$

DA CUI

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

b) SIA ORA

$$\quad \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 \end{bmatrix}$$

b) SIA ORA

$$F = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

E CONSIDERIAMO

$$\dot{x} = Fx + G\bar{u}$$

ORA

$$\det F = 0.$$

$\exists$ UNA SOLUZIONE PARTICOLARE

$$\Updownarrow$$

$$-\begin{bmatrix} -4 \\ 8 \end{bmatrix} = -G\bar{u} \in \underbrace{\mathrm{IM}\begin{bmatrix} F \end{bmatrix}}_{\substack{\text{SOTTOSPAZIO} \\ \text{GENERATO DALLE} \\ \text{COLONNE DI F}}} = \left\langle \begin{matrix} 1 \\ -2 \end{matrix}, \begin{matrix} -2 \\ 4 \end{matrix} \right\rangle$$

$\exists\ \bar{x}$ POICHÉ IL SISTEMA

$$a \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \end{bmatrix}$$

$\exists\ \bar{x}$ POICHÈ IL SISTEMA

$$a\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}-2\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}+4\\-8\end{bmatrix}$$

HA AD ESEMPIO SOLUZIONE

$$\bar{x}=\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\-2\end{bmatrix}.$$

QUINDI L'INSIEME DEI PTI DI EQUILIBRIO È NON VUOTO, È

$$\begin{bmatrix}0\\-2\end{bmatrix}+\ker F$$

CALCOLIAMO ALLORA IN CONCLUSIONE

$$x\in\ker F \iff Fx=0,\quad x=\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{bmatrix}1&-2\\-2&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}=0$$

$$\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} a = 2b \\ 2a = 4b \end{cases} \Longleftrightarrow \quad a = 2b$$

DA CUI

$$\mathrm{KER}\ F = \begin{bmatrix} 2b \\ b \end{bmatrix},\ b \in \mathbb{R} = b \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix},\ b \in \mathbb{R}$$

$$= \left\langle \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \right\rangle$$

NOTA

$$n = \underbrace{\mathrm{DIM}(\mathrm{IM}\ F)}_{\text{RANGO DI } F} + \underbrace{\mathrm{DIM}(\mathrm{KER}\ F)}_{\text{DIMENSIONE SPAZIO NULLO DI } F}$$

LINEARIZZAZIONE

DATO

$$\dot{x} = f(x,u), \quad \text{CON } f(\bar{x},\bar{u}) = 0$$
$$y = h(x,u)$$

LA PROCEDURA DI LINEARIZZAZIONE RICHIEDE IL CALCOLO DI 4 JACOBIANI. SIA $\dim x = n$, $\dim u = m$ E CONSIDERIAMO PRIMA L'EQ. DI STATO. LA VERSIONE LINEARIZZATA ATTORNO ALL'EQUILIBRIO $(\bar{x},\bar{u})$ È

$$\Delta\dot{x} = F(\bar{x},\bar{u})\,\Delta x + G(\bar{x},\bar{u})\,\Delta u$$

DOVE $F(\bar{x},\bar{u})$ e $G(\bar{x},\bar{u})$ SONO I PRIMI DUE JACOBIANI DI INTERESSE. È EVIDENTE CHE IL SECONDO MEMBRO È L'APPROSSIMAZIONE DEL PRIMO

IL SECONDO MEMBRO È

L'APPROSSIMAZIONE DEL PRIMO

ORDINE DI f ATTORNO A $(\bar{x}, \bar{u})$:

$$f(x,u) = \underbrace{f(\bar{x},\bar{u})}_{=0} + F(\bar{x},\bar{u})(x-\bar{x}) + G(\bar{x},\bar{u})(u-\bar{u})$$

+ INFINITESIMI DI ORDINE SUPERIORE PER $(x,u) \to (\bar{x},\bar{u})$

SI HA POI

$$\underbrace{\dot{x}(t)}_{= f(x,u)} = \dot{(x(t) - \bar{x})} = \Delta \dot{x}$$

E L'ESPRESSIONE LINEARIZZATA

HA UN SENSO ORA PIŪ CHIARO.

MA COME SI CALCOLANO

$F(\bar{x},\bar{u})$ E $G(\bar{x},\bar{u})$?

RICORDIAMO CHE

RICORDIAMO CHE

$$f(x,u) = \text{FUNZIONE VETTORIALE} = \begin{bmatrix} f_1(x,u) \\ f_2(x,u) \\ \vdots \\ f_n(x,u) \end{bmatrix}$$

ALLORA

$$F(\bar{x},\bar{u}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

E

$$\Big[F(\bar{x},\bar{u}) \Big]_{ij} = \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|_{(\bar{x},\bar{u})}$$

$i = 1, \dots, n; \; j = 1, \dots, n$

SI HA POI

$$G(\bar{x},\bar{u}) \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

E

$$G(\bar{x}, \bar{u}) \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

E

$$\left[G(\bar{x}, \bar{u}) \right]_{ij} = \left. \frac{\partial f_i}{\partial u_j} \right|_{(\bar{x}, \bar{u})}$$

$i = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, m$.

RIGUARDO ALL'EQUAZIONE

DI USCITA, CON $\dim y = p$,

$$\underset{\substack{\parallel \\ y(t) - \underset{\substack{\text{ALL'EQUILIBRIO} \\ \parallel \\ h(\bar{x}, \bar{u})}}{y}}}{\Delta y} = H(\bar{x}, \bar{u}) \Delta x + J(\bar{x}, \bar{u}) \Delta u$$

CON

$$\left[H(\bar{x}, \bar{u}) \right]_{ij} = \left. \frac{\partial h_i}{\partial x_j} \right|_{(\bar{x}, \bar{u})}$$

$$\left[H(\bar{x},\bar{u}) \right]_{ij} = \left.\frac{\partial h_i}{\partial x_j}\right|_{(\bar{x},\bar{u})}$$

$$i = 1, \dots, p; \quad j = 1, \dots, n$$

E

$$\left[J(\bar{x},\bar{u}) \right]_{ij} = \left.\frac{\partial h_i}{\partial u_j}\right|_{(\bar{x},\bar{u})}$$

$$i = 1, \dots, p; \quad j = 1, \dots, m.$$

ESEMPIO

SIA

$$\dot{x}_1 = 3x_1x_2 - 6x_2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$$

$$\dot{x}_2 = x_2 - x_1 + u_1$$

CALCOLARE TUTTI I SISTEMI

LINEARIZZATI ATTORNO A

LINEARIZZATI ATTORNO A

TUTTI I PUNTI DI EQUILIBRIO.

CON $\bar{u}=0$

SOLUZIONE:

LE COPPIE $(\bar{x}, \bar{u})$ CON $\bar{u}=0$ RISOLVONO:

$$\begin{cases} 0 = x_2(3x_1-6) \\ 0 = x_2 - x_1 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} x_1(3x_1-6)=0 \\ x_1 = x_2 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

RIGUARDO ALLA LINEARIZZAZIONE,

$$f_1(x,u) = 3x_1x_2 - 6x_2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$$

$$f_2(x,u) = x_2 - x_1 + u_1 \quad (\text{È LINEARE})$$

$f_2(x, u) = x_2 - x_1 + u_1$ (È LINEARE)

SI HA

$$F(x, u) = \begin{bmatrix} 3x_2 & 3x_1 - 6 \\ -1 & +1 \end{bmatrix}$$

$$G(x, u) = \begin{bmatrix} 2u_1 & 2u_2 & 2u_3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

E SE

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$F(\bar{x}, \bar{u}) = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$G(\bar{x}, \bar{u}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$F(\bar{x}, \bar{u}) = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$G(\bar{x}, \bar{u}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

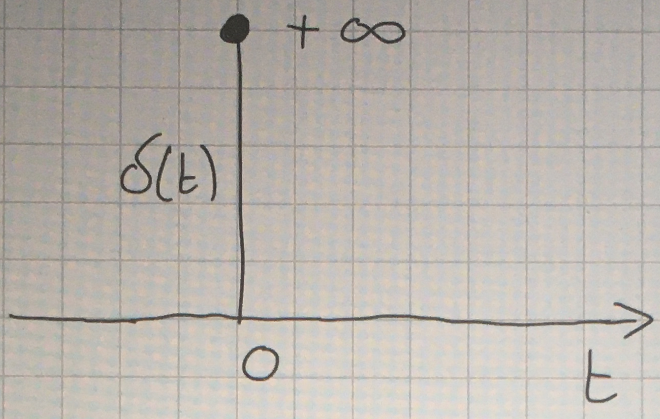
MENTRE SE

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \bar{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$F(\bar{x}, \bar{u}) = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ -1 & +1 \end{bmatrix}$$

E $G(\bar{x}, \bar{u})$ COME PRIMA.

DELTA DI DIRAC



$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ +\infty, & t = 0 \end{cases}$$

CON PROPRIETÀ FONDAMENTALE

$$\int_A \delta(t)\, dt = 1 \quad \text{SE} \quad 0 \in A$$

PERMETTE NEI SISTEMI DINAMICI UN TRASFERIMENTO "IMMEDIATO" DI ENERGIA

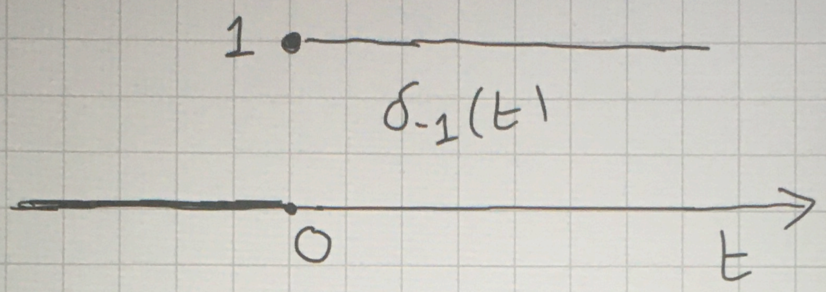
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \delta(t) \\ x(0^-) = 0 \end{cases} \Longrightarrow x(0) = 1$$

$$(x(t) = 1 \quad \forall\, t \geq 0)$$

LA $x(t)$ NELL'ULTIMO ESEMPIO

È LA FUNZIONE DI

HEAVYSIDE $\delta_{-1}(t)$



$$\delta_{-1}(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

SI HA QUINDI

$$\delta_{-1}(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(t)\, dt$$

$$\left(\dot{\delta}_{-1}(t) = \delta(t) \right)$$

TRASFORMATA DI LAPLACE

DATA $f(t)$, CON $t \in \mathbb{R}$,

TRASFORMATA DI LAPLACE

DATA $f(t)$, CON $t \in \mathbb{R}$,

$$F(s) = L[f] := \int_{0^-}^{+\infty} f(t) e^{-st} dt$$

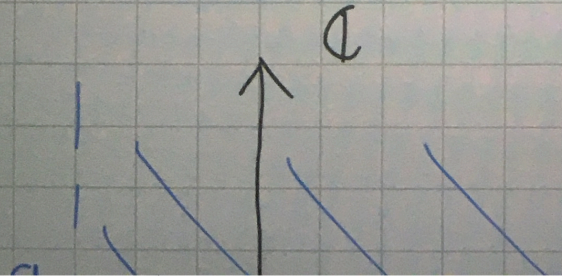
CON $s \in \mathcal{R} \subseteq \mathbb{C}$ (REGIONE DI CONVERGENZA).

È INIETTIVA SE f È CAUSALE, I.E.

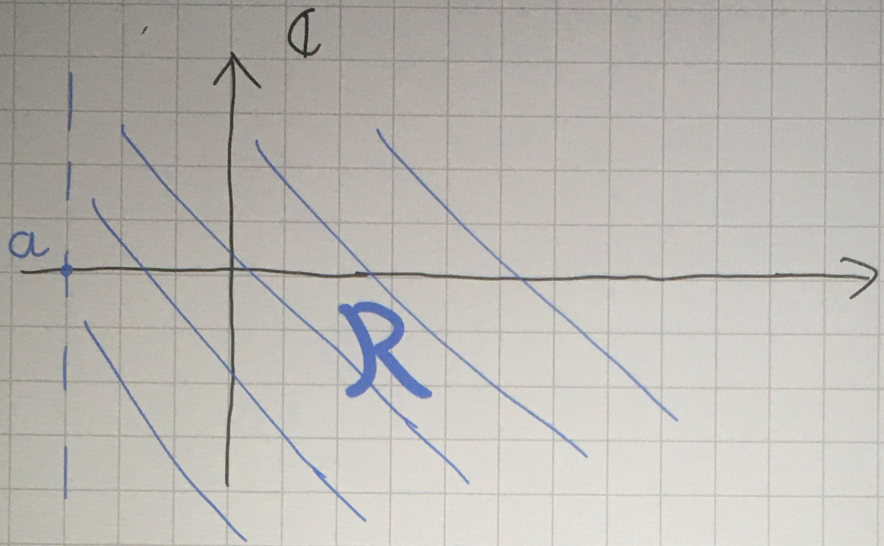
$f(t) = 0$ SE $t < 0$.

LA REGIONE DI CONV. $\mathcal{R}$

È SEMPRE DEFINITA DA UNA ASCISSA DI CONVERGENZA $a \in \mathbb{R}$, $\mathcal{R}$ POI CONTIENE IL SEMIPIANO DESTRO (E TUTTA LA FRONTIERA O PARTE DI ESSA)



(E TUTTA LA FRONTIERA O
PARTE DI ESSA)



PROPRIETÀ DI L

1) LINEARITÀ:

$$L[\alpha f_1 + \beta f_2] = \alpha L[f_1] + \beta L[f_2]$$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\quad = \alpha F_1(s) + \beta F_2(s)$

2) DERIVATA:

$$L[\dot{f}] = s F(s) - f(0^-)$$

3) INTEGRALE:

$$L\left[\int^t f(\tau) d\tau\right] = F(s)$$

3) INTEGRALE:

$$L\left[\int_{0^-}^{t} f(\tau)d\tau\right] = \frac{F(s)}{s}$$

4) TEOREMI SUI LIMITI:

VALORE FINALE

$$\lim_{t\to+\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

(SOTTO IPOTESI CHE DISCUTEREMO)

VALORE INIZIALE

$$\lim_{t\to 0^+} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$$

(SOTTO ALCUNE HP ANCHE QUI)

ESEMPI

1) $f(t) = e^{-t^2}$, $F(s)$ ESISTE?

$$F(s) = \int_{0^-}^{+\infty} e^{-st} e^{-t^2} dt$$

$s = \sigma + j\omega$, $\sigma, \omega \in \mathbb{R}$, $j = \sqrt{-1}$

Note

$$s = \sigma + j\omega, \quad \sigma, \omega \in \mathbb{R}, \quad j = \sqrt{-1}$$

$$\int_{0^-}^{+\infty} \left| e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} e^{-t^2} \right| dt < \infty \, ?$$

$$\parallel$$

$$\int_{0^-}^{+\infty} e^{-\sigma t - t^2} dt < \infty \quad \forall \sigma$$

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{R} = \mathbb{C}$$

2) $f(t) = e^{t^2}$

CON LO STESSO TIPO DI CONTI LA CONDIZIONE PER L'$\exists$ DI $F(s)$ RISULTA

$$\int_{0^-}^{+\infty} \left| e^{-\sigma t + t^2} \right| dt = +\infty \quad \forall \sigma$$

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{R} = \emptyset$$

3) DIMOSTRARE CHE $\exists$ $F(s)$

3) DIMOSTRARE CHE $\exists\ F(s)$,
OVVERO $\mathcal{R} \neq \emptyset$, SE
$\exists\ M$ T.C. $|f(t)| < M e^{kt}$

4) $f(t) = \delta(t)$

$$F(s) = \int_{0^-}^{+\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt$$

$$= \int_{0^-}^{+\infty} \delta(t)\, e^{-st}\, dt$$

$$= \int_{0^-}^{+\infty} \delta(t) \cdot e^{-0 \cdot s}\, dt$$

$$= \int_{0^-}^{+\infty} \delta(t)\, dt = 1$$

$$\mathcal{R} = \mathbb{C}$$

5) $f(t) = \delta_{-1}(t)$

$$L[\delta(t)] = 1 \Rightarrow L\left[\int \delta(t)\, dt\right]$$

$$= 1$$

5) $f(t) = \delta_{-1}(t)$

$$L[\delta(t)] = 1 \Rightarrow L\left[\int \delta(t)\,dt\right]$$

$$\underset{\text{PROPRIETÀ 3}}{=} \frac{1}{s}$$

6) $f(t) = e^{-\alpha t}, \quad \alpha \in \mathbb{C}, \; t \geq 0$

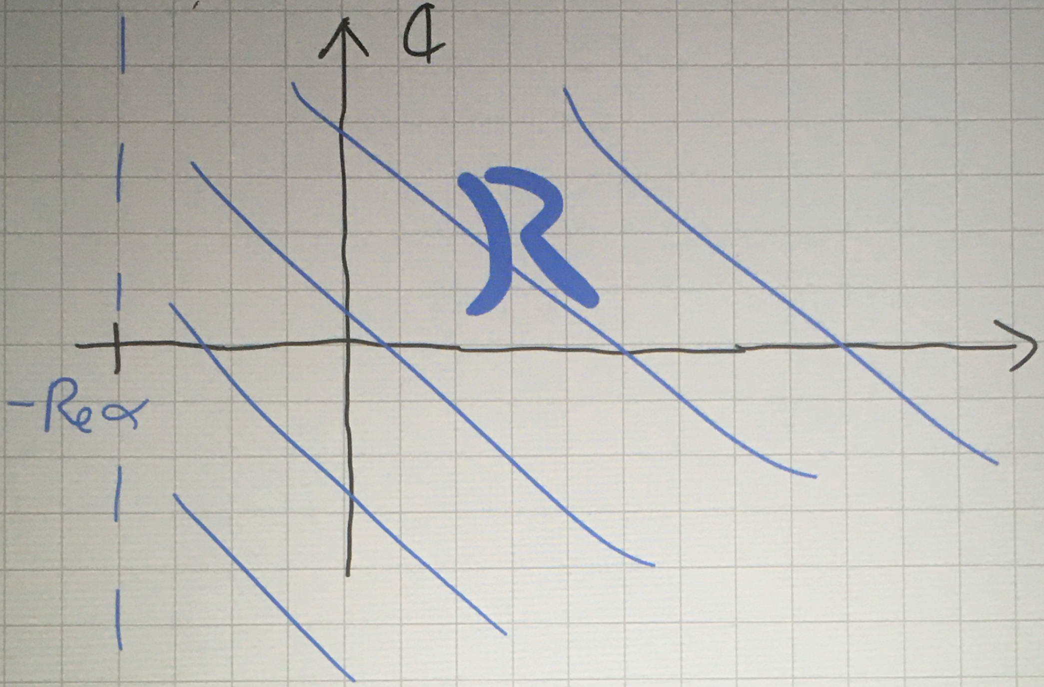
$$F(s) = \int_{0^-}^{+\infty} e^{-(\alpha+s)t}\,dt \quad \begin{pmatrix} < \infty \text{ SE} \\ -\operatorname{Re}\alpha < \operatorname{Re} s \end{pmatrix}$$

$$= \left. \frac{e^{-(\alpha+s)t}}{-s} \right|_{0^-}^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{s+\alpha}$$

$$\mathcal{R} = \{ s \in \mathbb{C} \text{ T.C. } \operatorname{Re} s > -\operatorname{Re}\alpha \}$$

$$\mathcal{R} = \{ s \in \mathbb{C} \text{ T.C. } \operatorname{Re} s > -\operatorname{Re} \alpha \}$$



7) FONDAMENTALE

$$L\left[\frac{t^n e^{-\alpha t} \delta_{-1}(t)}{n!} \right] = \frac{1}{(s+\alpha)^{n+1}}$$

(NOTA: L'USO DI $\delta_{-1}(t)$ EVIDENZIA LA CAUSALITÀ DI $f(t)$ MA OMETTENDOLO IL RISULTATO

(NOTA: L'USO DI $\delta_{-1}(t)$ EVIDENZIA LA CAUSALITÀ DI $f(t)$ MA OMETTENDOLO IL RISULTATO È LO STESSO POICHÉ

$$L[f] = \int_{0^-}^{+\infty} \dots \,)$$

INVERSIONE DI FUNZIONI RAZIONALI

POLINOMIO $n(s) = a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_0$

(MONICO SE $a_m = 1$)

$d(s)$ = UN ALTRO POLINOMIO MONICO PER CONVENZIONE

$$\deg(d(s)) = n \geq m = \deg(n(s))$$

$W(s) = \dfrac{n(s)}{d(s)}$ È UNA

FUNZIONE RAZIONALE PROPRIA,

STRETTAMENTE PROPRIA SE

FUNZIONE RAZIONALE PROPRIA, STRETTAMENTE PROPRIA SE $n > m$, IN RAPPRESENTAZIONE COPRIMA SE $n(s)$ E $d(s)$ NON HANNO RADICI IN COMUNE.

$$\mathcal{L}^{-1}[W(s)] = ?$$

($\mathcal{R}$ È UN SEMIPIANO DESTRO)

ESEMPIO PRIMA DI UN RISULTATO GENERALE

$$W(s) = \frac{2s^3 + 3s^2 + 2s + 2}{(s^2 + 2s + 1)(s + 2)}$$

È PROPRIA CON

$$d(s) = (s+1)^2 (s+2)$$

$$\Downarrow$$

$$\lambda_1 = -1 \, , \; \lambda_2 = -2$$

COME RADICI (λ_1 CON MOLTEPLICITÀ UGUALE A 2)

ALGORITMO PER
CALCOLARE

$w(t)$ T.C. $\mathcal{L}[w(t)] = W(s)$

1) LA "RENDIAMO" STRETTAMENTE
PROPRIA

$W(s) = K + W_{sp}(s)$ DOVE

$$K = \lim_{s \to +\infty} W(s) = 2$$

$$\Downarrow$$

$$W_{sp}(s) = W(s) - 2$$

$$= \frac{2s^3+3s^2+2s+2-2s^3-8s^2-10s-4}{(s+1)^2(s+2)}$$

$$= \frac{-5s^2-8s-2}{(s+1)^2(s+2)}$$

2) PROSEGUIAMO CON $W_{sp}(s)$

E PROVIAMO A ESPRIMERLA

CON 3 FRATTI SEMPLICI LEGATI

A λ_1 e λ_2.

CON 3 FRATTI SEMPLICI LEGATI

A λ_1 e λ_2:

$$W_{sp}(s) = -\frac{5s^2+8s+2}{(s+1)^2(s+2)} = \frac{A_1}{s+1} + \frac{A_2}{(s+1)^2} + \frac{B}{s+2}$$

$\Downarrow$ DETERMINIAMO A_1, A_2, B

$$A_1(s+1)(s+2)+A_2(s+2)+B(s+1)^2 = -5s^2-8s-2$$

$$\Downarrow$$

$$A_1(s^2+3s+2)+A_2(s+2)+B(s^2+2s+1) = -5s^2-8s-2$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} s^2(A_1+B) = -5s^2 \\ s(3A_1+A_2+2B) = -8s \\ 2A_1+2A_2+B = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = -5-B \\ A_2 = B+7 \\ B = -6 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$A_1 = 1, A_2 = 1, B = -6$$

QUINDI

QUINDI

$$W_{sp}(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{(s+1)^2} - \frac{6}{s+2}$$

DA CUI

$$W(s) = 2 + \frac{1}{s+1} + \frac{1}{(s+1)^2} - \frac{6}{s+2}$$

$$\Big\downarrow \mathcal{L}^{-1}$$

$$w(t) = \left(2\,\delta(t) + e^{-t} + t e^{-t} - 6e^{-2t}\right)\delta_{-1}(t)$$

TUTTO HA FUNZIONATO

E PUÒ ESSERE GENERALIZZATO

GRAZIE AL

TEOREMA DI DECOMPOSIZIONE DI HEAVYSIDE

SIA $W(s)$ UNA FUNZIONE

RAZIONALE STRETTAMENTE

SIA $W(s)$ UNA FUNZIONE RAZIONALE STRETTAMENTE PROPRIA, CON

$$W(s) = \frac{n(s)}{(s-\lambda_1)^{\mu_1}(s-\lambda_2)^{\mu_2}\cdots(s-\lambda_m)^{\mu_r}}$$

r = N° RADICI DISTINTE

$$\sum_{i=1}^{r} \mu_i = n = \deg(d(s))$$

ALLORA SI PUÒ SEMPRE ESPRIMERE $W(s)$ COME

$$W(s) = \frac{A_1}{s-\lambda_1} + \frac{A_2}{(s-\lambda_1)^2} + \cdots \frac{A_{\mu_1}}{(s-\lambda_1)^{\mu_1}} +$$

$$\frac{B_1}{s-\lambda_2} + \frac{B_2}{(s-\lambda_2)^2} + \cdots + \frac{B_{\mu_2}}{(s-\lambda_2)^{\mu_2}}$$

$$W(s) = \frac{A_1}{s-\lambda_1} + \frac{A_2}{(s-\lambda_1)^2} + \cdots \frac{A_{\mu_1}}{(s-\lambda_1)^{\mu_1}} +$$

$$\frac{B_1}{s-\lambda_2} + \frac{B_2}{(s-\lambda_2)^2} + \cdots + \frac{B_{\mu_2}}{(s-\lambda_2)^{\mu_2}}$$

$$+ \cdots$$

DOVE

$\{A_i\}$, $\{B_i\}$, ... SONO UNIVOCAMENTE DETERMINATI IMPOSTANDO L'UGUAGLIANZA RIPORTATA SOPRA.

UTILE NOTA DI CALCOLO

SE λ HA MOLTEPLICITÀ μ, SI HA

$$A_\mu = \lim_{s \to \lambda} (s-\lambda)^\mu W(s)$$

AD ESEMPIO, PRIMA

$$W(s) = W_{sp}(s) = - \frac{5s^2+8s+2}{}$$

AD ESEMPIO, PRIMA

$$W(s) = W_{sp}(s) = -\frac{5s^2+8s+2}{(s+1)^2(s+2)}$$

$$\left.\begin{matrix} A_1 \\ A_2 \end{matrix}\right\} \lambda_1 = -1$$

$$B \} \lambda_2 = -2$$

E QUINDI SI HA

$$A_2 = \lim_{s \to -1} \frac{(s+1)^2(-5s^2-8s-2)}{(s+1)^2(s+2)}$$

$$= \frac{1}{1} = 1$$

$$B = \lim_{s \to -2} \frac{(s+2)}{(s+2)} \frac{(-5s^2-8s-2)}{(s+1)^2}$$

$$= -6$$

E RIMANE SOLO A_1 FACILMENTE

E RIMANE SOLO A_1 FACILMENTE CALCOLABILE DAL SISTEMA RIDOTTO

ULTERIORE NOTA

È UTILE SAPERE ANCHE CHE I COEFFICIENTI DI RADICI COMPLESSE CONIUGATE,

$$\lambda_1 = \sigma + j\omega , \quad \lambda_2 = \sigma - j\omega ,$$

RISULTANO ANCH'ESSI COMPLESSI CONIUGATI. QUINDI

$$W(s) = \frac{1}{(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)}$$

$$= \frac{a+jb}{s-\lambda_1} + \frac{a-jb}{s-\lambda_2}$$

$$a, b \in \mathbb{R}$$

ESEMPIO

ESEMPIO

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s^2+4}\right] = ?$$

$$\frac{1}{s^2+4} = \frac{1}{(s-2j)(s+2j)}$$

$$= \frac{a+jb}{s+2j} + \frac{a-jb}{s-2j}$$

$$= \frac{2as+4b}{s^2+4} \Rightarrow \begin{array}{l} a=0 \\ b=1/4 \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$L^{-1}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{j}{s+2j} - \frac{j}{s-2j}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\, j \left(e^{-2jt} - e^{2jt}\right)$$

$$L^{-1}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{j}{s+2j}-\frac{j}{s-2j}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{4} j \left(e^{-2jt} - e^{2jt}\right)$$

$$= \frac{1}{4} j \left[\cos(-2t) + j \sin(-2t) - \cos(2t) - j \sin(2t)\right]$$

$$= \frac{1}{4} j \left(-2j \sin(2t)\right) = \frac{1}{2} \sin(2t)$$

PIÙ IN GENERALE

AMPLIAMO LA TABELLA

CHE ARRIVAVA A 7 CON

8) $$L\left[\sin(\omega t)\right] = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

$$\left(\begin{array}{c} \parallel \\ L\left[\sin(\omega t)\,\delta_{-1}(t)\right] \end{array} \right)$$

8) $$\mathcal{L}\left[\sin(\omega t)\right] = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

$$\left(\begin{array}{c} \| \\ \mathcal{L}\left[\sin(\omega t)\,\delta_{-1}(t)\right]\end{array}\right)$$

$$\mathcal{L}\left[\cos(\omega t)\right] = \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

FUNZIONE DI TRASFERIMENTO

CONSIDERIAMO

$$\begin{cases} \dot{x} = Fx + Gu \\ y = Hx + Ju \end{cases}, \quad x(0^-) = x_0, \quad u(t) = 0 \text{ SE } t<0$$

ANALIZZIAMO INIZIALMENTE L'EQUAZIONE DI STATO

TRASFORMATE DI LAPLACE NOTEVOLI

$$f(t) \overset{\text{trasformata}}{\rightarrow} F(s) = L[f(t)]$$

$$F(s) \overset{\text{antitrasformata}}{\rightarrow} f(t) = L^{-1}[F(s)]$$

$$\delta(t) = \textbf{delta di Dirac}$$

$$\delta_{-1}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$

$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t)$	1
$\delta(t-\tau)$	$e^{-\tau s}$
$\delta_{-1}(t)$	$\frac{1}{s}$
$\delta_{-1}(t-\tau)$	$\frac{1}{s}e^{-\tau s}$
$t\delta_{-1}(t)$	$\frac{1}{s^2}$
$t^n\delta_{-1}(t) \quad n \in \mathbf{N}$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$e^{-\alpha t}\delta_{-1}(t)$	$\frac{1}{s+\alpha}$
$t^n e^{-\alpha t}\delta_{-1}(t)$	$\frac{n!}{(s+\alpha)^{n+1}}$
$(1-e^{-\alpha t})\delta_{-1}(t)$	$\frac{\alpha}{s(s+\alpha)}$
$\textbf{sin}(\omega t)\delta_{-1}(t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\textbf{cos}(\omega t)\delta_{-1}(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\textbf{sinh}(\alpha t)\delta_{-1}(t)$	$\frac{\alpha}{s^2-\alpha^2}$
$\textbf{cosh}(\alpha t)\delta_{-1}(t)$	$\frac{s}{s^2-\alpha^2)}$
$e^{-\alpha t}\textbf{sin}(\omega t)\delta_{-1}(t)$	$\frac{\omega}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$
$e^{-\alpha t}\textbf{cos}(\omega t)\delta_{-1}(t)$	$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$

ANALIZZIAMO INIZIALMENTE

L'EQUAZIONE DI STATO

$X(s)$:= VETTORE CHE HA COME COMPONENTE IESIMA

$$\mathcal{L}[x_i(t)]$$

E ANALOGA DEFINIZIONE PER $U(s)$.

QUINDI SI HA

$$sX(s) - x(0^-) = FX(s) + GU(s)$$

$$\Downarrow$$

$$(sI - F)X(s) = x(0^-) + GU(s)$$

$$\Downarrow$$

$$X(s) = \underbrace{(sI-F)^{-1}x_0}_{\text{EVOLUZIONE LIBERA.}} + \underbrace{(sI-F)^{-1}GU(s)}_{\text{EVOLUZIONE FORZATA}}$$

D'ORA IN POI ASSUMIAMO PERÒ

$x_0 = 0$

DALL'EQUAZIONE DI USCITA

$$Y(s) = H X(s) + J U(s)$$

E USANDO $X(s)$ DA SOPRA

$$Y(s) = W(s)\, U(s)$$ CON

$$W(s) = \underbrace{\left[H (sI - F)^{-1} G + J \right]}_{\text{FUNZIONE DI TRASFERIMENTO}}$$

NOTE FONDAMENTALI SULLA FDT ASSUMENDO D'ORA IN POI SISTEMI SISO

(UN SOLO INGRESSO E UNA SOLA USCITA)

- SE $u(t) = \delta(t)$, $U(s) = 1$ E

$$Y(s) = W(s)$$

- SE $u(t) = \delta(t)$, $U(s) = 1$ E

$$Y(s) = W(s)$$

$\mathcal{L}^{-1}[W(s)] = w(t)$ È QUINDI L'USCITA DEL SISTEMA CON INGRESSO PARI AL DELTA DI DIRAC

$w(t)$ = RISPOSTA IMPULSIVA DEL SISTEMA

- $W(s)$ RISULTA SEMPRE UNA FUNZIONE RAZIONALE PROPRIA (STRETTAMENTE SE $J=0$)

ESERCIZIO: DUE APPROCCI PER CALCOLARE $W(s)$ DA UN MODELLO DI STATO

$$\dot{x} = Fx + Gu$$

$$y = Hx$$

$F = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$

$$\dot{x} = Fx + Gu$$
$$y = Hx$$

$$F = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

CALCOLARE LA FDT $W(s)$

PRIMO METODO

$$W(s) = H(sI-F)^{-1}G + J$$
$$= H(sI-F)^{-1}G$$

IL CALCOLO PIÙ DELICATO È INVERTIRE $sI-F$. SI HA:

$$(sI-F)^{-1} = \frac{ADJ(sI-F)}{\Delta_F(s)} = \frac{\text{TRASPOSTA COFATTORI}}{\Delta_F(s)}$$

DOVE

$$\Delta_F(s) = \det(sI-F)$$

IN QUESTO CASO

$$sI - F = \begin{bmatrix} s+1 & 0 & 0 \\ 0 & s+2 & 0 \\ 0 & -1 & s+3 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_F(s) = (s+1)(s+2)(s+3)$$

$$ADJ(sI-F) = \begin{bmatrix} (s+2)(s+3) & 0 & 0 \\ 0 & (s+1)(s+3) & 0 \\ 0 & s+1 & (s+2)(s+1) \end{bmatrix}$$

$(s+2)(s+3)$ = PRODOTTO DEGLI ALTRI DUE SULLA DIAGONALE SENZA CAMBIO DI SEGNO

$s+1$ = DA $sI-F$ TOGLIERE 2ª RIGA E 3ª COLONNA, CALCOLARE

POI $(-1)^{2+3}$ DET $\begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$\Downarrow$

$$(sI-F)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$(sI-F)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(s+2)(s+3)} & \frac{1}{s+3} \end{bmatrix}$$

$$(sI-F)^{-1} G = (sI-F)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{s+2} \\ \frac{1}{(s+2)(s+3)} \end{bmatrix}$$

$$W(s) = H(sI-F)^{-1} G$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{s+2} \\ \frac{1}{(s+2)(s+3)} \end{bmatrix} = \frac{-1}{(s+2)(s+3)}$$

$$\left[\frac{1}{(s+2)(s+3)}\right]$$

SECONDO METODO

IL SISTEMA È

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 \\ \dot{x}_2 = -2x_2 + u \\ \dot{x}_3 = x_2 - 3x_3 \\ y = 2x_1 - x_3 \end{cases}$$

CON

$x(0^-) = 0$ E $u(t) = \delta(t)$

SI HA $y(t) = w(t)$.

USO LAPLACE:

$$\begin{cases} s\,X_1(s) = -X_1(s) \Rightarrow (s+1)\,X_1(s) = 0 \\ s\,X_2(s) = -2\,X_2(s) + U(s) \\ \qquad\qquad = -2\,X_2(s) + 1 \\ s\,X_3(s) = X_2(s) - 3\,X_3(s) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} X_1(s) = 0 & \text{(OVVIO ANCHE NEL TEMPO)} \\ X_2(s) = \dfrac{1}{s+2} \\ X_3(s) = \dfrac{1}{(s+2)(s+3)} \end{cases}$$

DA CUI

$$y(s) = W(s) = -2X_1(s) - X_3(s)$$

$$= -X_3(s)$$

$$= \dfrac{-1}{(s+2)(s+3)}$$

NOTA: PER CAUCHY, UN SISTEMA DINAMICO LINEARE HA UNA SOLA SOLUZIONE $x(t)$ T.C. $\dot{x} = Fx$, $x(0^-) = x_0$.

$\dot{x}_1 = -x_1$, $x(0^-) = 0$ HA COME

$$= \frac{-1}{(s+2)(s+3)}$$

NOTA: PER CAUCHY, UN SISTEMA DINAMICO LINEARE HA UNA SOLA SOLUZIONE $x(t)$ T.C. $\dot{x} = Fx$, $x(0^-) = x_0$.

$\dot{x}_1 = -x_1$, $x(0^-) = 0$ HA COME SOLUZIONE $x_1(t) = 0$, $t \geq 0$ (OVVIO). È L'UNICA SOLUZIONE.

$$\Downarrow$$

$$x_1(t) = 0, \; t \geq 0 \xrightarrow{L} X_1(s) = 0 \quad \blacksquare$$

RICORDIAMO CHE

$$f(x,u) = \text{FUNZIONE VETTORIALE} = \begin{bmatrix} f_1(x,u) \\ f_2(x,u) \\ \vdots \\ f_n(x,u) \end{bmatrix}$$

ALLORA

$$F(\bar{x},\bar{u}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

E

$$\left[F(\bar{x},\bar{u}) \right]_{ij} = \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|_{(\bar{x},\bar{u})}$$

$i = 1, \dots, n; \; j = 1, \dots, n$

SI HA POI

$$G(\bar{x},\bar{u}) \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

E

RELAZIONE INGRESSO USCITA INDOTTA DA UN MODELLO DI STATO IN TERMINI DI EQ. DIFFERENZIALE

CONSIDERIAMO IL CASO SISO

$$\dot{x} = Fx + Gu$$

$$y = Hx \quad (J=0 \text{ PER SEMPLICITÀ}).$$

IN TERMINI DI LAPLACE TRASFORMATA SAPPIAMO CHE

$$y(s) = \frac{H \operatorname{adj}(sI-F)\, G}{\det(sI-F)}\, U(s)$$

$$= \frac{n(s)}{d(s)}\, U(s)$$

DOVE $d(s) = \det(sI-F)$

$$= s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0$$

DOVE $d(s) = \det(sI - F)$

$$= s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0$$

$$n(s) = b_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0$$

SI NOTI CHE SE $n(s)$ e $d(s)$ HANNO ZERI IN COMUNE NON LI CANCELLIAMO. QUINDI

$n = \dim(x) =$ DIMENSIONE SPAZIO DI STATO

SI HA ALLORA

$$d(s)\, Y(s) = n(s)\, U(s)$$

$$\Downarrow$$

$$(s^n + \dots + a_0)\, Y(s) = (b_m s^m + \dots + b_0)\, U(s)$$

SI HA $s^h F(s) \underset{\text{NEL TEMPO}}{\Longrightarrow} f^{(h)}(t)$ DERIVATA h-ESIMA

CON f E LE SUE DERIVATE NULLE IN 0^-

SE IL SISTEMA È A CONDIZIONI INIZIALI NULLE E $u(t)$ È CAUSALE ALLORA

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_0 y(t)$$

$$\parallel$$

$$b_m u^{(m)}(t) + b_{m-1} u^{(m-1)}(t) + \dots + b_0 u(t)$$

CON TUTTI I SEGNALI NULLI IN 0^-

È L'EQ. DIFFERENZIALE CHE DEFINISCE LA MAPPA $u \longrightarrow y$

STABILITÀ ASINTOTICA (INTERNA)

DATO IL SISTEMA

$$\dot{x} = Fx + Gu$$
$$y = Hx$$

DIREMO CHE È ASINTOTICAMENTE STABILE SE

DIREMO CHE È ASINTOTICAMENTE STABILE SE

$Re\,\lambda_i < 0 \quad \forall i$

DOVE λ_i SONO LE RADICI DI $\det(sI - F)$. (DIPENDE SOLO DA F)

SIGNIFICATO

DATA UNA QUALSIASI CONDIZIONE INIZIALE, L'EVOLUZIONE DELLO STATO DI

$\dot{x} = Fx, \quad x(0^-) = x_0$

CONVERGE VERSO L'ORIGINE.

SE PENSIAMO A $\underline{0}$ COME IL PUNTO DI EQUILIBRIO DESIDERATO E A x_0 COME UNA PERTURBAZIONE NON DESIDERATA, QUEST'ULTIMA VIENE SEMPRE ANNULLATA

STABILITÀ BIBO
(ESTERNA)

DATO IL SISTEMA

$\dot{x} = Fx + Gu$

$y = Hx$,

ESSO È **BOUNDED** INPUT
BOUNDED OUTPUT (BIBO)

SE AD $\forall$ INGRESSO LIMITATO $u(t)$ ($\exists$ M T.C. $|u(t)| < M \ \forall t$) CORRISPONDE UN'USCITA LIMITATA $y(t)$ ($\exists$ N T.C. $|y(t)| < N \ \forall t$)

SIGNIFICATO: UN INGRESSO DI AMPIEZZA CONTROLLATA NON "DISTRUGGE" IL SISTEMA, $y(t)$ È SOTTO CONTROLLO IN AMPIEZZA

TEOREMA:

TEOREMA:

SIA $W(s)$ LA FDT DEL SISTEMA E SIA $w(t)$ LA RISPOSTA IMPULSIVA.

INOLTRE SCRIVIAMO:

$$W(s) = \frac{n(s)}{d(s)} = \frac{\bar{n}(s)}{\bar{d}(s)}$$

DOVE $\bar{n}(s), \bar{d}(s)$ FORNISCONO LA RAPPRESENTAZIONE COPRIMA DI $W(s)$: VENGONO CANCELLATI GLI ZERI IN COMUNE TRA

$$n(s) = H \, \mathrm{adj}(sI - F) \, G$$

E

$$d(s) = \det(sI - F).$$

ALLORA SI HA

ALLORA SI HA

$$\dot{x} = Fx + Gu \qquad \text{BIBO}$$
$$y = Hx$$

$$\Updownarrow$$

$$\int_0^{+\infty} |w(t)|\, dt < \infty$$

$$\Updownarrow$$

$\mathrm{Re}\,\lambda_i < 0 \quad \forall i$

DOVE λ_i SONO LE

RADICI DI $\bar{d}(s)$

$\blacksquare$

NOTA:

NOTA:

STABILITÀ ASINTOTICA

$\Downarrow$

STABILITÀ BIBO

ESERCIZIO

SI CONSIDERI IL MODELLO

$$y^{(2)}+4(1-a^2)y^{(1)}-8ay=4u^{(1)}-4u$$

SI STUDI LA STABILITÀ ASINTOTICA E BIBO AL VARIARE DI $a\in\mathbb{R}$

SOLUZIONE

RIGUARDO L'AS. STABILITÀ, SI HA

$$d(s)=s^2+4(1-a^2)s-8a$$

RICORDIAMO

CARTESIO: DATO UN POL. DI GRADO 2, SI HA

CARTESIO: DATO UN POL. DI GRADO 2, SI HA

$$\mathrm{Re}\,\lambda_i < 0$$

$$\Updownarrow$$

IL POLINOMIO HA I COEFFICIENTI DI UGUALE SEGNO

DEVE QUINDI ESSERE

$$\begin{cases} 1-a^2 > 0 \\ a < 0 \end{cases} \Longrightarrow -1 < a < 0$$

AS. STABILITÀ

RIGUARDO LA BIBO STABILITÀ

$$W(s) = \frac{4s-4}{s^2+4(1-a^2)s-8a}$$

SICURAMENTE VI È BIBO STABILITÀ PER $-1 < a < 0$ MA ALTRI a

SICURAMENTE VI È BIBO STABILITÀ PER $-1 < a < 0$ MA ALTRI a CORRISPONDENTI A CANCELLAZIONI DI RADICI CON $\mathrm{Re}\,\lambda_i \geq 0$ DI $d(s)$ POTREBBERO AGGIUNGERSI.

IL NUMERATORE POTREBBE CANCELLARE $\lambda = 1$.

$\exists\, a$ T.C. $d(s)$ HA RADICE $\lambda = 1$?

$$1^2 + 4(1-a^2)\cdot 1 - 8a = 0$$
$$= -4a^2 - 8a + 5$$

I CASI CRITICI SONO

$$a = -\frac{5}{2} \quad \sigma \quad a = \frac{1}{2}$$

SE $a = 1/2$, (POICHÉ $d(s) = s^2 + 3s - 4$, $= (s-1)(s+4)$)

SE $a = 1/2$, $\left(\text{POICHÉ } d(s) = s^2 + 3s - 4, \atop = (s-1)(s+4) \right)$

$$W(s) = \frac{4(s-1)}{(s-1)(s+4)} = \frac{4}{s+4}$$

È BIBO.

SE $a = -5/2$

$$W(s) = \frac{4(s-1)}{(s-1)(s-20)} = \frac{4}{s-20}$$

NON È BIBO.

LA SOLUZIONE È

$-1 < a < 0 \ \vee \ a = 1/2$

BIBO STABILITÀ