ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 25.01.2016

TEMA 1

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{1}{\frac{\pi}{4} + \arctan \frac{x+1}{|x-1|}}.$$

(a) Determinare il dominio D di f e studiarne il segno; determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti;
(b) studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di f; determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto e calcolare i limiti significativi di f';
(c) disegnare un grafico qualitativo di f.

Svolgimento. (a) Si ha

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} : x \neq 1 \text{ e } \arctan \frac{x+1}{|x-1|} \neq -\frac{\pi}{4} \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} : x \neq 1 \text{ e } \frac{x+1}{|x-1|} \neq -1 \right\} = \{ x \in \mathbb{R} : x \neq 1 \},$$

perché l'equazione $x + 1 = -|x-1|$ non ha soluzioni. La funzione risulta positiva se e solo se $\arctan \frac{x+1}{|x-1|} > -\frac{\pi}{4}$, $x \in D$, cioè se e solo se $x+1 > -|x-1|$, $x \in D$. Quest'ultima disequazione è evidentemente verificata da ogni $x \in D, x > 1$, mentre per $x < 1$ è equivalente a $x + 1 > x - 1$, che è pure verificata. Di conseguenza, $f(x) > 0$ per ogni $x \in D$.
Si ha

$$\lim_{x \to 1} \arctan \frac{x+1}{|x-1|} = \frac{\pi}{2},$$

per cui

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{\frac{\pi}{4} + \arctan \frac{x+1}{|x-1|}} = \frac{1}{\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}} = \frac{4}{3\pi},$$

quindi f è prolungabile con continuità ad $x = 1$. Si ha inoltre

$$\lim_{x \to +\infty} \arctan \frac{x+1}{|x-1|} = \frac{\pi}{4},$$

per cui

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{2}{\pi},$$

quindi $y = 2/\pi$ è un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$, mentre

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\arctan \frac{x+1}{|x-1|} + \frac{\pi}{4} \right) = \lim_{x \to -\infty} \left(\arctan \frac{x+1}{-x+1} + \frac{\pi}{4} \right) = 0^+,$$

e quindi

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty.$$

Studio dell'asintoto obliquo per $x \to -\infty$:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x\left(\frac{\pi}{4} + \arctan \frac{x+1}{-x+1}\right)}.$$

Conviene calcolare prima il limite del denominatore:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\Big(x\big(\frac{\pi}{4}+\arctan\frac{x+1}{-x+1}\big)\Big) &= \lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{\pi}{4}+\arctan\frac{x+1}{-x+1}}{\frac{1}{x}}\\ (H) &= \lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{2}{(1-x)^2+(1+x)^2}}{\frac{-1}{x^2}}\\ &= \lim_{x\to-\infty}\frac{-2x^2}{2(1+x^2)}=-1,\end{aligned} \tag{1}$$

per cui

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-1.$$

Per calcolare il termine noto, passiamo attraverso lo sviluppo asintotico di $\arctan y$ per $y\to-1$, che calcoliamo preliminarmente. Si ha

$$\arctan y=-\frac{\pi}{4}+\frac{y+1}{2}+\frac{(y+1)^2}{4}+o(y+1)^2,\qquad y\to-1,$$

da cui si ricava, per $x\to-\infty$,

$$\begin{aligned}\arctan\frac{x+1}{-x+1} &= -\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\Big(\frac{x+1}{-x+1}+1\Big)+\frac{1}{4}\Big(\frac{x+1}{-x+1}+1\Big)^2+o\Big(\frac{x+1}{-x+1}+1\Big)^2\\ &= -\frac{\pi}{4}+\frac{1}{-x+1}+\Big(\frac{1}{-x+1}\Big)^2+o\Big(\frac{1}{-x+1}\Big)^2.\end{aligned}$$

Perciò

$$\lim_{x\to-\infty}\Big(f(x)+x\Big)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1+\frac{x}{-x+1}+\frac{x}{(-x+1)^2}+o\big(\frac{x}{(-x+1)^2}\big)}{\frac{1}{-x+1}+o\big(\frac{1}{-x+1}\big)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{1}{(-x+1)^2}+o\big(\frac{1}{x}\big)}{\frac{1}{-x+1}+o\big(\frac{1}{-x+1}\big)}=0.$$

Quindi $y=-x$ è asintoto obliquo per $x\to-\infty$.
(b) f è sicuramente derivabile per ogni $x\in D$, in quanto composta di funzioni elementari derivabili. Si ha

$$f'(x)=-f^2(x)\frac{|x-1|-(x+1)\operatorname{sgn}(x-1)}{(1-x)^2+(1+x)^2}=\begin{cases}f^2(x)\frac{2}{(1-x)^2+(1+x)^2} & \text{per } x>1\\ -f^2(x)\frac{2}{(1-x)^2+(1+x)^2} & \text{per } x<1,\end{cases}$$

quindi f è strettamente decrescente in $]-\infty,1[$ e strettamente crescente in $]1,+\infty[$. Il punto $x=1$ è perciò il punto di minimo assoluto, con $f(1)=\frac{4}{3\pi}$. Restano da studiare i limiti di f' per $x\to1^\pm$. Si ha

$$\lim_{x\to1^+}f'(x)=\frac{8}{9\pi^2}=-\lim_{x\to1^-}f'(x).$$

Pertanto 1 è un punto angoloso.
(c) Il grafico è in figura 1.

Esercizio 2 Determinare tutti gli $x\in\mathbb{R}$ tali che la serie

$$\sum_{n=5}^{+\infty}\frac{\big(\log(x-3)\big)^n}{n-1}$$

converga, risp. converga assolutamente.

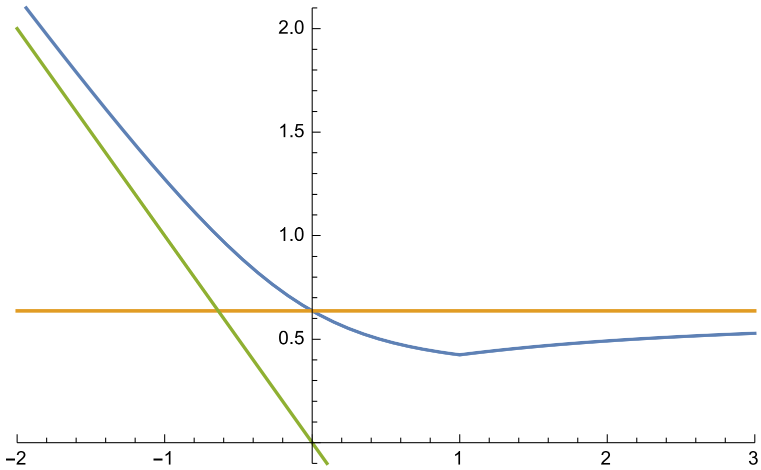


Figura 1: Il grafico di f (Tema 1).

Svolgimento. La serie è definita per $x > 3$. Per tali x studiamo la convergenza assoluta con il criterio asintotico della radice. Si ha

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n-1}}\, |\log(x-3)| = |\log(x-3)|.$$

Pertanto, per $e^{-1}+3 < x < e+3$[1] la serie converge assolutamente e quindi semplicemente, mentre per $3 < x < e^{-1}+3$ e per $x > e+3$ il termine generale della serie non è infinitesimo, e quindi la serie diverge assolutamente e non converge semplicemente. Per $x = e^{-1}+3$, cioè per $\log(x-3) = -1$, la serie converge per il criterio di Leibniz e diverge assolutamente perché il termine generale è asintotico a $\frac{1}{n}$. Per $x = e+3$, cioè per $\log(x-3) = 1$, la serie ha termini positivi e diverge perché il termine generale è asintotico a $\frac{1}{n}$.

Esercizio 3 Calcolare l'integrale

$$\int_0^{1/2} \big(\arcsin 2x\big)^2 dx$$

Svolgimento. Si ha

$$\begin{aligned}
\int_0^{1/2} \big(\arcsin 2x\big)^2 dx &= [\text{ponendo } 2x = t]\ \ \frac{1}{2}\int_0^1 \arcsin^2 t\, dt \\
&= [\text{per parti}]\ \ \frac{1}{2}\Big[t \arcsin^2 t|_0^1 - 2\int_0^1 \frac{t \arcsin t}{\sqrt{1-t^2}}\, dt\Big] \\
&= [\text{ancora per parti}]\ \ \frac{\pi^2}{8} - \Big[-\sqrt{1-t^2}\, \arcsin t|_0^1 + \int_0^1 \frac{\sqrt{1-t^2}}{\sqrt{1-t^2}}\, dt\Big] \\
&= \frac{\pi^2}{8} - 1.
\end{aligned}$$

[1]molti studenti hanno sbagliato la semplice disequazione $|\log(x-3)| < 1$, scrivendo che le soluzioni sono $-e+3 < x < e+3$!

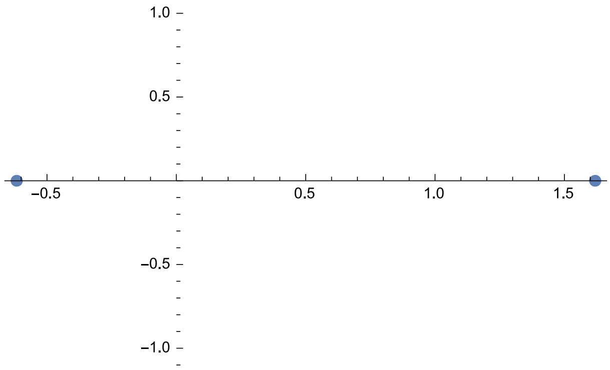


Figura 2: Le soluzioni dell'esercizio 4 (Tema 1).

In alternativa, si poteva eseguire la sostituzione $2x = \sin t$, da cui $dx = \frac{1}{2}\cos t\, dt$. Siccome nell'intervallo di integrazione $\arcsin \sin t = t$, l'integrale diventa

$$\begin{aligned}\int_0^{1/2} \big(\arcsin 2x\big)^2 dx &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} t^2 \cos t\, dt = [\text{per parti}]\ \ \frac{1}{2}\Big[t^2 \sin t|_0^{\pi/2} - 2\int_0^{\pi/2} t \sin t\, dt\Big] \\ &= [\text{ancora per parti}]\ \ \frac{\pi^2}{8} + \Big[t\cos t|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \cos t\, dt\Big] \\ &= \frac{\pi^2}{8} - 1.\end{aligned}$$

Esercizio 4 Si consideri la funzione

$$f(z) = \frac{z+1}{\bar{z}}, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Si determini e si disegni sul piano di Gauss l'insieme

$$A = \big\{z \in \mathbb{C} : f(z) = z\big\}.$$

Svolgimento. Se $z \neq 0$, la condizione $f(z) = z$ equivale a $z + 1 = \bar{z}z$, cioè, ponendo $z = x + iy$, equivale a

$$x + 1 + iy = x^2 + y^2,$$

che implica $y = 0$ e $x^2 - x - 1 = 0$ cioè $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ (v. figura 2).

Esercizio 5 [facoltativo] Sia

$$f(x) = \int_{x^2}^{2x^2} \frac{e^{-t} - 1}{t}\, dt.$$

Calcolare lo sviluppo di Taylor di f di ordine 2 con punto iniziale 0.
Svolgimento. Si ha che $f(0) = 0$ e inoltre, per ogni x fissato, preso un punto c compreso tra x^2 e $2x^2$, si ha

$$f(x) = -\int_c^{x^2} \frac{e^{-t} - 1}{t}\, dt + \int_c^{2x^2} \frac{e^{-t} - 1}{t}\, dt.$$

Per il teorema fondamentale del calcolo e il teorema sulla derivata della funzione composta si ha perciò

$$f'(x) = -2x\frac{e^{-x^2} - 1}{x^2} + 4x\frac{e^{-2x^2} - 1}{2x^2} = 2\frac{e^{-2x^2} - e^{-x^2}}{x}.$$

Siccome
$$\lim_{x\to 0} f'(x) = 0,$$
risulta $f'(0) = 0$. Si ha inoltre
$$f''(x) = 2\frac{e^{-x^2}(1+2x^2) - e^{-2x^2}(1+4x^2)}{x^2} \longrightarrow -2 \quad \text{per } x \to 0,$$
quindi $f''(0) = -2$. Lo sviluppo richiesto è perciò
$$f(x) = -x^2 + o(x^2) \quad \text{per } x \to 0.$$

TEMA 2

Esercizio 1 Si consideri la funzione
$$f(x) = \frac{1}{\arctan\frac{x-1}{|x+1|} - \frac{\pi}{4}}.$$
(a) Determinare il dominio D di f e studiarne il segno; determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti;
(b) studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di f; determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto e calcolare i limiti significativi di f';
(c) disegnare un grafico qualitativo di f.
Svolgimento. (a) Si ha
$$D = \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq -1 \text{ e } \arctan\frac{x-1}{|x+1|} \neq \frac{\pi}{4}\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq -1 \text{ e } \frac{x-1}{|x+1|} \neq 1\right\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq -1\},$$
perché l'equazione $x-1 = |x+1|$ non ha soluzioni. La funzione risulta positiva se e solo se $\arctan\frac{x-1}{|x+1|} > \frac{\pi}{4}$, $x \in D$, cioè se e solo se $x-1 > |x+1|$, $x \in D$. Quest'ultima disequazione non è mai verificata per ogni $x \in D, x > -1$, mentre per $x < -1$ è equivalente a $x-1 > -x-1$, che è pure mai verificata. Di conseguenza, $f(x) < 0$ per ogni $x \in D$.
Si ha
$$\lim_{x\to -1} \arctan\frac{x-1}{|x+1|} = -\frac{\pi}{2},$$
per cui
$$\lim_{x\to -1} \frac{1}{-\frac{\pi}{4} + \arctan\frac{x-1}{|x+1|}} = \frac{1}{\frac{-\pi}{4} - \frac{\pi}{2}} = -\frac{4}{3\pi},$$
quindi f è prolungabile con continuità ad $x = -1$. Si ha inoltre
$$\lim_{x\to -\infty} \arctan\frac{x-1}{|x+1|} = -\frac{\pi}{4},$$
per cui
$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\frac{2}{\pi},$$
quindi $y = -2/\pi$ è un asintoto orizzontale per $x \to -\infty$, mentre
$$\lim_{x\to +\infty} \left(\arctan\frac{x-1}{|x+1|} - \frac{\pi}{4}\right) = \lim_{x\to +\infty} \left(\arctan\frac{x-1}{x+1} - \frac{\pi}{4}\right) = 0^-,$$

e quindi

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty.$$

Studio dell'asintoto obliquo per $x \to +\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x\left(\frac{-\pi}{4} + \arctan\frac{x-1}{x+1}\right)}.$$

Conviene calcolare prima il limite del denominatore:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \left(x\left(\frac{-\pi}{4} + \arctan\frac{x-1}{x+1}\right)\right) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{-\pi}{4} + \arctan\frac{x-1}{x+1}}{\frac{1}{x}} \\
(H) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2}{(x-1)^2+(1+x)^2}}{\frac{-1}{x^2}} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x^2}{2(1+x^2)} = -1,
\end{aligned} \tag{2}$$

per cui

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = -1.$$

Si ha infine

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \left(f(x)+x\right) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{1 + x\left(\frac{-\pi}{4} + \arctan\frac{x-1}{x+1}\right)}{\left(\frac{-\pi}{4} + \arctan\frac{x-1}{x+1}\right)} \\
(H) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{-\pi}{4} + \arctan\frac{x-1}{x+1} + \frac{2x}{(x-1)^2+(x+1)^2}}{\frac{1}{x^2+1}} \\
(H) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{1+x^2} + \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2}}{\frac{-2x}{(1+x^2)^2}} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{1+x^2+1-x^2}{-2x} = 0.
\end{aligned}$$

Quindi $y = -x$ è asintoto obliquo per $x \to +\infty$.
(b) f è sicuramente derivabile per ogni $x \in D$, in quanto composta di funzioni elementari derivabili. Si ha

$$f'(x) = -f^2(x)\frac{|x+1| - (x-1)\operatorname{sgn}(x+1)}{(x+1)^2+(x-1)^2} = -f^2(x)\operatorname{sgn}(x+1)\frac{x+1-x+1}{(x+1)^2+(x-1^2)} = -f^2(x)\operatorname{sgn}(x+1)\frac{1}{1+x^2}$$

quindi f è strettamente decrescente in $]-1,+\infty[$ e strettamente crescente in $]-\infty,-1[$. Il punto $x=-1$ è perciò il punto di massimo assoluto, con $f(-1) = -\frac{4}{3\pi}$. Restano da studiare i limiti di f' per $x \to -1^{\pm}$. Si ha

$$\lim_{x\to-1^+} f'(x) = -\frac{8}{9\pi^2} = -\lim_{x\to-1^-} f'(x).$$

Pertanto -1 è un punto angoloso.

(c) Il grafico è in figura 3.

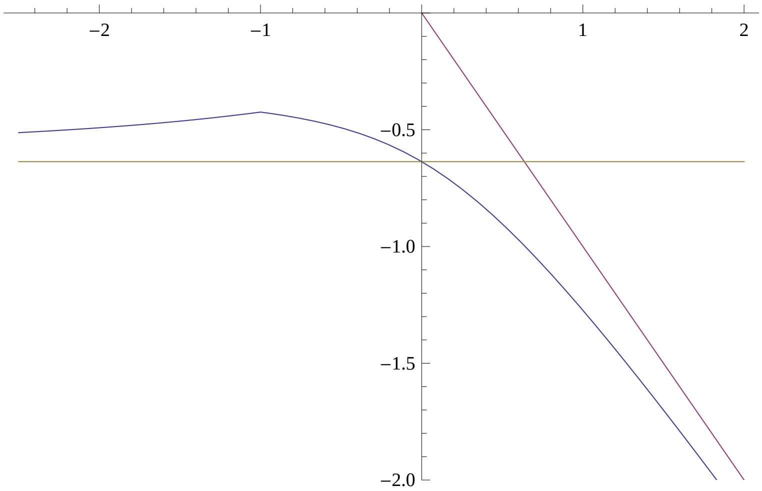


Figura 3: Il grafico di f (Tema 2).

Esercizio 2 Determinare tutti gli $x \in \mathbb{R}$ tali che la serie

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{\big(\log(x-1)\big)^n}{\sqrt{n}+1}$$

converga, risp. converga assolutamente.

Svolgimento. La serie è definita per $x > 1$. Per tali x studiamo la convergenza assoluta con il criterio asintotico della radice. Si ha

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{n}-1}}\, |\log(x-1)| = |\log(x-1)|.$$

Pertanto, per $e^{-1}+1 < x < e+1$ la serie converge assolutamente e quindi semplicemente, mentre per $1 < x < e^{-1}+1$ e per $x > e+1$ il termine generale della serie non è infinitesimo, e quindi la serie diverge assolutamente e non converge semplicemente. Per $x = e^{-1}+1$, cioè per $\log(x-1) = -1$, la serie converge per il criterio di Leibniz e diverge assolutamente perché il termine generale è asintotico a $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Per $x = e+1$, cioè per $\log(x-1) = 1$, la serie ha termini positivi e diverge perché il termine generale è asintotico a $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Esercizio 3 Calcolare l'integrale

$$\int_0^2 \big(\arcsin\frac{x}{2}\big)^2 dx$$

Svolgimento. Si ha

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \big(\arcsin\frac{x}{2}\big)^2 dx &= [\text{ponendo } \frac{x}{2} = t]\ \ 2\int_0^1 \arcsin^2 t\, dt \\
&= [\text{per parti}]\ \ 2\Big[t\arcsin^2 t|_0^1 - 2\int_0^1 \frac{t\arcsin t}{\sqrt{1-t^2}}\, dt\Big] \\
&= [\text{ancora per parti}]\ \frac{\pi^2}{2} - 4\Big[-\sqrt{1-t^2}\,\arcsin t|_0^1 + \int_0^1 \frac{\sqrt{1-t^2}}{\sqrt{1-t^2}}\, dt\Big] \\
&= \frac{\pi^2}{2} - 4.
\end{aligned}$$

Esercizio 4 Si consideri la funzione

$$f(z) = \frac{1-\bar{z}}{z}, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Si determini e si disegni nel piano di Gauss l'insieme

$$A = \{z \in \mathbb{C} : f(z) = \bar{z}\}.$$

Svolgimento. Se $z \neq 0$, la condizione $f(z) = \bar{z}$ equivale a $1 - \bar{z} = \bar{z}z$, cioè, ponendo $z = x + iy$, equivale a

$$1 - x + iy = x^2 + y^2,$$

che implica $y = 0$ e $x^2 + x - 1 = 0$ cioè $x = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ (v. figura 4).

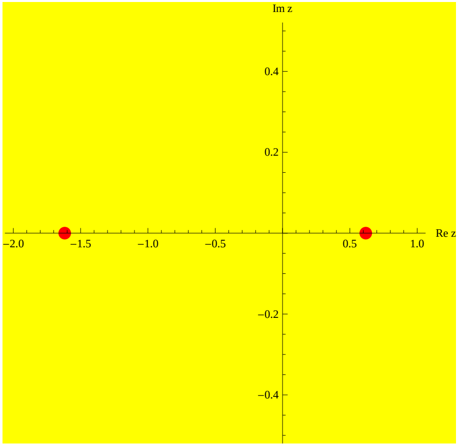


Figura 4: Le soluzioni dell'esercizio 4 (Tema 2).

Esercizio 5 [facoltativo] Sia

$$f(x) = \int_{x^2}^{2x^2} \frac{\arctan 4t}{t}\, dt.$$

Calcolare lo sviluppo di Taylor di f di ordine 2 con punto iniziale 0.

Svolgimento. Si ha che $f(0) = 0$ e inoltre, per ogni x fissato, preso un punto c compreso tra x^2 e $2x^2$, si ha

$$f(x) = -\int_{c}^{x^2} \frac{\arctan 4t}{t}\, dt + \int_{c}^{2x^2} \frac{\arctan 4t}{t}\, dt.$$

Per il teorema fondamentale del calcolo e il teorema sulla derivata della funzione composta si ha perciò

$$f'(x) = -2x\frac{\arctan 4x^2}{x^2} + 4x\frac{\arctan 8x^2}{2x^2} = 2\frac{\arctan 8x^2 - \arctan 4x^2}{x}.$$

Siccome

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = 0,$$

risulta $f'(0) = 0$. Si ha inoltre

$$\begin{aligned} f''(x) &= 2\frac{x\left(\frac{16x}{1+64x^2} - \frac{8x}{1+16x^4}\right) - \arctan 8x^2 + \arctan 4x^2}{x^2} \\ &= 2\frac{8x^2\left(\frac{1-32x^4}{(1+64x^4)(1+16x^4)}\right) - \arctan 8x^2 + \arctan 4x^2}{x^2} \sim 2\frac{8x^2 - 8x^2 + 4x^2}{x^2} \to 8 \quad \text{per } x \to 0, \end{aligned}$$

quindi $f''(0) = 8$. Lo sviluppo richiesto è perciò

$$f(x) = 4x^2 + o(x^2) \qquad \text{per } x \to 0.$$

TEMA 3

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{1}{\arctan \frac{x-1}{|x+2|} - \frac{\pi}{4}}.$$

(a) Determinare il dominio D di f e studiarne il segno; determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti (**il calcolo dell'asintoto per $x \to +\infty$ è facoltativo e vale 3 punti in più**);
(b) studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di f; determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto e calcolare i limiti significativi di f';
(c) disegnare un grafico qualitativo di f.

`Svolgimento.`
(a).
Dominio: $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.
Segno: $f(x) \geq 0$ se, e solo se, $\frac{x-1}{|x+2|} \geq 1$ che non è mai verificata. $f < 0$ su tutto $dom(f)$.
Limiti agli estremi del dominio:

- $\lim_{x\to-2} f(x) = \frac{1}{-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}} = -\frac{4}{3\pi}$.
- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{1}{-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}} = -\frac{2}{\pi}$.

Quindi f è prolungabile per continuità in $x = -2$ con $f(-2) = -\frac{4}{3\pi}$ e presenta asintoto orizzontale $y = -\frac{2}{\pi}$ per $x \to -\infty$.

Asintoto per $x \to +\infty$: osserviamo che la funzione $g(x) := \arctan(1 + x)$ ha sviluppo di McLaurin del secondo ordine: $g(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x^2 + o(x^2)$. Ne deduciamo

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\arctan\left(1 + \frac{-3}{x+2}\right) - \frac{\pi}{4}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{-\frac{3}{2}\frac{1}{x+2} - \frac{9}{4}\frac{1}{(x+2)^2} + o(x^{-2})} = -\infty.$$

Vediamo se la funzione presenta un asintoto obliquo:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{-1}}{-\frac{3}{2}\frac{1}{x+2} - \frac{9}{4}\frac{1}{(x+2)^2} + o(x^{-2})} = -\frac{2}{3},$$

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) + \frac{2}{3}x] = \lim_{x\to+\infty} [\frac{1}{-\frac{3}{2}\frac{1}{x+2} - \frac{9}{4}\frac{1}{(x+2)^2} + o(x^{-2})} + \frac{2}{3}x] = -\frac{1}{3};$$

la retta $y = -\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$ è asintoto obliquo di f per $x \to +\infty$.
(b).
Per il teorema sulla derivata della funzione composta e per quello sull'algebra delle derivate, f è derivabile per $x \neq -2$. Lo studio della derivabilità in $x = -2$ verrà affrontato in seguito.
Calcolo di f':

$$f'(x) = \frac{-|x+2| + (x-1)\operatorname{sgn}(x+2)}{[\arctan \frac{x-1}{|x+2|} - \frac{\pi}{4}]^2[(x+2)^2 + (x-1)^2]}$$

Limiti di f':

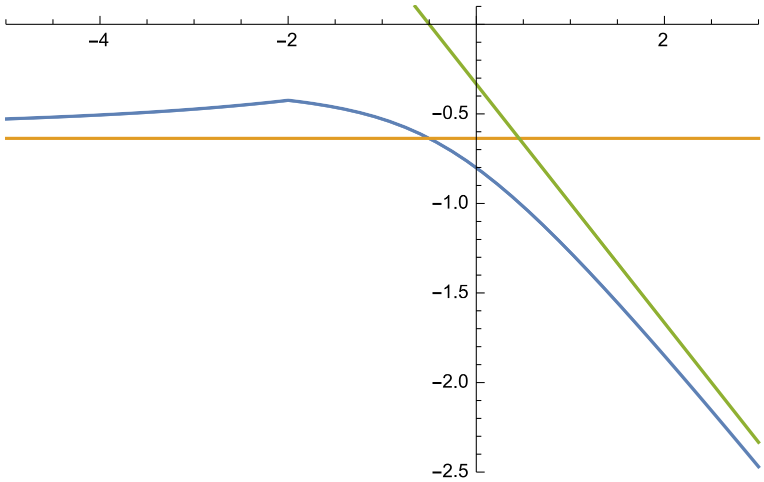


Figura 5: Il grafico di f (Tema 3).

- $\lim_{x\to-2^+} f'(x) = -\frac{16}{27\pi^2}$
- $\lim_{x\to-2^-} f'(x) = \frac{16}{27\pi^2}$

pertanto f non è derivabile in $x=-2$ dove presenta un punto angoloso.

Monotonia: $f'>0$ su $(-\infty,-2)$, $f'<0$ su $(-2,+\infty)$. Quindi f crescente su $(-\infty,-2)$, decrescente su $(-2,+\infty)$. In $x=-2$, f ha un punto di massimo assoluto.

(c) Il grafico è in figura 5.

Esercizio 2 Determinare tutti gli $x\in\mathbb{R}$ tali che la serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\big(\log(x+2)\big)^n}{\sqrt{n}-1}$$

converga, risp. converga assolutamente.

`Svolgimento.` Osserviamo che $\frac{\left(\log(x+2)\right)^n}{\sqrt{n}-1}$ ha senso solo per $x>-2$ e che ha segno costante per $x\ge -1$ e segno alterno per $x\in(-2,-1)$.

Studio della condizione necessaria per la convergenza: vale $\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(\log(x+2)\right)^n}{\sqrt{n}-1}=0$ se, e solo se, $|\log(x+2)|\le 1$ cioè $x\in[-2+e^{-1},-2+e]$. Pertanto per $x\in(-2,-2+e^{-1})\cup(-2+e,+\infty)$, la serie non può convergere semplicemente (né, a maggior ragione, assolutamente).

Consideriamo $x\in[-2+e^{-1},-2+e]$ e studiamo la convergenza assoluta. Poichè vale

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{|\log(x+2)|^n}{\sqrt{n}-1}} = |\log(x+2)|,$$

il criterio della radice assicura che la serie è assolutamente convergente (e quindi anche semplicemente convergente) per $x\in(-2+e^{-1},-2+e)$. Rimangono da studiare i due casi: $x=-2+e^{-1}$, $x=-2+e$. Per $x=-2+e$, la serie è

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}-1}$$

il cui termine a_n è a segno costante con $a_n \sim n^{-1/2}$. Per il criterio del confronto asintotico, la serie non converge né semplicemente né assolutamente.

Per $x = -2 + e^{-1}$, la serie è

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} - 1}.$$

Non converge assolutamente perchè, per quanto appena visto, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}-1}$ non converge. Inoltre, poichè $a_n := \frac{1}{\sqrt{n}-1}$ è decrescente con $\lim a_n = 0$, il criterio di Leibniz assicura che la serie è semplicemente convergente.

In conclusione, la serie è assolutamente convergente se, e solo se, $x \in (-2 + e^{-1}, -2 + e)$ mentre è semplicemente convergente se, e solo se, $x \in [-2 + e^{-1}, -2 + e)$.

Esercizio 3 Calcolare l'integrale

$$\int_{-1/3}^{1/3} \big(\arcsin 3x\big)^2 dx$$

`Svolgimento.`

$$\begin{aligned}
\int_{-1/3}^{1/3} \big(\arcsin(3x)\big)^2 dx &= 2\int_{0}^{1/3} \big(\arcsin(3x)\big)^2 dx \\
&= 2\Big[x\big(\arcsin(3x)\big)^2\Big]_0^{1/3} - 2\int_0^{1/3} \frac{6x \arcsin(3x)}{\sqrt{1-9x^2}} dx \\
&= 2\Big[x\big(\arcsin(3x)\big)^2\Big]_0^{1/3} + \frac{4}{3}\int_0^{1/3} \frac{-9x}{\sqrt{1-9x^2}} \arcsin(3x) dx \\
&= 2\Big[x\big(\arcsin(3x)\big)^2\Big]_0^{1/3} + \frac{4}{3}\Big[\sqrt{1-9x^2}\arcsin(3x)\Big]_0^{1/3} - 4\int_0^{1/3} dx \\
&= \Big[2x\big(\arcsin(3x)\big)^2 + \frac{4}{3}\sqrt{1-9x^2}\arcsin(3x) - 4x\Big]_0^{1/3} \\
&= \frac{\pi^2}{6} - \frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

Esercizio 4 Si consideri la funzione

$$f(z) = \frac{z+2}{\bar{z}}, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Si determini e si disegni nel piano di Gauss l'insieme

$$A = \big\{z \in \mathbb{C} : f(z) = 2z\big\}.$$

`Svolgimento.` Se $z \neq 0$, la condizione $f(z) = 2z$ equivale a $z + 2 = 2\bar{z}z$, cioè, per $z = x + iy$, equivale a

$$(x + 2) + iy = 2x^2 + 2y^2$$

che implica $y = 0$ e $2x^2 - x - 2 = 0$ cioè $x \in \{\frac{1+\sqrt{17}}{4}, \frac{1-\sqrt{17}}{4}\}$.

In conclusione le soluzioni sono $z = \frac{1+\sqrt{17}}{4}$ e $z = \frac{1-\sqrt{17}}{4}$ (v. figura 6).

Esercizio 5 [facoltativo] Sia

$$f(x) = \int_{x^2}^{2x^2} \frac{\sinh 3t}{t}\, dt.$$

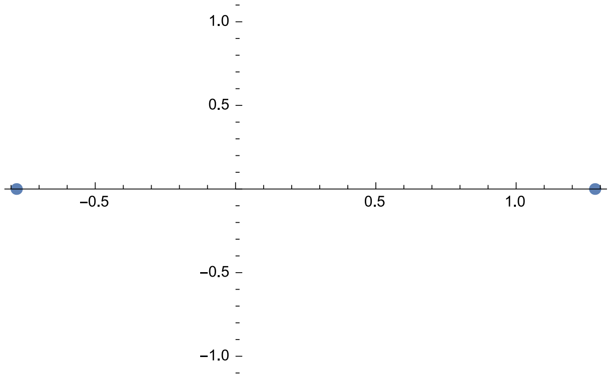


Figura 6: Le soluzioni dell'esercizio 4 (Tema 3).

Calcolare lo sviluppo di Taylor di f di ordine 2 con punto iniziale 0.

`Svolgimento.`
Vale
$$f'(x) = \frac{\sinh(6x^2)}{2x^2}4x - \frac{\sinh(3x^2)}{x^2}2x = \frac{2\sinh(6x^2)}{x} - \frac{2\sinh(3x^2)}{x} = 6x + o(x^2).$$
Per la formula $[T_n(f)]' = T_{n-1}(f')$, si ha: $[T_2(f)]' = T_1(f') = 6x$. Integrando, si ottiene: $T_2(f) = 3x^2 + f(0) = 3x^2$.

TEMA 4

Esercizio 1 Si consideri la funzione
$$f(x) = \frac{1}{\frac{\pi}{4} + \arctan\frac{x+2}{|x-1|}}.$$
(a) Determinare il dominio D di f e studiarne il segno; determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti;
(b) studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di f; determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto e calcolare i limiti significativi di f';
(c) disegnare un grafico qualitativo di f.

Svolgimento: Osserviamo che f è definita per $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$ tale che $\frac{\pi}{4} + \arctan\frac{x+2}{|x-1|} \neq 0$. Osserviamo che $\frac{\pi}{4} + \arctan\frac{x+2}{|x-1|} = 0$ se e solo se $\frac{x+2}{|x-1|} = -1$, e quest'ultima equazione non ha soluzioni in $\mathbb{R}$. Quindi $\mathrm{Dom} f = \mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Studiamo il segno di f: osserviamo che $f(x) > 0$ se e solo se $\frac{\pi}{4} + \arctan\frac{x+2}{|x-1|} > 0$, ossia se e solo se $1 > -\frac{x+2}{|x-1|}$ che è vera per ogni $x \in \mathbb{R}$. Quindi f è strettamente positiva.

Vediamo i limiti di f agli estremi del dominio:

- limite a 1:
$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{\frac{\pi}{4} + \arctan\frac{x+2}{|x-1|}} = \frac{1}{\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}} = \frac{4}{3\pi},$$
visto che $\frac{x+2}{|x-1|} \to +\infty$ per $x \to 1$. In particolare, f si può prolungare per continuità in 1 ponendo $f(1) = \frac{4}{3\pi}$.

- limite a $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{\pi}{4}+\arctan\frac{x+2}{|x-1|}} = \frac{1}{\frac{\pi}{4}+\arctan(1)} = \frac{2}{\pi};$$

- limite a $-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\frac{\pi}{4}+\arctan\frac{x+2}{|x-1|}} = +\infty,$$

dal momento che il denominatore della frazione tende a 0 e la funzione è sempre positiva.

Asintoti: la funzione ha un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$ di equazione $y = \frac{2}{\pi}$, vediamo se ha anche un asintoto obliquo per $x \to -\infty$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x\left(\frac{\pi}{4}+\arctan\frac{x+2}{|x-1|}\right)} &= \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{\pi}{4}+\arctan\frac{x+2}{|x-1|}} \\
(H) \quad = \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{-1}{x^2}}{\frac{1}{1+\frac{(x+2)^2}{(1-x)^2}}\frac{3}{(1-x)^2}} &= \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2+2x+5}{-3x^2} = -\frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\frac{\pi}{4}+\arctan\frac{x+2}{1-x}} + \frac{2}{3}x &= \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\frac{\pi}{4}+\arctan\left(\frac{3}{1-x}-1\right)} + \frac{2}{3}x \\
= \quad \lim_{y\to0^+} \frac{1}{\frac{\pi}{4}+\arctan(y-1)} + \frac{2(y-3)}{3y} &= \lim_{y\to0^+} \frac{3y+2(y-3)\left(\frac{\pi}{4}+\arctan(y-1)\right)}{3y\left(\frac{\pi}{4}+\arctan(y-1)\right)} \\
(H) \quad = \quad \lim_{y\to0^+} &\frac{3+2\left(\frac{\pi}{4}+\arctan(y-1)\right)+\frac{2(y-3)}{1+(y-1)^2}}{3\left(\frac{\pi}{4}+\arctan(y-1)\right)+\frac{3y}{1+(y-1)^2}} \\
(H) \quad = \quad \lim_{y\to0^+} &\frac{\frac{2}{1+(y-1)^2}+\frac{2}{1+(y-1)^2}-\frac{4(y-3)(y-1)}{(1+(y-1)^2)^2}}{\frac{3}{1+(y-1)^2}+\frac{3}{1+(y-1)^2}-\frac{6y(y-1)}{(1+(y-1)^2)^2}} = -\frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Quindi la funzione ha un asintoto obliquo a $-\infty$ di equazione $y = -\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$.

Derivabilità: per il Teorema sulla derivata della funzione composta, f è derivabile in $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, con derivata

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{3}{(2x^2+2x+5)\left(\frac{\pi}{4}+\arctan\frac{x+2}{x-1}\right)^2} & \text{se } x > 1 \\ \frac{-3}{(2x^2+2x+5)\left(\frac{\pi}{4}+\arctan\frac{x+2}{1-x}\right)^2} & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

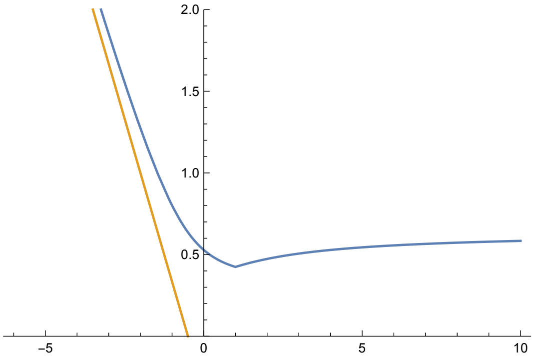
Osserviamo che $\lim_{x\to1^+} f'(x) = \frac{16}{27\pi^2} \neq -\frac{16}{27\pi^2} = \lim_{x\to1^-} f'(x)$, quindi f non è derivabile in 1, che è un punto angoloso.

Poiché f' è positiva per $x > 1$ e negativa per $x < 1$, f è crescente per $x > 1$ e decrescente per $x < 1$, e 1 è un punto di minimo assoluto.

Grafico di f:

Esercizio 2 Determinare tutti gli $x \in \mathbb{R}$ tali che la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\big(\log(x+1)\big)^n}{n+2}$$



converga, risp. converga assolutamente.

Svolgimento: Studiamo in prima battuta la convergenza assoluta, usando il criterio del rapporto: sia $x > -1$ (altrimenti $\log(x+1)$ non è definito),

$$\lim_n \frac{|\log(x+1)|^{n+1}}{n+3} \frac{n+2}{|\log(x+1)|^n} = |\log(x+1)|.$$

Quindi, se $|\log(x+1)| < 1$ la serie converge assolutamente, se $|\log(x+1)| > 1$ la serie diverge assolutamente e non converge semplicemente perché il termine generale non è infinitesimo. Se $\log(x+1) = 1$, il termine generale è positivo e asintotico a $\frac{1}{n}$, quindi per il criterio del confronto asintotico la serie diverge. Se $\log(x+1) = -1$, la serie diventa $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+2}$, che converge semplicemente, per Leibniz, ma non assolutamente.

Dal momento che $|\log(x+1)| < 1$ se e solo se $e^{-1} - 1 < x < e-1$, abbiamo:

- se $-1 < x < e^{-1} - 1$ oppure $x > e - 1$ la serie diverge assolutamente e non converge semplicemente;
- se $e^{-1} - 1 < x < e - 1$, la serie converge assolutamente;
- se $x = e^{-1} - 1$, la serie converge semplicemente ma non assolutamente;
- se $x = e - 1$, la serie diverge.

Esercizio 3 Calcolare l'integrale

$$\int_{-3}^{0} \big(\arcsin \frac{x}{3}\big)^2 dx$$

Svolgimento:

$$\begin{aligned}
& \int_{-3}^{0} \big(\arcsin \frac{x}{3}\big)^2 dx = 3 \int_{-1}^{0} (\arcsin t)^2 dt \\
\text{(per parti)} \quad &= 3\Big[t(\arcsin t)^2\Big|_{-1}^{0} + \int_{-1}^{0} \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}} 2 \arcsin t \; dt\Big] \\
\text{(per parti)} \quad &= 3\Big[\frac{\pi^2}{4} + 2\sqrt{1-t^2} \arcsin t\Big|_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} 2\frac{\sqrt{1-t^2}}{\sqrt{1-t^2}} dt\Big] \\
&= 3\Big(\frac{\pi^2}{4} - 2\Big).
\end{aligned}$$

Esercizio 4 Si consideri la funzione

$$f(z) = \frac{\bar{z} - 2}{z}, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

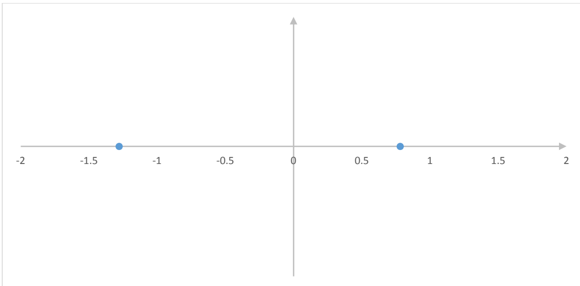
Si determini e si disegni nel piano di Gauss l'insieme

$$A = \{z \in \mathbb{C} : f(z) = -2\bar{z}\}.$$

Svolgimento: Dobbiamo determinare

$$\begin{aligned} A &= \{z \in \mathbb{C} \ : \ \frac{\bar{z}-2}{z} = -2\bar{z}\} \\ &= \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \ : \ \bar{z} - 2 = -2|z|^2\} \\ &= \{z = x+iy \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \ : \ x - iy - 2 = -2(x^2+y^2)\} \\ &= \{z = x+iy \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \ : \ x - 2 + 2x^2 + 2y^2 = iy\} \\ &= \{z = x+iy \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \ : \ y = 0, 2x^2 + x - 2 = 0\} \\ &= \{\frac{-1-\sqrt{17}}{4}, \frac{-1+\sqrt{17}}{4}\}. \end{aligned}$$

Disegniamo A nel piano di Gauss:



Esercizio 5 [facoltativo] Sia

$$f(x) = \int_{x^2}^{2x^2} \frac{\sin 2t}{t}\, dt.$$

Calcolare lo sviluppo di Taylor di f di ordine 2 con punto iniziale 0.

Svolgimento: Dopo aver osservato che $\mathrm{Dom} f = \mathbb{R}$ calcoliamo la derivata prima e seconda di f in 0, usando il Teorema fondamentale del calcolo integrale.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\sin 4x^2}{2x^2} 4x - \frac{\sin 2x^2}{x^2} 2x \\ &= \frac{2(\sin 4x^2 - \sin 2x^2)}{x} \\ &= x\frac{8 \sin 4x^2}{4x^2} - x\frac{4\sin 2x^2}{2x^2}. \\ f''(x) &= 2\frac{8x\cos 4x^2 - 4x\cos 2x^2 - \sin 4x^2 + \sin 2x^2}{x^2} \\ &= 8(2\cos 4x^2 - \cos 2x^2) - 8\frac{\sin 4x^2}{4x^2} + 4\frac{\sin 2x^2}{2x^2}. \end{aligned}$$

Quindi $f'(0) = \lim_{x\to 0} f'(x) = 0$ e $f''(0) = \lim_{x \to 0} f''(x) = 4$, mentre $f(0) = 0$. Quindi lo sviluppo richiesto è:

$$f(x) = 2x^2 + o(x^2).$$