Compito di SISTEMI E MODELLI 24/06/19: PARTE 1

Non è ammesso l'uso di libri, quaderni o calcolatrici programmabili. Le risposte vanno giustificate. Saranno rilevanti per la valutazione anche l'ordine e la chiarezza di esposizione. Consegnare solo la bella copia.

LE SOLUZIONI DELLA PARTE 1 E QUELLE DELLA PARTE 2 VANNO CONSEGNATE SU FOGLI PROTOCOLLO DISTINTI

Ex.1. [4 pti] Tre regioni sono soggette a fenomeni di immigrazione/emigrazione. Indicando con $x_i(t),\ i = 1, 2, 3$ il numero di soggetti nelle regioni $1, 2, 3$, rispettivamente, all'inizio dell'anno $t-$esimo, le migrazioni sono soggette alle seguenti regole

- ogni anno, solo una percentuale (della popolazione presente all'inizio dell'anno) b $(0 < b < 1)$ rimane nella regione 1, una percentuale a $(0 < a < 1 - b)$ emigra verso la regione 2 e la rimanente percentuale emigra verso la regione 3
- ogni anno, una percentuale (della popolazione presente all'inizio dell'anno) c $(0 < c < 1)$ emigra dalla regione 3 alla regione 2

È richiesto un modello di stato (a tempo discreto) per descrivere la dinamica delle popolazioni delle 3 regioni, e di stabilire cosa accade per $t \to +\infty$ a tali popolazioni, supponendo di conoscere $x(0) = [\, x_1(0) \quad x_2(0) \quad x_3(0)\,]^T$

Ex.2. [5 pti] Dato il sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= ax_1 - x_2\\ \dot{x}_2 &= x_1 + ax_2\\ \dot{x}_3 &= ax_3 - x_3^3\end{aligned}$$

si discuta la stabilità dell'equilibrio nell'origine, al variare del parametro reale a, ricorrendo a

- analisi degli autovalori (SIA per il non-lineare CHE per il linearizzato)
- equazione di Lyapunov con $Q = -2aI$ per il linearizzato
- $V(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ per il non-lineare

Ex.3. [5 pti] Dato il sistema

$$x(t+1) = Fx(t),\ y(t) = Hx(t),\ F = \begin{bmatrix} a & a \\ 0 & a \end{bmatrix},\ H = [\,1 \quad 1\,]$$

è richiesto, al variare del parametro reale a, di

- calcolare forma di Jordan F_J di F e matrice T di cambio di base (NON occorre la verifica che $T^{-1}FT = F_J$)
- usando la trasformata Zeta, calcolare $y(t)$ corrispondente ad $x(0) = [\,1 \quad -1\,]^T$
- ragionando nel dominio del tempo, calcolare $y(t)$ corrispondente ad $x(0) = [\,1 \quad 1\,]^T$

Ex.4. [4 pti] Dato il compartimentale descritto dalle matrici

$$F = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- tracciare il grafo corrispondente
- individuare TUTTI i chiusi, ed in particolare quello massimale e quelli minimali
- individuare i punti di equilibrio (con ingresso nullo)
- calcolare $x(+\infty)$, suppondendo $x(0) = [\,2 \quad 1 \quad 1 \quad 3 \quad 2 \quad 1 \quad 1\,]^T$ e $u(t) = 3$ (costante)

Compito di SISTEMI E MODELLI 24/06/19: PARTE 2

Non è ammessa la consultazione di libri o quaderni e l'uso di calcolatrici programmabili. Le risposte vanno giustificate. Saranno rilevanti per la valutazione anche l'ordine e la chiarezza di esposizione. Consegnare solo la bella copia.

LE SOLUZIONI DELLA PARTE 1 E QUELLE DELLA PARTE 2 VANNO CONSEGNATE SU FOGLI PROTOCOLLO DISTINTI CON LA PARTE 2 CONTENUTA IN NON PIÙ DI 4 FACCIATE

Ex.5. [4 pti] Si consideri il sistema (condizioni iniziali $x(0^-) = 0$, ingresso $u(t) = \delta(t)$)

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= -ax_1(t) + bx_1(t)x_2(t) + u(t)\\
\dot{x}_2(t) &= -bx_2(t) + u(t)\\
y(t) &= x_1(t) + x_2(t)
\end{aligned}$$

È richiesto di

- studiare l'identificabilità a priori con il metodo di Taylor (fermandosi alla derivata **seconda**)
- studiare l'identificabilità a priori del sistema linearizzato (attorno a $x_{eq} = 0$) con il metodo della funzione di trasferimento

Ex.6. [5 pti] Si consideri il seguente modello contenente i parametri incogniti $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_1 &= a\theta_1 + 2a\theta_2 + b\theta_3 + 2b\theta_4 + \mathbf{e}_1\\
\mathbf{y}_2 &= 2a\theta_1 + a\theta_2 + 2b\theta_3 + b\theta_4 + \mathbf{e}_2\\
\mathbf{y}_3 &= b\theta_1 + 2b\theta_2 + a\theta_3 + 2a\theta_4 + \mathbf{e}_3\\
\mathbf{y}_4 &= 2b\theta_1 + b\theta_2 + 2a\theta_3 + a\theta_4 + \mathbf{e}_4
\end{aligned}$$

dove le $\mathbf{e}_i$ sono tutte variabili aleatorie Gaussiane mutuamente indipendenti con media nulla e varianza pari a 1 per $i = 1, 2$ e pari a 2 se $i = 3, 4$. Si assuma di aver osservato le misure $y_1 = 1, y_2 = 2, y_3 = 2, y_4 = 4$.

Sia θ il vettore che contiene i quattro parametri incogniti.

- Sia $a = 1, b = 0$. Si calcoli la stima a massima verosimiglianza del vettore θ.
- Sia $a = 1, b = 0$. Si calcoli l'MSE associato allo stimatore a massima verosimiglianza di θ.
- Sia $a = 0, b = 1$. Si calcoli l'MSE associato allo stimatore a massima verosimiglianza di θ.

Ex.7. [6 pti] Si considerino N variabili aleatorie discrete $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_N$ indipendenti e di densità geometrica. In particolare, esse possono assumere valori $k = 1, 2, \dots$ e la probabilità di assumere valore k è definita da

$$p(\mathbf{y}_i = k) = \theta(1-\theta)^{k-1}, \qquad k = 1, 2, \dots$$

dove $0 < \theta < 1$.

- Ricavare l'espressione dello stimatore $\hat{\theta}$ a massima verosimiglianza di θ;
- Sia N grande. Ricavare un intervallo di confidenza al 95% asintotico (funzione di N) assumendo la stima a massima verosimiglianza pari a $\hat{\theta} = 0.5$.
  Suggerimento: vale l'uguaglianza
  $$\sum_{k=1}^{+\infty} k\theta(1-\theta)^{k-1} = \frac{1}{\theta}.$$

Soluzione Ex.1. Trattasi banalmente di un sistema lineare, descritto da

$$x(t+1) = Fx(t),\ F = \begin{bmatrix} b & 0 & 0 \\ a & 1 & c \\ 1-a-b & 0 & 1-c \end{bmatrix},\ \lambda(F) = b, 1, 1-c$$

Essendoci due autovalori positivi inferiori ad 1 ed uno unitario, il sistema è semplicemente stabile, e non si può che avere convergenza verso un punto di equilibrio (proporzionale all'autovettore e_2). Inoltre è evidente che la popolazione TOTALE rimane immutata, in quanto ci sono solo spostamenti da una regione all'altra (ciò si vede matematicamente notando che $[1 \quad 1 \quad 1]\, F = [1 \quad 1 \quad 1]$, da cui $y(t+1) = [1 \quad 1 \quad 1]\, x(t+1) = [1 \quad 1 \quad 1]\, Fx(t) = [1 \quad 1 \quad 1]\, x(t) = y(t)$, avendo indicato con $y(t)$ la somma delle 3 popolazioni). Di conseguenza non può che essere

$$x(+\infty) = [0 \quad x_1(0) + x_2(0) + x_3(0) \quad 0]^T$$

cioè asintoticamente tutti i soggetti sono emigrati nella regione 2.

Soluzione Ex.2. Il sistema linearizzato ha matrice diagonale a blocchi

$$F = \begin{bmatrix} F_1 & 0 \\ 0 & F_2 \end{bmatrix},\ F_1 = \begin{bmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{bmatrix},\ F_2 = [\, a\,]$$

da cui facilmente i 3 autovalori distinti $a, a \pm i$, la cui parte reale dipende dal segno di a. Quindi stabilità asintotica (per ENTRAMBI i sistemi) se $a < 0$, solo semplice per il LIN e CASO CRITICO per il NON-LIN se $a = 0$, instabilità (per ENTRAMBI i sistemi) se $a > 0$. Risolvendo Lyapunov con $Q = -2aI$ si trova facilmente

$$P = I \text{ (se } a \neq 0),\ P = bI,\ \forall b \in \mathbb{R} \text{ (se } a = 0\text{, quindi infinite soluzioni)}$$

da cui $a < 0$ implica $P, Q > 0$ e la stabilità asintotica, $a = 0$ implica (scegliendo ad esempio $b = 1$) $P > 0, Q = 0 \geq 0$ e quindi stabilità almeno semplice, ma in realtà SOLO semplice (o con Krasowskii, o notando che $Q = 0$ implica $V(x(t)) = ||x(t)||^2$ costante, o notando che essendoci infinite soluzioni NON può esserci la stabilità asintotica), infine $a > 0$ implica che $P > 0, Q < 0$ che non corrisponde a casi noti, quindi NON si può concludere nulla (ci sarebbe comunque instabilità da $V(x) > 0, \dot{V}(x) = -x^T Q x > 0$). Infine, si ha

$$V(x) > 0,\ \dot{V}(x) = 2a(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - 2x_3^4 = 2a(x_1^2 + x_2^2) + 2x_3^2(a - x_3^2)$$

Se $a < 0$, risulta in un intorno dell'origine $\dot{V} < 0$ (quindi stabilità asintotica), mentre $\dot{V} > 0$ (quindi non si può concludere nulla, in realtà si avrebbe instabilità) se $a > 0$, ed infine $\dot{V} \leq 0$ se $a = 0$, con $\mathcal{N} = span(e_1, e_2)$, da cui la stabilità ALMENO semplice. Poichè sostituendo la condizione di appartenenza ad $\mathcal{N}$ il sistema riduce a

$$\dot{x_1} = -x_2,\ \dot{x_2} = x_1,\ x_3 = 0$$

che trattasi di un sistema lineare, e si vede facilmente che esso ammette infinite traiettorie (circolari) nel piano (x_1, x_2), quindi dentro $\mathcal{N}$, da cui per Krasowskii la stabilità SOLO semplice.

Soluzione Ex.3. Calcolando $F - aI$ (unico autovalore doppio $\lambda = a$), si vede che se $a = 0$ siamo già in Forma di Jordan (matrice diagonale), quindi $F_J = F,\ T = I$, mentre se $a \neq 0$ solo e_1 è autovettore, e possiamo ad esempio individuare la catena $e_2 \ \rightarrow\ (F - aI)e_2 = ae_1$, da cui

$$F_J = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix},\ T = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ (se } a \neq 0),\ F_J = F,\ T = I \text{ (se } a = 0)$$

Da

$$Y(z) = H(zI - F)^{-1} z x(0) = -a\frac{z}{(z-a)^2} \ \Rightarrow\ y(t) = -ata^{t-1} = -ta^t \text{ (se } a \neq 0\text{), mentre } y(t) = 0 \text{ (se } a = 0)$$

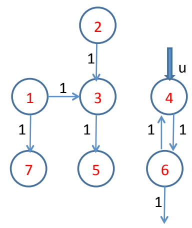
Infine, da

$$F^t = TF_J^t T^{-1} = \begin{bmatrix} a^t & ta^t \\ 0 & a^t \end{bmatrix} \text{ (se } a \neq 0\text{), mentre } F^t = \begin{bmatrix} \delta(t) & 0 \\ 0 & \delta(t) \end{bmatrix} \text{ (se } a = 0)$$

si trova facilmente

$$y(t) = HF^t x(0) = (2+t)a^t \text{ (se } a \neq 0\text{), mentre } y(t) = 2\delta(t) \text{ (se } a = 0)$$

Soluzione Ex.4. Il grafo è in figura



Si vede che solo $4, 6$ comunicano verso l'esterno, per cui $(1, 2, 3, 5, 7)$ è il chiuso massimale. I chiusi sono tanti, ne segue la lista

$$(1, 2, 3, 5, 7),\ (1, 3, 5, 7),\ (1, 3, 5),\ (2, 3, 5),\ (3, 5, 7),\ (3, 5),\ (5),\ (7)$$

di cui (5) e (7) sono i due minimali, da cui i punti di equilibrio

$$x_{eq} = ae_5 + be_7,\ a, b \geq 0$$

Per determinare $x(+\infty)$ possiamo ragionare separatamente su $(4, 6)$ e $(1, 2, 3, 5, 7)$, che non sono collegati. Il contenuto totale nel chiuso massimale è 7 all'inizio, e tale rimane per $t \to +\infty$, ma non può che distribuirsi in accordo ai punti di equilibrio, quindi solo $(5, 7)$ saranno non-vuoti. E siccome (7) è alimentato solo da (1), il suo contenuto sarà $1 + 1 = 2$ (il contenuto iniziale sommato a metà del contenuto di (1), visto che questi alimenta in egual misura $(3, 7)$), e per differenza 5 dovrà contenere $5 = 7 - 2$. Per quel che riguarda $(4, 6)$, a regime dal nodo 6 esce il flusso $2x_6$, mentre entra il flusso x_4, da cui $x_4 = 2x_6$. Nel nodo 4 entra invece il flusso $u = 3$ nonchè x_6, mentre esce x_4, da cui $x_4 = x_6 + 3$. Quindi $x_4 = 6,\ x_6 = 3$ per $t \to +\infty$. In conclusione

$$x(+\infty) = [\,0 \quad 0 \quad 0 \quad 6 \quad 5 \quad 3 \quad 2\,]^T$$

Soluzione Ex.5. Si ha facilmente $x_1(0^+) = x_2(0^+) = 1$, come conseguenza dell'ingresso impulsivo. Ora

$$\begin{aligned} y &= x_1 + x_2,\ \dot{y} = \dot{x}_1 + \dot{x}_2 = -ax_1 + bx_1x_2 - bx_2,\ \ddot{y} = (-a + bx_2)\dot{x}_1 + (bx_1 - b)\dot{x_2} \\ &= (-a + bx_2)(-ax_1 + bx_1x_2) + (bx_1 - b)(-bx_2) = a^2x_1 + b^2x_2 + x_1x_2(b^2x_2 - b^2 - 2ab) \end{aligned}$$

da cui, valutando le precedenti relazioni in $t = 0^+$, il seguente sommario esaustivo (s_1, s_2, s_3): $s_1 = y(0^+) = 2,\ s_2 = \dot{y}(0^+) = -a + b - b = -a,\ s_3 = \ddot{y}(0^+) = a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2$. Quindi a è univocamente determinabile dal sommario esaustivo (il testo richiede di limitarci alla derivata seconda), mentre b richiede la risoluzione di un'equazione di secondo grado, che in generale ammette due soluzioni. Quindi si può dedurre soltanto la (ALMENO) locale identificabilità (ALMENO, in quanto non è escluso che l'identificabilità possa diventare globale andando avanti con le derivate successive). Il linearizzato è invece caratterizzato da

$$F = \begin{bmatrix} -a & 0 \\ 0 & -b \end{bmatrix},\ G = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ H = [\,1 \quad 1\,] \ \Rightarrow\ W(s) = \frac{1}{s + a} + \frac{1}{s + b} = \frac{2s + (a + b)}{s^2 + (a + b)s + ab}$$

ed il sommario esaustivo consiste di $s_1 = 2, s_2 = a + b, s_3 = ab$. Siamo nella classica situazione (equazione di secondo grado) in cui le due radici $-a, -b$ possono essere identificate solo a meno di uno scambio dei loro valori, per cui nuovamente si ha (questa volta SOLO) locale identificabilità.

Soluzione Ex.6. Definendo

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

la matrice di regressione può essere scritta come

$$\Phi = \begin{pmatrix} aG & bG \\ bG & aG \end{pmatrix}.$$

Nel primo caso $(a = 1, b = 0)$, Φ si riduce alla matrice a blocchi

$$\Phi = \begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix}.$$

Applicando Gauss-Markov, e considerando che

$$G^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},$$

con $y = (1\ 2\ 2\ 4)^\top$ otteniamo facilmente

$$\hat{\theta} = \Phi^{-1}y = \begin{pmatrix} G^{-1} & 0 \\ 0 & G^{-1} \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ricaviamo ora l'MSE associato allo stimatore a massima verosimiglianza che coincide con la sua varianza alla luce del teorema di Gauss-Markov. La matrice di covarianza dell'errore è diagonale e pari a

$$\Sigma = \mathrm{diag}\{1\ 1\ 2\ 2\},$$

mentre la matrice di covarianza dello stimatore è $\left(\Phi^\top\Sigma^{-1}\Phi\right)^{-1}$: risulta anch'essa a blocchi e pari a

$$\begin{pmatrix} (G'G)^{-1} & 0 \\ 0 & 2(G'G)^{-1} \end{pmatrix}.$$

Si ha

$$(G'G)^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Si conclude allora facilmente che l'MSE (la traccia della covarianza dello stimatore) risulta pari a $30/9 = 10/3$. Nel secondo caso ($a = 0, b = 1$), Φ si riduce alla matrice a blocchi

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 & G \\ G & 0 \end{pmatrix}$$

con la matrice di covarianza dello stimatore data da

$$\begin{pmatrix} 2(G'G)^{-1} & 0 \\ 0 & (G'G)^{-1} \end{pmatrix}.$$

La somma delle diagonali (traccia) risulta immutata rispetto a prima, quindi l'MSE risulta ancora pari a $30/9 = 10/3$.

Soluzione Ex.7. Riguardo al primo punto, la meno log-verosimiglianza è data da:

$$\ell_\theta(y) = -\log\left(\prod_{i=1}^{n}\theta(1-\theta)^{y_i-1}\right) = -N\log(\theta) - \left(\sum_{i=1}^{N} y_i - N\right)\log(1-\theta).$$

Si ha

$$\frac{\partial \ell_\theta}{\partial \theta} = -\frac{N}{\theta} + \frac{\sum_{i=1}^{N} y_i - N}{1-\theta},$$

da cui otteniamo facilmente lo stimatore a massima verosimiglianza

$$\hat{\theta} = \frac{N}{\sum_{i=1}^{N} y_i}.$$

Riguardo al secondo quesito, lo stimatore $\hat{\theta}$ è asintoticamente Gaussiano ed efficiente e quindi è asintoticamente unbiased e

$$\mathrm{Var}\ \hat{\theta} \approx \frac{1}{NI(\theta)},$$

dove $I(\theta)$ è la matrice di Fisher di una variabile geometrica $\mathbf{y_i}$. Si ha

$$I(\theta) = \mathbb{E}\frac{\partial^2 \ell_\theta}{\partial \theta^2} = \mathbb{E}\left[\frac{1}{\theta^2} + \frac{\mathbf{y}_i - 1}{(1-\theta)^2}\right].$$

Dal suggerimento sappiamo che $\mathbb{E}\mathbf{y}_i = \frac{1}{\theta}$, quindi

$$I(\theta) = \frac{1}{\theta^2} + \frac{\frac{1}{\theta} - 1}{(1-\theta)^2} = \frac{1}{\theta^2(1-\theta)}.$$

Si ha allora

$$\operatorname{Var} \hat{\theta} \approx \frac{\theta^2(1-\theta)}{N}.$$

L'intervallo di confidenza richiesto risulta allora

$$\left(\hat{\theta} - 2\sqrt{\frac{\hat{\theta}^2(1-\hat{\theta})}{N}}, \hat{\theta} + 2\sqrt{\frac{\hat{\theta}^2(1-\hat{\theta})}{N}}\right) \approx \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2N}}, \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2N}}\right).$$