Ex.1. Dato un modello scolastico a tempo discreto (t = anni), dove al primo anno si iscrivono $u(t)$ studenti (ingresso, studenti che si sono prenotati per iscriversi l'anno precedente) ed i bocciati dell'anno precedente (pari ad $\frac{1}{2}$), dove al secondo anno si iscrive chi è promosso dal primo anno ed i bocciati dell'anno precedente (pari ad $\frac{1}{3}$), al terzo tutti i promossi dal secondo anno, e dove tutti quelli del terzo anno a fine anno si ritrovano promossi e laureati, indicando con $y(t)$ tali laureati nell'anno $t-$esimo

- si scriva un modello corrispondente alle regole suesposte
- si determini, con $u(t)$ costante e pari a 100, quali sono i valori asintotici delle varie variabili di stato e dell'uscita

Ex.2. Data $F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a & 1+a \end{bmatrix}$ ($a \in \mathbb{R}$ parametro), si determini la forma di Jordan al variare di a (NON è richiesto il calcolo di T)

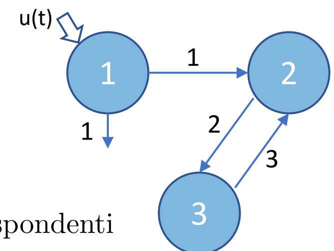
Ex.3. Dato il sistema continuo unidimensionale dipendente dal parametro reale a (punto di equilibrio $x = 0$)

$$\dot{x} = ax - x^3 + x^4$$

- si studi la stabilità del non-lineare e del linearizzato con l'analisi degli autovalori
- si studi la stabilità del linearizzato con l'equazione di Lyapunov con $Q = 1$ e con $Q = 0$
- nei casi critici, si studi la stabilità del non-lineare grazie a $V(x) = x^2$

Ex.4. Data la funzione di trasferimento (discreta) $W(z) = \frac{2z^2}{(z+1)(z-1)}$, si calcoli la risposta impulsiva

Ex.5. Dato il sistema compartimentale descritto dal seguente grafo, con uscita $y(t) = x_1(t)$



- si calcolino le matrici K, G, H corrispondenti
- si determinino chiusi e punti di equilibrio
- se $u(t) = 0$ e $x(0) = [14 \quad 2 \quad 1]^T$, si determini $x(+\infty)$
- si calcoli la funzione di trasferimento

Ex.1. Il modello è il seguente

$$\begin{cases} \\ \\ \\ \end{cases} \qquad \text{ed i valori asintotici sono} \qquad .$$

Giustificare brevemente:

Ex.2. La forma di Jordan assume le espressioni seguenti

1) $F_J = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$ se a 2) $F_J = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$ se a

Giustificare brevemente:

Ex.3.

Autovalori $\lambda = \qquad \Rightarrow \begin{cases} \\ \\ \\ \end{cases}$

Equazione di Lyapunov $= \qquad \Rightarrow \begin{cases} \text{se } Q = 1 \\ \\ \\ \text{se } Q = 0 \end{cases}$

$V(x) = x^2, \dot{V}(x) = \qquad \Rightarrow$

Giustificare brevemente:

Ex.4. Si ha

$W(z) =$ da cui $w(t) =$

Giustificare brevemente:

Ex.5. Le matrici sono

$K = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$, $G = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}$, $H = [\qquad]$ Chiusi $=$ P.EQ. $=$ $x(+\infty) =$ $W(s) =$

Giustificare brevemente:

SOL.1. Si ha facilmente

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t),\ y(t) = [\,0 \quad 0 \quad 1\,]\, x(t)$$

che è asintoticamente stabile (autovalori positivi minori di 1), per cui esiste un unico punto di equilibrio $x_{eq} = (I-F)^{-1}Gu_0,\ y_{eq} = Hx_{eq}$, cui stato ed uscita tendono con ingresso costante $u(t) = u_0 = 100$, da cui $x_1(+\infty) = 200, x_2(+\infty) = 150, y(+\infty) = x_3(+\infty) = u_0 = 100$

SOL.2. Gli autovalori sono $1, a$, per cui se $a \neq 1$ sono distinti ed F_J è diagonale, mentre se $a = 1$ si vede che esiste un unico autovettore, quindi

$$F_J = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \text{ (se } a \neq 1),\ \ F_J = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ (se } a = 1)$$

SOL.3. L'unico autovalore è a con molteplicità 1, quindi $a < 0$ stabilità asintotica per entrambi i sistemi, $a > 0$ instabilità per entrambi i sistemi, $a = 0$ stabilità solo semplice per il linearizzato e caso critico per il non-lineare. L'equazione di Lyapunov conduce a

$$2aP = -Q$$

da cui se $Q = 1$ nessuna soluzione (e nulla si può dire, tranne che non c'è sicuramente stabilità asintotica) se $a = 0$, mentre unica soluzione $P = (-2a)^{-1}$ se $a \neq 0$. Ma solo se $a < 0$ si ha $P > 0$ e quindi stabilità asintotica. Se $Q = 0$ nessuna soluzione oltre a $P = 0$ che NON è $P > 0$ se $a \neq 0$ (e nulla si può dire), mentre se $a = 0$ abbiamo che ogni P è soluzione (infinite soluzioni), ma tra queste c'è anche $P = 1 > 0$, quindi stabilità solo semplice (essendo $Q = 0$). Infine, si ha facilmente (nel caso critico $a = 0$)

$$\dot{V}(x) = -2x^4(1-x) < 0$$

in un intorno dell'origine, con $V(x) > 0$, da cui stabilità asintotica

SOL.4. Dallo sviluppo in frazioni parziali di $\frac{W(z)}{z}$ si ha subito

$$\frac{W(z)}{z} = \frac{2z}{(z-1)(z+1)} = \frac{1}{z+1} + \frac{1}{z-1} \ \Rightarrow\ W(z) = \frac{z}{z-1} + \frac{z}{z+1} \ \Rightarrow\ w(t) = 1 + (-1)^t,\ t \geq 0$$

SOL.5. Le matrici sono facilmente

$$K = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix},\ G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ H = [\,1 \quad 0 \quad 0\,]$$

Dal grafo si vede che l'unico chiuso è $(2,3)$ e che i punti di equilibrio sono $x_{eq} = a\,[\,0 \quad 3 \quad 2\,]^T,\ a \geq 0$. All'infinito x_1 si svuota, ed il suo contenuto 14 si distribuisce equamente tra l'esterno (7) ed il chiuso (7), per cui asintoticamente il chiuso conterrà $7+2+1 = 10$, e dovendo tendere ad un punto di equilibrio, questo è necessariamente $x(+\infty) = [\,0 \quad 6 \quad 4\,]^T$. Infine, la matrice è triangolare a blocchi, e si vede facilmente che solo $K_{11} = -2, G_1 = 1, H_1 = 1$ intervengono nel calcolo della funzione di trasferimento, che è quindi $W(s) = \frac{1}{s+2}$

Compito di SISTEMI E MODELLI 4 Settembre 2020: PARTE 2 (telematica) - ore 12.30

NON È AMMESSA LA CONSULTAZIONE DI LIBRI, QUADERNI E L'USO DI CALCOLATRICI.

LAVORARE SU UN TAVOLO DISTANTE CIRCA UN METRO DAL COMPUTER, INQUADRATO DALLA TELECAMERA. SUL TAVOLO DEVONO ESSERE PRESENTI SOLO PENNE, FOGLI BIANCHI, LIBRETTO UNIVERSITARIO.

LE SOLUZIONI VANNO RIPORTATE IN UN UNICO FOGLIO DA FOTOGRAFARE E SPEDIRE TRAMITE IL PROPRIO CELLULARE A:
giapi@dei.unipd.it

OLTRE A BEN EVIDENZIARE LE 4 RISPOSTE AI QUESITI, VANNO RIPORTATI I 2-3 PASSAGGI FONDAMENTALI CHE LE GIUSTIFICANO.

Ex.1. [3 pti] Si consideri il sistema

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_1^2 + b x_2^3 \\
\dot{x}_2 &= a x_2^2 + x_1 + u \\
y &= x1
\end{aligned}$$

con $x(0^-) = 0$ ed $u(t) = \delta(t)$. Si discuta l'identificabilità a priori di $\theta = [a\ b]$.

Ex.2. [3 pti] Si consideri il seguente modello di misura:

$$y(t_i) = \theta_1\, t_i^2 + 2\,\theta_2 + \sqrt{2}\epsilon(t_i), \quad i = 1, 2$$

dove $y(t_i) \in \mathbb{R}$ sono le misure, (θ_1, θ_2) i parametri del modello, ed $\epsilon(t_i)$ sono le variabili aleatorie indipendenti, che modellano il rumore di misura, e con densitá di probabilitá $\epsilon(t_i) \sim N(0, y^2(t_i))$. Si considerino le seguenti misure:

$$(t_1, y_1) = (1, 1), \quad (t_2, y_2) = (2, 2)$$

si ricavi la varianza dell'errore di stima del parametro θ_1.

Ex.3. [8 pti] Sia

$$\mathbf{y}_i = \theta^3 + \mathbf{e}_i, \quad i = 1, \ldots, n$$

con $\mathbf{e}_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$ e tutti indipendenti.

- Si calcoli la stima a massima verosimiglianza di θ con $n = 2$ e $y_1 = 0, y_2 = 1$.
- Si calcoli un limite inferiore per la varianza di ogni stimatore unbiased di θ che sfrutta le n misure.

Soluzione Ex.1.

Essendo il sistema non-lineare é necessario utilizzare il metodo di Taylor per studiare l'identificabilitá a priori. Si ha facilmente che $x_1(0^+) = 0$ e $x_2(0^+) = 1$. Inoltre, per $t > 0$ si ha

$$\begin{aligned}
y &= x_1 \\
\dot{y} &= \dot{x}_1 = x_1^2 + bx_2^3 \\
\ddot{y} &= 2x_1\dot{x}_1 + 3bx_2^2\dot{x}_2 = 2x_1(x_1^2 + bx_2^3) + 3bx_2^2(ax_2^2 + x_1)
\end{aligned}$$

da cui si ha $y(0^+) = x_1(0^+) = 0$, $\dot{y}(0^+) = x_1^2(0^+) + bx_2^3(0^+) = b = \hat{\rho}_1$, $\ddot{y}(0^+) = \ddot{x}1(0^+) = 2x_1(0^+)(x_1^2(0^+) + bx_2^3(0^+)) + 3bx_2^2(0^+)(ax_2^2(0^+) + x_1(0^+)) = 3ab = \hat{\rho}_2 \to a = \hat{\rho}_2/(3b)$. La prima equazione é inutile, dalla seconda si ricava univocamente il parametro b e dalla terza si ricava univocamente il parametro a, da cui l'identificabilitá globale del sistrema.

Soluzione Ex.2.

Il modello risulta lineare Gaussiano e in forma matriciale (con la notazione del libro) risulta:

$$\begin{bmatrix} y(t_1) \\ y(t_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1^2 & 2 \\ t_2^2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} + \sqrt{2} \begin{bmatrix} \epsilon(t_1) \\ \epsilon(t_2) \end{bmatrix}$$

dove, con le misure date, risulta

$$\phi = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Per il Teorema di Gauss-Markov la matrice di covarianza dell'errore risulta $(\phi^T \Sigma^{-1} \phi)^{-1}$. Si ha

$$\phi^T \Sigma^{-1} \phi = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & 2 \\ 2 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

da cui

$$(\phi^T \Sigma^{-1} \phi)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{10}{9} & -\frac{8}{9} \\ -\frac{8}{9} & \frac{10}{9} \end{bmatrix}$$

Quindi la varianza richiesta risulta pari a $\frac{10}{9}$.

Soluzione Ex.3. La meno log likelihood con le due misure risulta

$$\ell_\theta(y) = 0.5(\theta^3)^2 + 0.5(\theta^3 - 1)^2 = \theta^6 - \theta^3 + 0.5$$

con derivata prima

$$6\theta^5 - 3\theta^2 = 3\theta^2(2\theta^3 - 1).$$

Si trova poi facilmente che il minimo risulta

$$\hat{\theta} = 0.5^{1/3} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \approx 0.79.$$

La meno log likelihood con una sola misura risulta

$$\ell_\theta(y) = 0.5(\theta^3 - y)^2$$

con derivata seconda pari a

$$15\theta^4 - 6\theta y.$$

Visto che la media di y risulta θ^3, la matrice di Fisher é $9\theta^4$ e quindi il limite cercato, con n misure, risulta

$$\frac{1}{9n\theta^4}.$$