Compito di SISTEMI E MODELLI 27/06/18: PARTE 1

Non è ammessa l'uso di libri, quaderni o calcolatrici programmabili. Le risposte vanno giustificate. Saranno rilevanti per la valutazione anche l'ordine e la chiarezza di esposizione. Consegnare solo la bella copia.

LE SOLUZIONI DELLA PARTE 1 E QUELLE DELLA PARTE 2 VANNO CONSEGNATE SU FOGLI PROTOCOLLO DISTINTI

Ex.1 [5 pti] Un'epidemia è descritta tramite 4 variabili di stato che evolvono in modo discreto ($t = 0, 1, 2, \ldots$, dove 1 corrisponde ad un certo intervallo temporale, ad esempio 1 mese). Le variabili sono i soggetti malati $m(t)$, i sani non vaccinati $s(t)$, i sani vaccinati $v(t)$ e i deceduti $d(t)$. La loro dinamica segue le regole esposte sotto:

- $m(t)$ rappresenta il numero di malati nell'intervallo $t-$esimo: di questi all'intervallo successivo una percentuale $\frac{1}{4}$ muore, la stessa percentuale $\frac{1}{4}$ guarisce, gli altri rimangono malati;
- $s(t)$ rappresenta il numero di sani non vaccinati: di questi una percentuale $\frac{1}{4}$ viene vaccinata ed acquisisce istantaneamente (e per sempre) immunità all'infezione, mentre una percentuale $am(t)$ si ammala (in pratica, $am(t)s(t)$ diventano malati), gli altri rimangono sani (ma non vaccinati);
- $v(t)$ rappresenta il numero di sani vaccinati;
- $d(t)$ rappresenta il numero totale di deceduti dall'intervallo iniziale 0 fino all'intervallo attuale $t-$esimo.

Si scriva un modello che descriva la dinamica dell'epidemia, con uscita $y(t)$ pari a tutti quelli che sono ancora vivi nell'intervallo $t-$esimo. Si determinino i punti di equilibrio per tale modello, e si dimostri che asintoticamente si ha certamente convergenza verso uno di tali punti di equilibrio (**Suggerimento:** per l'ultimo quesito si analizzi la dinamica di $m(t) + s(t)$ e di $m(t) + s(t) + v(t) + d(t)$.)

Ex.2 [4 pti] Data (a parametro reale)

$$F = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ a & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & a \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \end{bmatrix}$$

è richiesto di determinare matrice di cambio di base T e forma di Jordan F_J al variare di a (**Nota.** Non è richiesta la verifica che $T^{-1}FT = F_J$, ma solo l'espressione di T e di F_J)

Ex.3 [5 pti] Dato (a parametro reale) il sistema Σ seguente

$$x_1(t+1) = ax_1^3(t),\ \ x_2(t+1) = -ax_2^3(t) + ax_2(t)$$

e costruito il sistema linearizzato Σ_{LIN} attorno a $x_{eq} = 0$, è richiesto di

- studiare la stabilità di Σ_{LIN} e di Σ con l'analisi degli autovalori;
- studiare la stabilità di Σ_{LIN}, QUANDO POSSIBILE, ricorrendo all'equazione di Lyapunov con $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$, SIA nel caso $b = 1$ CHE nel caso $b = 0$;
- nei casi CRITICI, studiare la stabilità di Σ ricorrendo a $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$.

Ex.4 [4 pti] Dato il sistema compartimentale descritto dalle matrici

$$K = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},\ G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- si disegni il grafo corrispondente;
- si determinino tutti i chiusi, evidenziando in particolare il massimale ed i minimali;
- si determini la molteplicità di $\lambda = 0$ e tutti i punti di equilibrio (in assenza di ingresso);
- supponendo che $x(0) = [1 \quad 2 \quad 1 \quad 1 \quad 1]^T$ e che $u(t) = 1$, si determini $x(+\infty)$.

Compito di SISTEMI E MODELLI 27/06/18: PARTE 2

Non è ammessa la consultazione di libri o quaderni e l'uso di calcolatrici programmabili. Le risposte vanno giustificate. Saranno rilevanti per la valutazione anche l'ordine e la chiarezza di esposizione. Consegnare solo la bella copia.

LE SOLUZIONI DELLA PARTE 1 E QUELLE DELLA PARTE 2
VANNO CONSEGNATE SU FOGLI PROTOCOLLO DISTINTI
CON LA PARTE 2 CONTENUTA IN NON PIU' DI 4 FACCIATE

Ex.5 [4 pti]. Si consideri il modello lineare:

$$\dot{x}(t) = Kx(t) + Gu(t), \qquad y(t) = Hx(t)$$

con:

$$K = \begin{bmatrix} -(k_{21}+k_{31}) & 0 & 0 \\ k_{21} & -k_{02} & 0 \\ k_{31} & 0 & -k_{03} \end{bmatrix}, \; G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \; H = [\, \tfrac{1}{\alpha} \quad 0 \quad 0 \,]$$

dove $k_{21}, k_{31}, k_{03}, k_{02}, \alpha$ sono parametri incogniti.
Si studi l'identificabilità a priori del modello usando come ingresso u il delta di Dirac.

Ex 6 [5 pti]. Si considerino le 2 variabili aleatorie:

$$\mathbf{y}_1 = \theta_1 + \theta_2 + \mathbf{e}_1, \qquad \mathbf{y}_2 = \theta_2 + 2\mathbf{e}_2,$$

dove le $\mathbf{e}_i$ sono Gaussiane, indipendenti, a media nulla e varianza 1, ovvero $\mathbf{e}_i \sim \mathcal{N}(0,1)$.
Si indichi con $\hat{\theta}$ lo stimatore efficiente di θ e con $\bar{\theta}$ lo stimatore $A\mathbf{y}$ dove $\mathbf{y} = [\mathbf{y}_1 \; \mathbf{y}_2]^T$ e

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

- Calcolare l'MSE associato allo stimatore efficiente di $\hat{\theta}$.
- Calcolare, se esistono, valori di θ per cui il modulo della differenza tra l'MSE di $\bar{\theta}$ e l'MSE di $\hat{\theta}$ sia inferiore a 21, ovvero i θ tali che $|MSE_{\bar{\theta}}(\theta) - MSE_{\hat{\theta}}(\theta)| < 21$.

Ex.7 [6 pti] Si considerino due variabili aleatorie Gaussiane e indipendenti $\mathbf{x}_1 \sim \mathcal{N}(2\theta, \sigma^2)$ e $\mathbf{x}_2 \sim \mathcal{N}(\theta, 4\sigma^2)$ dove la media θ è incognita mentre σ^2 è nota.

- Si ricavi lo stimatore a massima verosimiglianza (ML) $\hat{\theta}^{ML}$ di θ.
- Si discuta l'efficienza dello stimatore $\hat{\theta}^{ML}$.

Soluzione Ex.1. Si ha facilmente $m(t+1) = \frac{1}{2}m(t) + am(t)s(t)$ (quelli che rimangono malati, non guarendo e non morendo, sommati ai nuovi ammalati), $s(t+1) = \frac{3}{4}s(t) + \frac{1}{4}m(t) - am(t)s(t)$ (quelli che non vengono vaccinati, sommando quelli che sono guariti e sottraendo chi si è nel frattempo ammalato), $v(t+1) = v(t) + \frac{1}{4}s(t)$ (i vaccinati si incrementano nel tempo della quantità indicata), $d(t+1) = d(t) + \frac{1}{4}m(t)$ (quelli già deceduti aumentati dei nuovi deceduti), ed infine $y(t) = m(t) + s(t) + v(t)$.

$$\begin{array}{lcl} m(t+1) & = & \frac{1}{2}m(t) + am(t)s(t) \\ s(t+1) & = & \frac{3}{4}s(t) + \frac{1}{4}m(t) - am(t)s(t) \\ v(t+1) & = & v(t) + \frac{1}{4}s(t) \\ d(t+1) & = & d(t) + \frac{1}{4}m(t) \\ y(t) & = & m(t) + s(t) + v(t) \end{array}$$

I punti di equilibrio si ottengono imponendo che ogni variabile assuma lo stesso valore all'istante $(t+1)$ ed all'istante t, per cui la terza e quarta equazione implicano facilmente $m = s = 0$, mentre v, d possono avere valore arbitrario. Ma $m = s = 0$ soddisfa anche le prime due equazioni, quindi abbiamo infiniti punti di equilibrio della forma

$$[\, m_{eq} \quad s_{eq} \quad v_{eq} \quad d_{eq} \,]^T = [\, 0 \quad 0 \quad v_0 \quad d_0 \,]^T \,, \text{ con } v_0, d_0 \text{ arbitrari}$$

Poichè sommando le prime due equazioni si ottiene

$$m(t+1) + s(t+1) = \frac{3}{4}[m(t) + s(t)] \;\Rightarrow\; m(t) + s(t) = \left(\frac{3}{4}\right)^t [m(0) + v(0)] \;\rightarrow\; 0$$

ed essendo chiaramente tutte le variabili non-negative, ciò implica che sia $m(t)$ che $s(t)$ tendono a zero. In modo analogo, sommando le quattro equazioni di stato si ottiene

$$m(t+1) + s(t+1) + v(t+1) + d(t+1) = m(t) + s(t) + v(t) + d(t) \;\Rightarrow\; m(t) + s(t) + v(t) + d(t) = \text{ costante}$$

Quindi $v(t) + d(t)$ deve rimanere limitato, mentre la terza e quarta equazione implicano che sia $v(t)$ che $d(t)$ sono non-decrescenti, per cui ammettono limite v_0, d_0 opportuno, per t tendente all'infinito. Quindi ciò prova che asintoticamente viene raggiunto un punto di equilibrio, in cui tutti sono o morti o vaccinati. Non si può invece dedurre quale degli infiniti punti di equilibrio viene raggiunto, in quanto ciò richiederebbe la risoluzione delle equazioni non-lineari del modello.

Soluzione Ex.2. Essendo la matrice triangolare a blocchi, i suoi autovalori sono facilmente $-1, -1, a-1, a-1$. Occorre quindi distinguere due casi.

- $a = 0$: in tal caso $\lambda = -1$ ha molteplicità $\nu = 4$. $\ker(F+I)$ è facilmente $\text{span}(e_1, e_2, e_4)$, per cui sicuramente ci sarà un autovettore generalizzato e senza nessun calcolo possiamo assumerlo pari ad esempio ad e_3. Poichè $(F+I)e_3 = e_1$, abbiamo le catene $e_3 \to e_1, e_2, e_4$, da cui

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; F_J = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

- $a \neq 0$: in tal caso per l'autovalore $\lambda = -1$ troviamo l'unico autovettore e_2, mentre calcolando $\ker(F+I)^2$ si trova $\text{span}(e_1, e_2)$. Basta allora scegliere la catena $e_1 \to (F+I)e_1 = ae_2$. Per $\lambda = a-1$ si ha invece l'unico autovettore $v = [\, 1 \quad 1 \quad a \quad 0 \,]^T$, e calcolando $\ker[F-(a-1)I]^2$ si trova che un altro vettore può essere, ad esempio, $w = [\, 0 \quad -1 \quad a \quad a \,]^T$, da cui la catena $w \to [F-(a-1)I]w = av$. Quindi

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & a & 0 \\ a & 0 & a & -1 \\ 0 & 0 & a^2 & a \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}, \; F_J = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \end{bmatrix}$$

Soluzione Ex.3. Si ha $F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$, con autovalori $0, a$, per cui stabilità asintotica se $|a| < 1$, SOLO semplice se $|a| = 1$ (autovalore di modulo unitario con molteplicità 1), instabilità se $|a| > 1$ (autovalore di modulo superiore ad 1). Questo vale per Σ_{LIN}, mentre per Σ possiamo trarre le identiche conclusioni eccetto nei casi $a = \pm 1$, che sono casi CRITICI. L'equazione di Lyapunov $P - F^T P F = Q$ porge le soluzioni

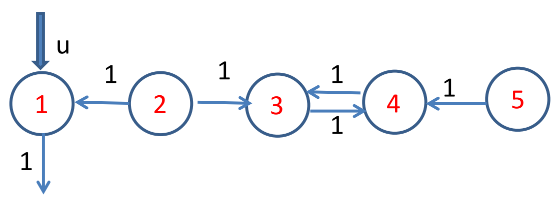
$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix}, \text{ con } (1 - a^2)z = b$$

Se $|a| \neq 1$ si ha l'unica soluzione $z = \frac{b}{1-a^2}$, che non è di nessuna utilità se $b = 0$ ($P \geq 0$), mentre porge $P > 0, Q > 0$ se $b = 1$ e se $|a| < 1$, da cui l'asintotica stabilità (come previsto dall'analisi degli autovalori). Se invece $|a| = 1$ non si hanno soluzioni se $b = 1$, mentre se $b = 0$ si ottengono infinite soluzioni (z qualsiasi), tra cui anche soluzioni con $P > 0$ (basta scegliere $z > 0$), cui corrisponde $Q \geq 0$ con $\mathcal{N} = \ker Q = span(e_2)$. Sostituendo $x_1(t) = 0$ nelle equazioni di Σ_{LIN} si ottiene $x_2(t) = a^t x_2(0)$, costante oppure oscillante a seconda che sia $a = 1$ oppure $a = -1$, e questo implica che in ogni caso ci sono traiettorie non nulle in $\mathcal{N}$, da cui per Krasowskii la stabilità SOLO semplice (in accordo all'analisi degli autovalori). Nei casi critici ($a = \pm 1$) si ha

$$\Delta V(x_1, x_2) = a^2 x_1^6 + a^2 x_2^2 (1 - x_2^2)^2 - x_1^2 - x_2^2 = -x_1^2(1 - x_1^4) - x_2^4(2 - x_2^2)$$

essendo $a^2 = 1$, da cui la stabilità asintotica essendo tale funzione < 0 in un intorno dell'origine (basta che sia $|x_1| < 1, |x_2| < \sqrt{2}$).

Soluzione Ex.4. Il compartimentale è descritto dal grafo in figura.



Il nodo 1 comunica verso l'esterno, ed il nodo 2 verso il nodo 1, mentre gli altri 3 nodi non hanno flussi uscenti verso l'esterno o verso i nodi $1, 2$. Quindi $(3, 4, 5)$ è il chiuso massimale, ed in esso si individua facilmente l'unico altro chiuso, minimale, pari a $(3, 4)$. Quindi $\lambda = 0$ ha $\nu = 1$ ed i punti di equilibrio (nel minimale) sono facilmente

$$x_{eq} = a \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T, \ a \geq 0$$

Dalla struttura del grafo si vede facilmente che i nodi $2, 5$ si svuotano, ed il nodo 2 immette nel chiuso (attraverso il collegamento con il nodo 3) metà del suo contenuto (avendo uguali i coefficienti di flusso verso i nodi $1, 3$), mentre il nodo 5 immette tutto il suo contenuto nel minimale (attraverso il collegamento con il nodo 4). Quindi i nodi $3, 4$ a regime hanno un contenuto pari a $1 + 1 + 1 + 1 = 4$ (la somma dei contenuti iniziali di $3, 4$ e dei due contributi appena discussi), che si equidistribuisce nei nodi $3, 4$, vista la struttura del punto di equilibrio. Per il nodo 1, a regime non entra nulla dal nodo 2 che si è svuotato, mentre entra un flusso costante pari ad 1 tramite l'azione dell'ingresso, e deve quindi uscire un flusso identico verso l'esterno, da cui il nodo a regime deve necessariamente contenere 1. Quindi $x(+\infty) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}^T$.

Soluzione Ex.5. Il sistema risulta lineare quindi per ottenere il sommario esaustivo applichiamo la trasformata di Laplace per ottenere la matrice di trasferimento del sistema:

$$W(s) = H(sI - K)^{-1} G = \frac{1/\alpha}{s + k_{21} + k_{31}}$$

da cui si ricava subito la non identificabilità del sistema visto che, ad esempio, k_{01} e k_{02} non compaiono nel sommario esaustivo.

Soluzione Ex.6. Il modello delle misure è equivalente al modello lineare Gaussiano:

$$\mathbf{y} = \Phi\theta + \mathbf{v}. \quad \Phi = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

dove $\mathbf{v} \sim \mathcal{N}(0, \Sigma)$ con

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Riguardo al primo punto, per Gauss-Markov, lo stimatore efficiente $\hat{\theta}$ è tale che

$$\begin{aligned} MSE_\theta(\hat{\theta}) &= \text{Trace}\left(\left(\Phi^T\Sigma^{-1}\Phi\right)^{-1}\right) \\ &= \text{Trace}\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} = 9. \end{aligned}$$

Riguardo al secondo punto, consideriamo ora le due componenti dello stimatore $\bar{\theta} = A\mathbf{y}$. Si ha

$$E_\theta \bar{\theta}_1 = E_\theta(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2) = \theta_1, \quad E_\theta \bar{\theta}_2 = E_\theta \mathbf{y}_2 = 2\theta_2.$$

Si noti quindi che $\bar{\theta}$ non è unbiased: la componente di bias è pari a $(2\theta_2 - \theta_2)^2 = \theta_2^2$.
Riguardo alla varianza di $\bar{\theta}$, si ha

$$Var_\theta(\bar{\theta}) = A\Sigma A^T = \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ -8 & 16 \end{pmatrix}.$$

da cui

$$MSE_\theta(\bar{\theta}) = \theta_2^2 + \text{Trace}\left(Var_\theta(\hat{\theta})\right) = \theta_2^2 + 21.$$

I valori di θ cercati sono quindi tali che $|MSE_{\bar{\theta}}(\theta) - MSE_{\hat{\theta}}(\theta)| < 21$, che porta alla disuguaglianza $|\theta_2^2 + 21 - 9| < 21$, da cui $\theta_2^2 < 9$. I valori cercati di θ sono tutti quelli tali che $-3 < \theta_2 < 3$.

Soluzione Ex.7. Usando ℓ_θ per denotare la -log likelihood, lo stimatore $\hat{\theta}$ è così definito:

$$\hat{\theta}^{ML} = \arg\min_\theta \ell_\theta = \arg\min_\theta \ \frac{1}{2}\frac{(x_1 - 2\theta)^2}{\sigma^2} + \frac{1}{2}\frac{(x_2 - \theta)^2}{4\sigma^2} + Costante$$

La funzione da minimizzare è quadratica e convessa. Imponendo che la derivata sia zero otteniamo:

$$\frac{d\ell_\theta}{d\theta} = -2\frac{x_1 - 2\theta}{\sigma^2} - \frac{x_2 - \theta}{4\sigma^2} = 0$$

da cui si ottiene lo stimatore richiesto come

$$\hat{\theta}^{ML} = \frac{8x_1 + x_2}{17}.$$

Riguardo al secondo punto, si ha

$$E\ \hat{\theta}^{ML} = \frac{8\mathcal{E}x_1 + \mathcal{E}x_2}{17} = \frac{16\theta + \theta}{17} = \theta.$$

Lo stimatore è quindi unbiased con varianza (si ricordi che $Var\ x_1 = \sigma^2$ e $Var\ x_2 = 4\sigma^2$)

$$Var\ \hat{\theta}^{ML} = Var\frac{8x_1 + x_2}{17} = \frac{64\sigma^2 + 4\sigma^2}{17^2} = \frac{4}{17}\sigma^2.$$

Un limite inferiore alla varianza di qualsiasi stimatore unbiased è dato dalla inversa della matrice di Fisher. La matrice di Fisher risulta

$$I(\theta) = \mathcal{E}[\ell_\theta] = \frac{4}{\sigma^2} + \frac{1}{4\sigma^2} = \frac{17}{4\sigma^2}$$

Il limite inferiore è quindi

$$\frac{4}{17}\sigma^2$$

che coincide con la varianza di $\hat{\theta}^{ML}$. Si conclude che lo stimatore è efficiente.