

ANALISI MATEMATICA 1
Area dell'Ingegneria dell'Informazione
Appello del 15.02.2016

TEMA 1

Esercizio 1 [8 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = \log \left(\frac{|\sin x|}{\cos x} \right)$$

nell'intervallo $I = [-\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi]$.

- (a) Determinare il dominio D di f in I e studiarne il segno; determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti;
- (b) studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di f ; determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto;
- (c) calcolare f'' e studiare la convessità e la concavità di f , determinandone gli eventuali punti di flesso;
- (d) si disegni un grafico qualitativo di f (ripetendo per periodicità il grafico di f in I).

Esercizio 2 [9 punti] Calcolare al variare di $\alpha > 0$ il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^\alpha - \sin x - \frac{9}{2}(\arctan \frac{x}{3})^3}{x - \sinh x + e^{-\frac{1}{x}}}$$

Esercizio 3 [9 punti] Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ si consideri la funzione

$$f_\alpha(x) = \frac{(\sin \sqrt{1-x})^{\frac{1}{2}+\alpha}}{x^{\alpha+1}(1+x)^{\frac{3}{2}+\alpha}}$$

Si studi la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^1 f_\alpha(x) dx$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ e lo si calcoli per $\alpha = -\frac{1}{2}$.

Esercizio 4 [5 punti] Determinare tutte le soluzioni dell'equazione

$$\bar{z}^2 = 2iz, \quad z \in \mathbb{C},$$

esprimendole in forma algebrica e rappresentandole sul piano di Gauss.

Esercizio 5 [facoltativo] Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ è finito l'integrale

$$\int_0^2 \frac{x^2}{|x^3 - \alpha^3|^\alpha} dx$$

e calcolarlo per tali α .

NB: con \log si indica il logaritmo in base e . **Si consiglia di dedicarsi alle domande facoltative dopo gli altri esercizi. L'esercizio 5 dà punti solo per la prova orale.**

Tempo a disposizione: tre ore. Il candidato deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato usare libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo. Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata.

ANALISI MATEMATICA 1
Area dell'Ingegneria dell'Informazione
Appello del 15.02.2016

TEMA 2

Esercizio 1 [8 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = \log \left(\frac{\sin x}{|\cos x|} \right)$$

nell'intervallo $I = [-\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi]$.

- (a) Determinare il dominio D di f in I e studiarne il segno; determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti;
- (b) studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di f ; determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto;
- (c) calcolare f'' e studiare la convessità e la concavità di f , determinandone gli eventuali punti di flesso;
- (d) si disegni un grafico qualitativo di f (ripetendo per periodicità il grafico di f in I).

Esercizio 2 [9 punti] Calcolare al variare di $\alpha > 0$ il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^\alpha - \arctan x - \frac{8}{3}(\sin \frac{x}{2})^3}{x - \sin x - e^{-\frac{1}{x^2}}}$$

Esercizio 3 [9 punti] Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ si consideri la funzione

$$f_\alpha(x) = \frac{(\tan \sqrt{x})^{\frac{1}{2} + \alpha}}{(1-x)^{\alpha+1}(2-x)^{\frac{3}{2} + \alpha}}$$

Si studi la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^1 f_\alpha(x) dx$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ e lo si calcoli per $\alpha = -\frac{1}{2}$.

Esercizio 4 [5 punti] Determinare tutte le soluzioni dell'equazione

$$2z^2 = i\bar{z}, \quad z \in \mathbb{C},$$

esprimendole in forma algebrica e rappresentandole sul piano di Gauss.

Esercizio 5 [facoltativo] Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ è finito l'integrale

$$\int_0^2 \frac{x^2}{|x^3 - \alpha^3|^\alpha} dx$$

e calcolarlo per tali α .

NB: con \log si indica il logaritmo in base e . **Si consiglia di dedicarsi alle domande facoltative dopo gli altri esercizi. L'esercizio 5 dà punti solo per la prova orale.**

Tempo a disposizione: tre ore. Il candidato deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato usare libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo. Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata.

ANALISI MATEMATICA 1
Area dell'Ingegneria dell'Informazione
Appello del 15.02.2016

TEMA 3

Esercizio 1 [8 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = \log \left(\frac{|\cos x|}{\sin x} \right)$$

nell'intervallo $I = [-\pi, \pi]$.

- (a) Determinare il dominio D di f in I e studiarne il segno; determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti;
- (b) studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di f ; determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto;
- (c) calcolare f'' e studiare la convessità e la concavità di f , determinandone gli eventuali punti di flesso;
- (d) si disegni un grafico qualitativo di f (ripetendo per periodicità il grafico di f in I).

Esercizio 2 [9 punti] Calcolare al variare di $\alpha > 0$ il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{4}{3}(\sin \frac{x}{2})^3 + x^\alpha - \sinh x}{e^{-\frac{1}{x}} + x - \arctan x}$$

Esercizio 3 [9 punti] Per ogni $\beta \in \mathbb{R}$ si consideri la funzione

$$f_\beta(x) = \frac{(\arcsin \sqrt{1-x})^{-\frac{3}{2}+\beta}}{x^{\beta-1}(1+x)^{-\frac{1}{2}+\beta}}$$

Si studi la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^1 f_\beta(x) dx$$

al variare del parametro $\beta \in \mathbb{R}$ e lo si calcoli per $\beta = \frac{3}{2}$.

Esercizio 4 [5 punti] Determinare tutte le soluzioni dell'equazione

$$z^2 = -4i\bar{z}, \quad z \in \mathbb{C},$$

esprimendole in forma algebrica e rappresentandole sul piano di Gauss.

Esercizio 5 [facoltativo] Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ è finito l'integrale

$$\int_0^2 \frac{x^2}{|x^3 - \alpha^3|^\alpha} dx$$

e calcolarlo per tali α .

NB: con \log si indica il logaritmo in base e . **Si consiglia di dedicarsi alle domande facoltative dopo gli altri esercizi. L'esercizio 5 dà punti solo per la prova orale.**

Tempo a disposizione: tre ore. Il candidato deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato usare libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo. Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata.

ANALISI MATEMATICA 1
Area dell'Ingegneria dell'Informazione
Appello del 15.02.2016

TEMA 4

Esercizio 1 [8 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = \log \left(\frac{\cos x}{|\sin x|} \right)$$

nell'intervallo $I = [-\pi, \pi]$.

- (a) Determinare il dominio D di f in I e studiarne il segno; determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti;
- (b) studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di f ; determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto;
- (c) calcolare f'' e studiare la convessità e la concavità di f , determinandone gli eventuali punti di flesso;
- (d) si disegni un grafico qualitativo di f (ripetendo per periodicità il grafico di f in I).

Esercizio 2 [9 punti] Calcolare al variare di $\alpha > 0$ il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{9}{2}(\arctan \frac{x}{3})^3 + x^\alpha - \sin x}{e^{-\frac{1}{x^2}} + \sinh 2x - 2x}$$

Esercizio 3 [9 punti] Per ogni $\beta \in \mathbb{R}$ si consideri la funzione

$$f_\beta(x) = \frac{(\arctan \sqrt{1-x})^{-\frac{3}{2}-3\beta}}{x^{-3\beta-1}(1+x)^{-\frac{1}{2}-3\beta}}$$

Si studi la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^1 f_\beta(x) dx$$

al variare del parametro $\beta \in \mathbb{R}$ e lo si calcoli per $\beta = -\frac{1}{2}$.

Esercizio 4 [5 punti] Determinare tutte le soluzioni dell'equazione

$$\bar{z}^2 = -iz, \quad z \in \mathbb{C},$$

esprimendole in forma algebrica e rappresentandole sul piano di Gauss.

Esercizio 5 [facoltativo] Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ è finito l'integrale

$$\int_0^2 \frac{x^2}{|x^3 - \alpha^3|^\alpha} dx$$

e calcolarlo per tali α .

NB: con \log si indica il logaritmo in base e . **Si consiglia di dedicarsi alle domande facoltative dopo gli altri esercizi. L'esercizio 5 dà punti solo per la prova orale.**

Tempo a disposizione: tre ore. Il candidato deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato usare libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo. Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata.