ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 15.02.2016

TEMA 1

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x) = \log\left(\frac{|\sin x|}{\cos x}\right)$$

nell'intervallo $I = [-\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi]$.

(a) Determinare il dominio D di f in I e studiarne il segno; determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti

RISPOSTA

Dominio.

Per dominiosi intende ovviamente il sottoinsieme massimale$D \subseteq I$ per cui $f(x)$ è definita per ogni $x \in D$. Poiché $\log r$ è definito se e solo se $r > 0$, si deve avere $\frac{|\sin x|}{\cos x} > 0$. Perché il membro sinistro sia definito deve essere $\cos x \neq 0$. Dunque $x \in D$ se e solo se

$$\begin{cases} |\sin x| > 0 \\ \cos x > 0 \\ x \in I \end{cases} \iff \begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x > 0 \\ x \in I \end{cases} \iff x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\setminus \{0\}$$

ovvero

$$D = \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[\bigcup \left]0, \frac{\pi}{2}\right[.$$

Segno.

$f(x) > 0$ se e solo se $\frac{|\sin x|}{\cos x} > 1$, cioè $|\tan x| > 1$, vale a dire

$$x \in \left]-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right[\bigcup \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$$

Inoltre $f(x) = 0$ se e solo se $x = \pm\frac{\pi}{4}$. (Dunque $f(x) < 0$ se e solo se $x \in \left]-\frac{\pi}{4}, 0\right[\bigcup \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$

La funzione è continua (in ogni punto del dominio) in quanto composizione di funzioni continue. Non possono esserci asintoti orizzontali o obliqui, essendo il dominio limitato. Studiamo i limiti in 0 e $\pm\frac{\pi}{2}$. Si ha evidentemente

$$\lim_{x \to \pm\frac{\pi}{2}} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to 0} f(x) = -\infty$$

dunque ci sono tre asintoti vertical: $x = \frac{\pi}{2}$, $x = 0$, $x = -\frac{\pi}{2}$

(b) studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di f; determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto;

RISPOSTA La funzione è derivabile in ogni punto di D (che è un insieme aperto, cioè costituito di punti interni) in quanto composizione di funzioni derivabili (infinite volte). Inoltre, da $f(x) = \log(|\tan x|)$,

$$f'(x) = \frac{1}{|\tan x|} \frac{\operatorname{sgn}(\tan x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\sin x \cdot \cos x}$$

Dunque f strettamente crescente in $]0, \frac{\pi}{2}[$ e strettamente decrescente in $] - \frac{\pi}{2}, 0[$. Inoltre

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} f'(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to -\frac{\pi}{2}} f'(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to 0+} f'(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to 0-} f'(x) = -\infty$$

La funzione non ha né massimi né minimi, essendo ovunque derivabile con derivata diversa da zero;

(c) calcolare f'' e studiare la convessità e la concavità di f, determinandone gli eventuali punti di flesso;

RISPOSTA

$$f''(x) = -\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$$

Dunque $f''(x) > 0$ se e solo se $\sin^2 x > \cos^2 x$, se e solo se , $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right[\bigcup \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$ mentre $f''(x) = 0$ se e solo se $x = \pm\frac{\pi}{4}$

Perciò le restrizioni della funzione algli intervalli $\left]-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right[$ e $\left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$ sono convesse, mentre le restrizioni agli intervalli $\left]-\frac{\pi}{4}, 0\right[$ e $\left]0, \frac{\pi}{4}\right[$ sono concave. Si hanno flessi in $x = -\frac{\pi}{4}$ e in $x = \frac{\pi}{4}$.

(d) Si disegni un grafico qualitativo di f (ripetendo per periodicità il grafico di f in I).

RISPOSTA

Il grafico di f è in figura 1

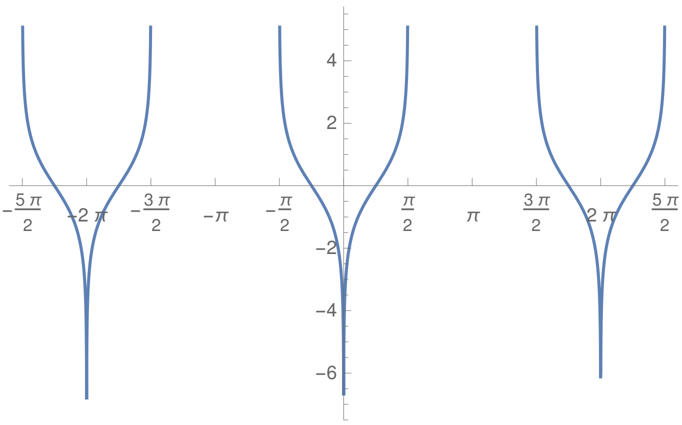

Figura 1: Il grafico di f (Tema 1).

Esercizio 2 Calcolare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}^+$ il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^\alpha - \sin x - \frac{9}{2}(\arctan \frac{x}{3})^3}{x - \sinh x + e^{-\frac{1}{x}}}$$

Svolgimento. Si osserva dapprima che per ogni $\alpha \in \mathbb{R}^+$ si ha $e^{-\frac{1}{x}} = o(x^\alpha)$ per $x \to 0^+$ (basta, ad esempio, operare la sostituzione $y = 1/x$ e ricordare che $\lim_{y\to+\infty} \frac{y^\alpha}{e^\alpha} = 0$). Dopodiché:

$$\frac{x^\alpha - \sin x - \frac{9}{2}(\arctan \frac{x}{3})^3}{x - \sinh x + e^{-\frac{1}{x}}} =$$

$$\frac{x^\alpha - x + \frac{1}{6}x^3 - \frac{9}{2}\frac{x^3}{3} + o(x^3)}{x - x - \frac{1}{6}x^3 + e^{-\frac{1}{x}}} = \frac{x^\alpha - x + o(x^3)}{-\frac{1}{6}x^3 + o(x^3)}$$

Se $\alpha = 1$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^\alpha - \sin x - \frac{9}{2}(\arctan \frac{x}{3})^3}{x - \sinh x + e^{-\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{o(x^3)}{-\frac{1}{6}x^3 + o(x^3)} = 0$$

Se $\alpha < 1$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^\alpha - \sin x - \frac{9}{2}(\arctan \frac{x}{3})^3}{x - \sinh x + e^{-\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^\alpha + o(x^\alpha)}{-\frac{1}{6}x^3 + o(x^3)} = -\lim_{x\to 0^+} x^{\alpha-3} = -\infty$$

Se $1 < \alpha$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^\alpha - \sin x - \frac{9}{2}(\arctan \frac{x}{3})^3}{x - \sinh x + e^{-\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x + o(x)}{-\frac{1}{6}x^3 + o(x^3)} = \lim_{x\to 0^+} x^{-2} = +\infty$$

Esercizio 3 Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ si consideri la funzione

$$f_\alpha(x) = \frac{\left(\sin\left(\sqrt{1-x}\right)\right)^{\frac{1}{2}+\alpha}}{x^{\alpha+1}(1+x)^{\frac{3}{2}+\alpha}}$$

Si studi la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^1 f_\alpha(x)dx$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ e lo si calcoli per $\alpha = -\frac{1}{2}$.

Svolgimento. Si noti che per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ il dominio di f_α contiene l'intervallo $]0,1[$, per cui bisogna controllare la convergenza dell'integrale per entrambi gli estremi. Per x che tende (da destra) a 0 si ha

$$f_\alpha(x) \sim \frac{1}{x^{\alpha+1}}$$

Per x che tende (da sinistra) a 1 si ha

$$f_\alpha(x) \sim \left(\sin\left(\sqrt{1-x}\right)\right)^{\frac{1}{2}+\alpha} \sim (1-x)^{\frac{1+2\alpha}{4}}$$

Pertanto l'integrale converge se e solo se

$$\begin{cases} \alpha + 1 < 1 \\ \frac{1+2\alpha}{4} > -1 \end{cases}$$

cioè se e solo se $\alpha \in]-\frac{5}{2}, 0[$.

Calcoliamo l'integrale per $\alpha = -\frac{1}{2}$.
Calcoliamo la primitiva:

$$\int \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}(1+x)}dx \underset{y=x^{\frac{1}{2}}}{=} 2\int \frac{y}{y(1+y^2)}dy = 2\arctan y + c.$$

Dunque (nel seguito, l'estremo $\frac{1}{2}$ può essere sostituito da un qualsiasi altro punto dell'intervallo $]0,1[$)

$$\int_0^1 \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}(1+x)}dx = \lim_{c\to 0}\int_c^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}(1+x)}dx + \lim_{d\to 1}\int_{\frac{1}{2}}^{d} \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}(1+x)}dx =$$

$$2\lim_{c\to 0}\int_{\sqrt{c}}^{\sqrt{\frac{1}{2}}} \frac{y}{y(1+y^2)}dy + 2\lim_{d\to 1}\int_{\sqrt{\frac{1}{2}}}^{\sqrt{d}} \frac{y}{y(1+y^2)}dy =$$

$$2\lim_{c\to 0}\left(\arctan\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) - \arctan\left(\sqrt{c}\right)\right) + 2\lim_{d\to 1}\left(\arctan\left(\sqrt{d}\right) - \arctan\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)\right) =$$

$$2 \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

Esercizio 4 Determinare tutte le soluzioni dell"equazione

$$\bar{z}^2 = 2iz, \qquad z \in \mathbb{C},$$

esprimendole in forma algebrica e rappresentandole sul piano di Gauss.

Svolgimento. Ponendo $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, l'equazione diventa

$$x^2 - y^2 - 2ixy = 2ix - 2y$$

cioè

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -2y \\ -xy = x \end{cases}$$

Le soluzioni di quest'ultimo sistema sono $(0,0)$, $(0,2)$ $(\sqrt{3}, -1)$, $(-\sqrt{3}, -1)$, dunque le soluzioni dell'equazione sono $z_1 = 0$ e $z_2 = 2i$, $z_3 = \sqrt{3} - i$, $z_4 = -\sqrt{3} - i$, rappresentate in figura 2.

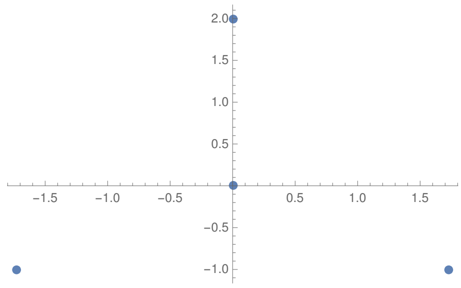

Figura 2: Le soluzioni dell'Esercizio 4 (Tema 1).

Esercizio 5 Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ è finito l'integrale

$$\int_0^2 \frac{x^2}{|x^3 - \alpha^3|^\alpha}\, dx$$

e calcolarlo per tali α.

Svolgimento. V. lo svolgimento nel Tema 4.

TEMA 2

Esercizio 1. Si consideri la funzione

$$f(x) = \log\left(\frac{\sin x}{|\cos x|}\right)$$

nell'intervallo $I = [-\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi]$.
(a) Determinare il dominio D di f in I e studiarne il segno; determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti;
(b) studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di f; determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto;
(c) calcolare f'' e studiare la convessità e la concavità di f, determinandone gli eventuali punti di flesso;
(d) disegnare un grafico qualitativo di f in tutto $\mathbb{R}$, usando la periodicità.

Svolgimento. (a) Nell'intervallo I, si devono escludere i punti in cui $\sin x \leq 0$ e $\cos x = 0$, per cui $D =]0, \pi[\setminus \{\frac{\pi}{2}\}$. Il segno di f è positivo se e solo se $\sin x > |\cos x|$, cioè se e solo se $x \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$. Si ha inoltre

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to \pi^-} f(x) = -\infty.$$

Le rette $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \pi$ sono quindi asintoti verticali.
(b) Per calcolare la derivata conviene scrivere $f(x) = \log \sin x - \log |\cos x|$. Pertanto si ha, per $x \in D$,

$$f'(x) = \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{\sin x \cos x}.$$

Siccome per $x \in D$ si ha che $\sin x > 0$, il segno della derivata coincide con il segno di $\cos x$, quindi f è strettamente crescente se $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$ e strettamente decrescente se $x \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$.
(c) Si ha, per $x \in D$,

$$f''(x) = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{2 \sin^2 x - 1}{\sin^2 x \cos^2 x}.$$

Pertanto f è convessa se e solo se $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$ o $\frac{\pi}{2} < x \frac{3}{4}\pi$. I punti $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{3}{4}\pi$ sono perciò punti di flesso a tangente obliqua.
(d) Il grafico di f è in figura 3

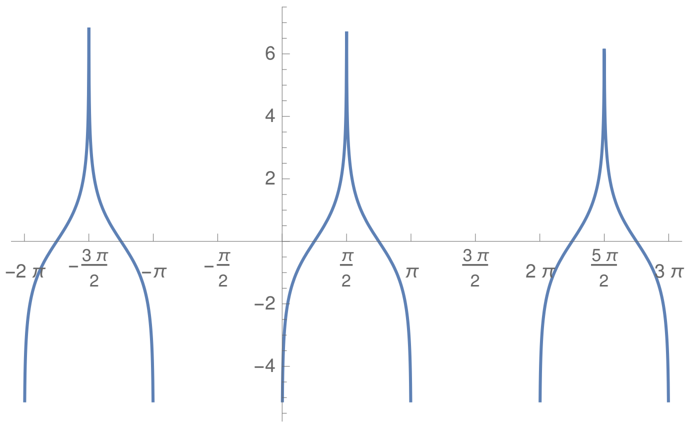

Figura 3: Il grafico di f (Tema 2).

Esercizio 2. Calcolare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}^+$ il limite

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^\alpha - \arctan x - \frac{8}{3}(\sin \frac{x}{2})^3}{x - \sin x - e^{-\frac{1}{x^2}}}$$

Svolgimento. Il numeratore si sviluppa, per $x \to 0^+$, come

$$x^\alpha - \left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) - \frac{8}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^3 = x^\alpha - x + o(x^3),$$

per cui è infinitesimo di ordine α se $\alpha < 1$, di ordine 1 se $\alpha > 1$ e di ordine superiore a 3 (in realtà di ordine 5) se $\alpha = 1$.
Il denominatore è

$$\frac{x^3}{6} + o(x^3),$$

essendo $e^{-\frac{1}{x^2}} = o(x^\beta)$ per ogni $\beta > 0$, per $x \to 0^+$. Si ha pertanto

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^\alpha - \arctan x - \frac{8}{3}(\sin\frac{x}{2})^3}{x - \sin x - e^{-\frac{1}{x^2}}} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha < 1 \\ 0 & \text{se } \alpha = 1 \\ -\infty & \text{se } \alpha > 1. \end{cases}$$

Esercizio 3. Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ si consideri la funzione

$$f_\alpha(x) = \frac{(\tan\sqrt{x}\,)^{\frac{1}{2}+\alpha}}{(1-x)^{\alpha+1}(2-x)^{\frac{3}{2}+\alpha}}$$

Si studi la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^1 f_\alpha(x)dx$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ e lo si calcoli per $\alpha = -\frac{1}{2}$.

Svolgimento. L'integranda f_α è definita e continua nell'intervallo aperto $]0,1[$ e si ha

$$f_\alpha(x) \sim \begin{cases} x^{\frac{1}{4}+\frac{\alpha}{2}} & \text{per } x \to 0^+ \\ \frac{1}{(1-x)^{\alpha+1}} & \text{per } x \to 1^-. \end{cases}$$

Pertanto l'integrale converge se e solo se converge per entrambi gli estremi e cioè se e solo se valgono contemporaneamente le due condizioni

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} + \frac{\alpha}{2} > -1 & \quad \text{per il primo estremo} \\ \alpha + 1 < 0 & \quad \text{per il secondo estremo,} \end{aligned}$$

cioè se e solo se $-\frac{5}{2} < \alpha < 1$. Il calcolo richiesto è

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}\,(2-x)} &= (\text{ponendo } 1 - x = t^2) \ -2\int_1^0 \frac{t}{t(1-t^2)}\,dt \\ &= 2\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = 2\,\arctan x|_0^1 = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Esercizio 4. Determinare tutte le soluzioni dell'equazione

$$2z^2 = i\bar{z}, \qquad z \in \mathbb{C},$$

esprimendole in forma algebrica e rappresentandole sul piano di Gauss.

Svolgimento. Ponendo $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, l'equazione diventa

$$2(x + iy)^2 = i(x - iy),$$

cioè

$$2\big(x^2 - y^2\big) + 4ixy = y + ix.$$

Siccome due numeri complessi coincidono se e solo se hanno la stessa parte reale e la stessa parte immaginaria, l'equazione è equivalente al sistema

$$\begin{cases} 2x^2 - 2y^2 - y = 0 \\ x(4y-1) = 0, \end{cases}$$

che ha per soluzioni $x = y = 0$, $x = 0$, $y = -\frac{1}{2}$ e $y = \frac{1}{4}$, $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{4}$, cioè $0, i/2, \frac{1}{2}(\pm\sqrt{3}/2 + i/2)$, che sono disegnate in figura 4. In alternativa, si poteva porre $z = \rho e^{i\vartheta}$, con $\rho \geq 0$. L'equazione diventa

$$2\rho^2 e^{2i\vartheta} = \rho e^{i\frac{\pi}{2}} e^{-i\vartheta},$$

da cui prendendo il modulo di entrambi i membri risulta $\rho = 0$ oppure $\rho = \frac{1}{2}$. Ponendo $\rho = \frac{1}{2}$ in entrambi i membri, si trova che

$$e^{3i\vartheta} = e^{i\frac{\pi}{2}},$$

da cui $\vartheta = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi, \frac{\pi}{6} + \frac{4}{3}\pi$, e si ritrovano le stesse soluzioni.

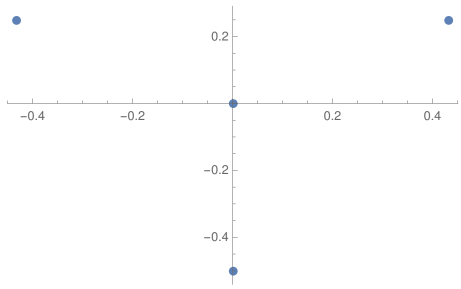

Figura 4: Le soluzioni dell'Esercizio 4 (Tema 2).

Esercizio 5 [facoltativo]. Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ è finito l'integrale

$$\int_0^2 \frac{x^2}{|x^3 - \alpha^3|^\alpha}\, dx$$

e calcolarlo per tali α.

Svolgimento. V. lo svolgimento nel Tema 4.

TEMA 3

Esercizio 1. Si consideri la funzione

$$f(x) = \log\left(\frac{|\cos x|}{\sin x}\right)$$

nell'intervallo $I = [-\pi, \pi]$.
(a) Determinare il dominio D di f in I e studiarne il segno; determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti;
(b) studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di f; determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto;
(c) calcolare f'' e studiare la convessità e la concavità di f, determinandone gli eventuali punti di flesso;
(d) Si disegni un grafico qualitativo di f (ripetendo per periodicità il grafico di f in I).

Soluzione:

(a) il dominio in I è dato da $x \in I$ tali che $\frac{|\cos x|}{\sin x} > 0$ cioè $\cos(x) \neq 0$ e $\sin x > 0$ e quindi

$$\mathcal{D} =]0, \pi[\setminus \{\pi/2\}$$

e quindi per $x \in \mathcal{D}$, $f(x) = f(|x|)$. Calcoliamo limiti significativi

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to \pi/2} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to \pi^-} f(x) = +\infty$$

Per quanto riguarda il segno $f(x) > 0$ se e solo se $|\cos x| > \sin x$ cioè $x \in (0, \pi/4) \cup (3/4\pi, \pi))$. Evidentemente non ci sono asintoti e la funzione è continua e derivabile nel dominio $\mathcal{D}$(aperto).

(b) Calcoliamo la derivata per $x \in \mathcal{D}$ ricordando che $f(x) = f(|x|)$

$$f'(x) = \frac{\sin x}{\cos x}\left(\frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x}\right) = -\frac{1}{\sin x \cos x} = -\frac{2}{\sin 2x}$$

Poiché per $x \in \mathcal{D}$ $\sin x > 0$ ricaviamo che $f'(x) > 0$ se e solo se $\cos x < 0$ cioè la funzione è strettamente monotona crescente per $x \in (\pi/2, \pi)$. Non esistono punti di max/min relativi ne assoluti.

(c) Calcoliamo $f''(x)$

$$f''(x) = 4\frac{\cos(2x)}{\sin^2(2x)}$$

Quindi la funzione è convessa se e solo se $\cos(2x) > 0$ quindi $2x \in (0, \pi/2) \cup (3/2\pi, 2\pi)$ cioè $x \in (0, \pi/4) \cup (3/4\pi, \pi)$ e quindi i punti $x_1 = \pi/4$ e $x_2 = 3/4\pi$ sono punti di flesso.

(d) Il grafico segue:

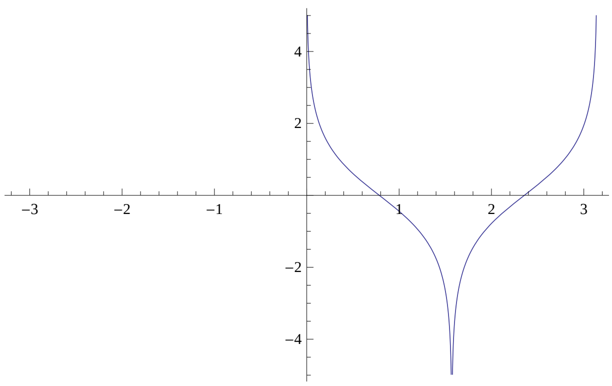

Figura 5: Il grafico di f (Tema 3).

Esercizio 2. Calcolare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}^+$ il limite

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{4}{3}(\sin \frac{x}{2})^3 + x^\alpha - \sinh x}{e^{-\frac{1}{x}} + x - \arctan x}$$

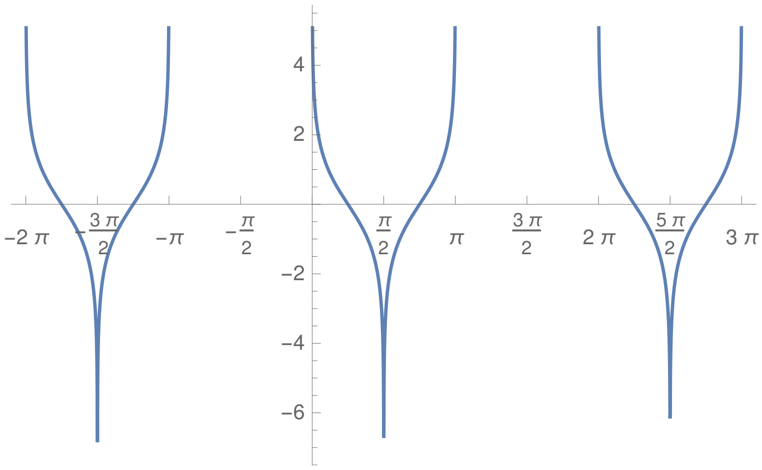

Figura 6: Il grafico di f prolungata per periodicità (Tema 3).

Soluzione: Abbiamo per $x \to 0^+$ i seguenti sviluppi:

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{48} + o(x^3)$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

quindi $\sin^3\left(\frac{x}{2}\right) = \left(x/2 - x^2/48 + o(x^3)\right)^3 = x^3/8 + o(x^3)$ inoltre, poiché per ogni $\beta > 0$ abbiamo $\mathrm{e}^{-1/x} = o(x^\beta)$ per $x \to 0^+$ per il PSI otteniamo

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\frac{4}{3}(\sin\frac{x}{2})^3 + x^\alpha - \sinh x}{e^{-\frac{1}{x}} + x - \arctan x} = \lim_{x\to0^+} \frac{x^3/6 + x^\alpha - x^3/6 - x + o(x^3)}{x^3/3}$$

Quindi per $\alpha < 1$ il limite è $+\infty$ per $\alpha > 1$ il limite è $-\infty$. Per $\alpha = 1$ il limite vale 0.

Esercizio 3 [9 punti] Per ogni $\beta \in \mathbb{R}$ si consideri la funzione

$$f_\beta(x) = \frac{\left(\arcsin\left(\sqrt{1-x}\right)\right)^{-\frac{3}{2}+\beta}}{x^{\beta-1}(1+x)^{-\frac{1}{2}+\beta}}$$

Si studi la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^1 f_\beta(x)dx$$

al variare del parametro $\beta \in \mathbb{R}$ e lo si calcoli per $\beta = \frac{3}{2}$.

Soluzione: Si noti che l'integrando ha potenziali problemi di limitatezza sia in 0 che in 1. Per quanto riguarda 0 abbiamo

$$f_\beta(x) \sim C/x^{\beta-1} \qquad x \to 0^+$$

dove $C = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{-3/2+\beta} > 0$, quindi dobbiamo porre $\beta - 1 < 1$ cioè $\beta < 2$. Per quanto riguarda il punto 1, l'integrando ha potenziali problemi al numeratore. Usando lo sviluppo di $\arcsin x$ per $x \to 0$ otteniamo

$$f_\beta(x) \sim \frac{2^{1/2-\beta}}{(1-x)^{3/4-\beta/2}} \qquad x \to 1^-$$

e quindi ho convergenza se $3/4 - \beta/2 < 1$ cioè $\beta > -1/4$. In definitiva la convergenza è assicurata per $-1/2 < \beta < 2$. Per $\beta = 3/2$ ottengo

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx = \quad \text{pongo } \sqrt{x} = t \quad 2\int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = 2 \arctan t|_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

Esercizio 4. Determinare tutte le soluzioni dell'equazione

$$z^2 = -4i\bar{z}, \qquad z \in \mathbb{C},$$

esprimendole in forma algebrica e rappresentandole sul piano di Gauss.

Usando la rappresentazione esponenziale $z = \rho e^{i\theta}$ l'equazione diventa

$$\rho^2 e^{2i\theta} = 4\rho e^{(3/2\pi - \theta)i}$$

quindi o $\rho = 0$ e quindi $z_1 = 0$ o $\rho = 4$. In questo caso calcoliamo le fasi θ. Abbiamo

$$3\theta = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi \qquad \text{con } k = 0, 1, 2$$

In definitiva $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$, $\theta_3 = \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3} = 7/6\pi$ e $\frac{\pi}{2} + \frac{4\pi}{3} = 11/6\pi$. Le soluzioni sono quindi:

$$\begin{aligned} z_1 &= 0; \\ z_2 &= 4e^{i\pi/2} = 4i; \\ z_3 &= 4e^{i7/6\pi} = 2(-\sqrt{3} - i); \\ z_4 &= 4e^{i11/6\pi} = 2(\sqrt{3} - 1) \end{aligned}$$

La rappresentazione sul piano di Gauss segue.

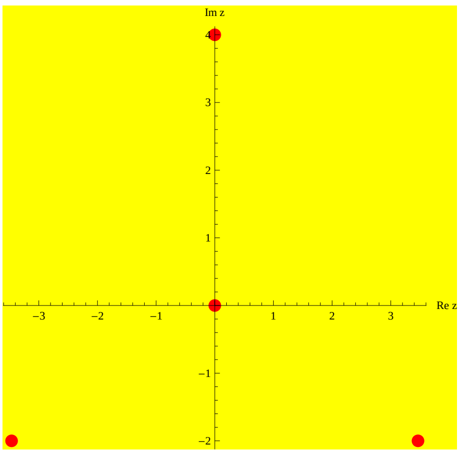

Figura 7: Le soluzioni di $z^2 = -4i\bar{z}$ f (Tema 3).

Esercizio 5 [facoltativo] Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ è finito l'integrale

$$\int_0^2 \frac{x^2}{|x^3 - \alpha^3|^\alpha}\, dx$$

e calcolarlo per tali α.

Svolgimento. V. lo svolgimento nel Tema 4.

TEMA 4

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x) = \log\left(\frac{\cos x}{|\sin x|}\right)$$

nell'intervallo $I = [-\pi, \pi]$.
(a) Determinare il dominio D di f in I e studiarne il segno; determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti;
(b) studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di f; determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto;
(c) calcolare f'' e studiare la convessità e la concavità di f, determinandone gli eventuali punti di flesso;
(d) disegnare un grafico qualitativo di f in tutto $\mathbb{R}$, usando la periodicità.

Svolgimento

(a). Il dominio è dato da: $\sin x \neq 0$ e $\frac{\cos x}{|\sin x|} > 0$. La prima condizione equivale a $x \notin \{-\pi, 0, \pi\}$ mentre la seconda a $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Quindi vale

$$dom(f) = (-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}).$$

(*La funzione è pari; si potrebbe studiarla nel solo intervallo* $(0, \pi/2)$*; nel caso, si dovrebbero poi trovare le proprietà su* $(-\pi/2, 0)$ *per simmetria.*)

Per lo studio del segno di f, osserviamo che $f(x) \geq 0$ equivale a $\frac{\cos x}{|\sin x|} \geq 1$. Allora valgono: $f(x) > 0$ per $x \in (-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}) \cup (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$, $f(x) < 0$ per $x \in (-\frac{\pi}{4}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{4})$, $f(x) = 0$ per $x = \pm\frac{\pi}{4}$.

Limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to 0} f(x) = +\infty.$$

La funzione presenta un asintoto verticale destro in $x = -\frac{\pi}{2}$, un asintoto verticale sinistro in $x = \frac{\pi}{2}$ ed un asintoto verticale bifronte in $x = 0$.

(b). Per il teorema sull'algebra delle derivate, per quello sulla derivata della funzione composta, per il dominio della derivata del modulo (si osservi che $\sin x \neq 0$ in $dom(f)$), la funzione è derivabile su tutto $dom(f)$. Inoltre vale

$$f'(x) = \frac{-1}{\sin x \cos x} \qquad \forall x \in dom(f).$$

Per lo studio della monotonia di f, osserviamo che $f'(x) \geq 0$ equivale a $\sin x \cos x < 0$ che a sua volta equivale a $\sin x < 0$ per $x \in dom(f)$. Quindi valgono: $f'(x) > 0$ su $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ e $f'(x) < 0$ su $(0, \frac{\pi}{2})$. La funzione è strettamente crescente in $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ e strettamente decrescente in $(0, \frac{\pi}{2})$ e non presenta punti stazionari. Non esistono punti di estremo relativo e, per lo studio dei limiti agli estremi del dominio, valgono: $\sup f = +\infty$ e $\inf f = -\infty$.

Limiti di f':

$$\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} f'(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty.$$

(c). Abbiamo

$$f''(x) = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} \qquad \forall x \in dom(f).$$

Osserviamo che, su $dom(f)$, $f''(x) \geq 0$ equivale a $\cos^2 x - \sin^2 x \geq 0$ che equivale a $\cos^2 x \geq 1/2$ che equivale a $x \in [-\frac{\pi}{4}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{4}]$. Ne deduciamo che la funzione è convessa su $[-\frac{\pi}{4}, 0)$ e su $(0, \frac{\pi}{4}]$ mentre è concava su $(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4})$ e su $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ e presenta punti di flesso in $x = \pm\frac{\pi}{4}$.
(d) Il grafico di f è in figura 8.

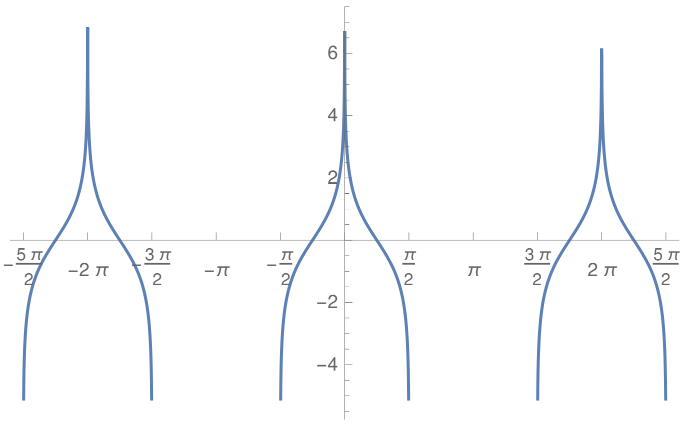

Figura 8: Il grafico di f (Tema 4).

Esercizio 2 Calcolare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}^+$ il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{9}{2}(\arctan\frac{x}{3})^3 + x^\alpha - \sin x}{e^{-\frac{1}{x^2}} + \sinh 2x - 2x}$$

Svolgimento Studiamo separatamente il numeratore ed il denominatore tramite gli sviluppi di MacLaurin.

Ricordandosi che per $y \to 0$ si ha $\arctan y = y - \frac{y^3}{3} + o(y^4)$, abbiamo

$$\begin{aligned} \text{Num.} &= -\frac{9}{2}\left(\frac{x}{3} - \frac{x^3}{81} + o(x^4)\right)^3 + x^\alpha - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6)\right) \\ &= -\frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{54} + o(x^6) + x^\alpha - x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{5!} + o(x^6) \\ &= x^\alpha - x + x^5(\frac{1}{54} - \frac{1}{120}) + o(x^6). \end{aligned}$$

Quindi vale

$$\text{Num.} \sim \begin{cases} x^\alpha & \text{se } \alpha < 1 \\ -x & \text{se } \alpha > 1 \\ x^5(\frac{1}{54} - \frac{1}{120}) & \text{se } \alpha = 1. \end{cases}$$

Passiamo ora allo studio del denominatore. Innanzitutto osserviamo che, per ogni $\beta \in \mathbb{R}$, $e^{-\frac{1}{x^2}} = o(x^\beta)$ per $x \to 0^+$. Infatti si ha

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^\beta} = (y = \frac{1}{x^2}) = \lim_{y\to+\infty} \frac{e^{-y}}{y^{-\beta/2}} = \lim_{y\to+\infty} \frac{y^{\beta/2}}{e^y} = 0$$

dove l'ultima uguaglianza è dovuta alla gerarchia degli infiniti.

Possiamo allora scrivere

$$\text{Den.} \quad = \quad e^{-\frac{1}{x^2}} + \left(2x + \frac{4}{3}x^3 + o(x^4)\right) - 2x = \frac{4}{3}x^3 + o(x^4).$$

In conclusione abbiamo:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha < 1 \\ -\infty & \text{se } \alpha > 1 \\ 0 & \text{se } \alpha = 1. \end{cases}$$

Esercizio 3 Per ogni $\beta \in \mathbb{R}$ si consideri la funzione

$$f_\beta(x) = \frac{\left(\arctan\left(\sqrt{1-x}\right)\right)^{-\frac{3}{2}-3\beta}}{x^{-3\beta-1}(1+x)^{-\frac{1}{2}-3\beta}}$$

Si noti che per ogni $\beta \in \mathbb{R}$ il dominio di f_β contiene l'intervallo $]0,1[$. Si studi la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^1 f_\beta(x)dx$$

al variare del parametro $\beta \in \mathbb{R}$ e lo si calcoli per $\beta = -\frac{1}{2}$.

Svolgimento Al variare di β l'integrale può essere improprio in $x = 0$ ed in $x = 1$. Conviene trattare in ogni caso entrambi i punti come punti di integrazione impropria. Osserviamo che vale

$$\int_0^1 f_\beta(x)dx = \lim_{a\to 0^+} \int_a^{1/2} f_\beta(x)dx + \lim_{b\to 1^-} \int_{1/2}^b f_\beta(x)dx.$$

Studiamo il comportamento asintotico della funzione integranda separatamente per $x \to 0^+$ e per $x \to 1^-$.

- per $x \to 0^+$, $f_\beta \sim \left(\frac{\pi}{4}\right)^{-\frac{3}{2}-3\beta} \frac{1}{x^{-3\beta-1}}$; poiché la funzione a destra ha integrale improprio $\int_0^{1/2} ...dx$ convergente se, e solo se, $-3\beta - 1 < 1$, per il teorema sul confronto asintotico abbiamo che $\int_0^{1/2} f_\beta dx$ è convergente se, e solo se, $\beta > -2/3$.
- per $x \to 1^-$, $f_\beta \sim \frac{1}{2^{-\frac{1}{2}-3\beta}}(1-x)^{\frac{1}{2}(-\frac{3}{2}-3\beta)}$; poiché la funzione a destra ha integrale improprio $\int_{1/2}^1 ...dx$ convergente se, e solo se, $\frac{1}{2}(-\frac{3}{2} - 3\beta) > -1$, per il teorema sul confronto asintotico abbiamo che $\int_{1/2}^1 f_\beta dx$ è convergente se, e solo se, $\beta < 1/6$.

In conclusione $\int_0^1 f_\beta dx$ è convergente se, e solo se $\beta \in \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{6}\right)$.

Per $\beta = -1/2$, l'integrale diventa $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx$ ed è improprio solo in $x = 0$. Calcoliamone l'integrale indefinito

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx = (x = t^2,\ dx = 2tdt) = 2\int \frac{1}{1+t^2}dt = 2\arctan t + c = 2\arctan\sqrt{x} + c.$$

Allora abbiamo

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx = \lim_{a\to 0^+} \left[2\arctan\sqrt{x}\right]_a^1 = \lim_{a\to 0^+} \left(\frac{\pi}{2} - 2\arctan\sqrt{a}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Esercizio 4 Determinare tutte le soluzioni dell''equazione

$$\bar{z}^2 = -iz, \qquad z \in \mathbb{C},$$

esprimendole in forma algebrica e rappresentandole sul piano di Gauss.

Svolgimento Ponendo $z = x + iy$, l'equazione diventa

$$x^2 - y^2 - 2ixy = y - ix;$$

eguagliando le parti reali ed immaginarie a sinistra ed a destra, si ottiene il sistema

$$\begin{cases} x^2 - y^2 - y = 0 \\ x(-2y+1) = 0. \end{cases}$$

La seconda equazione ha soluzioni: $x = 0$ e $y = 1/2$ che, sostituite nella prima equazione, danno rispettivamente $y = 0, -1$ e $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

In conclusione, le soluzioni sono: $z = 0$, $z = -i$, $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ e $z = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$, rappresentate in figura 9.

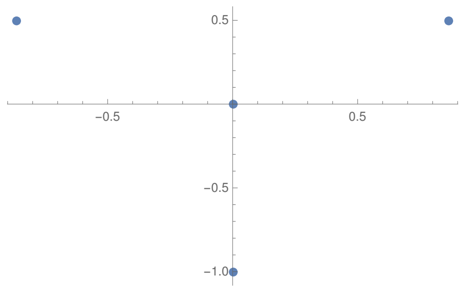

Figura 9: Le soluzioni dell'Esercizio 4 (Tema 4).

Esercizio 5 [facoltativo] Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ è finito l'integrale

$$\int_0^2 \frac{x^2}{|x^3 - \alpha^3|^\alpha}\, dx$$

e calcolarlo per tali α.

Svolgimento Per $\alpha \notin [0,2]$ l'integrale non è improprio perché $f \in C^0([0,2])$. Inoltre, per $\alpha = 0$, la funzione può essere estesa per continuità in $x = 0$ quindi nuovamente non si tratta di un integrale improprio. Consideriamo $\alpha \in (0,2]$. Osserviamo che vale

$$f(x) = \frac{x^2}{|x-\alpha|^\alpha |x^2 + \alpha x + \alpha^2|^\alpha};$$

poiché $f \in C^0([0,2))$ se $\alpha = 2$ e $f \in C^0([0,\alpha) \cup (\alpha,2])$ se $\alpha \in (0,2)$, basta studiare il comportamento asintotico di f per $x \to \alpha$. Abbiamo

$$f(x) \sim \frac{\alpha^2}{3\alpha^{2\alpha}} \frac{1}{|x-\alpha|^\alpha} \qquad \text{per} \qquad x \to \alpha;$$

essendo l'integrale a destra convergente se e solo se $\alpha < 1$, il teorema del confronto asintotico assicura che il nostro integrale è convergente se e solo se $\alpha < 1$.

In conlcusione, l'integrale converge per $\alpha \in (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$ e diverge altrimenti.

Calcolo dell'integrale.

Se $\alpha \leq 0$ abbiamo

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 \frac{x^2}{(x^3-\alpha^3)^\alpha}dx = (x^3 - \alpha^3 = t) = \frac{1}{3}\int_{-\alpha^3}^{8-\alpha^3} \frac{1}{t^\alpha}dt = \frac{1}{3}\left[\frac{(8-\alpha^3)^{-\alpha+1} - (-\alpha^3)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right].$$

Se $\alpha > 2$ abbiamo

$$\begin{aligned}\int_0^2 f(x)dx &= \int_0^2 \frac{x^2}{(-x^3+\alpha^3)^\alpha}dx = (-x^3 + \alpha^3 = t) = -\frac{1}{3}\int_{\alpha^3}^{-8+\alpha^3} \frac{1}{t^\alpha}dt \\ &= -\frac{1}{3}\left[\frac{(-8+\alpha^3)^{-\alpha+1} - (\alpha^3)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right].\end{aligned}$$

Se $\alpha \in (0,1)$, abbiamo

$$\begin{aligned}\int_0^2 f(x)dx &= \lim_{a\to\alpha^-}\int_0^a f(x)dx + \lim_{b\to\alpha^+}\int_b^2 f(x)dx = \lim_{a\to\alpha^-}\int_0^a \frac{x^2}{(-x^3+\alpha^3)^\alpha}dx + \lim_{b\to\alpha^+}\int_b^2 \frac{x^2}{(x^3-\alpha^3)^\alpha} \\ &= -\lim_{a\to\alpha^-}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{(-a^3+\alpha^3)^{-\alpha+1} - (\alpha^3)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right)\right] + \lim_{b\to\alpha^+}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{(8-\alpha^3)^{-\alpha+1} - (b^3-\alpha^3)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right)\right] \\ &= \frac{1}{3}\frac{(\alpha^3)^{-\alpha+1} + (8-\alpha^3)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}.\end{aligned}$$