ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 11.07.2016

TEMA 1

Esercizio 1 [9 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = \sqrt{(x-2)|3-x|}.$$

a) Determinare il dominio, calcolare i limiti significativi e gli eventuali asintoti di f.

b) Studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di f; determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto e calcolare i limiti significativi di f'.

c) Studiare la concavità e la convessità di f.

d) Disegnare un grafico qualitativo di f.

Svolgimento.

(a) Il dominio di f è dato dai punti ove il radicando è nonnegativo (si osservi che il radicando è definito su tutto $\mathbb{R}$). Quindi si ha

$$\mathrm{dom}(f) = [2, +\infty).$$

Svolgendo il modulo, la funzione f può essere scritta come

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x^2+5x-6} & \text{per } 2 \le x \le 3 \\ \sqrt{x^2-5x+6} & \text{per } x > 3. \end{cases}$$

Osserviamo anche che per la continuità della radice e del modulo e per il teorema sulla continuità della funzione composta, si ha: $f \in C^0([2,+\infty))$. In particolare, abbiamo $\lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2) = 0$. L'unico limite significativo è $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Ricerca degli asintoti. Abbiamo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2-5x+6}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{1-5/x+6/x^2}}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - x] = \lim_{x\to+\infty} \left[\sqrt{x^2-5x+6} - x\right] \frac{\sqrt{x^2-5x+6}+x}{\sqrt{x^2-5x+6}+x} = \frac{-5x+6}{x\sqrt{1-5/x+6/x^2}+x} = -\frac{5}{2}$$

La retta $y = x - 5/2$ è perciò asintoto obliquo per $x \to +\infty$.

(b). Per i teoremi sulla derivabilità della funzione composta (ricordarsi che $g(y) = \sqrt{y}$ è derivabile solo su $(0,+\infty)$), abbiamo che f è sicuramente derivabile su $(2,3) \cup (3,+\infty)$ e verifica

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-2x+5}{2\sqrt{-x^2+5x-6}} & \text{per } 2 < x < 3 \\ \frac{2x-5}{2\sqrt{x^2-5x+6}} & \text{per } x > 3. \end{cases}$$

Ne deduciamo:

$$\lim_{x\to 2^+} f'(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to 3^-} f'(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to 3^+} f'(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f'(x) = 1;$$

in particolare, f non è derivabile né in $x = 2$ né in $x = 3$. Inoltre, $f'(x) \geq 0$ se e solo se $x \in (2, 5/2] \cup (3, +\infty)$. I punti di estremo relativo sono: $x = 5/2$ (perché $f'(5/2) = 0$ ed f' vi cambia segno), $x = 2$ e $x = 3$ (perché ivi $f = 0$ e la f è sempre nonnegativa). Quindi, f è crescente in $(2, 5/2]$ ed in $[3, +\infty)$ mentre è decrescente su $[5/2, 3]$; $x = 2$ e $x = 3$ sono punti di minimo relativo ed assoluto, $x = 5/2$ è punto di massimo relativo mentre non esiste un punto di massimo assoluto.

(c) Per $x \in (2, 3) \cup (3, +\infty)$ si ha

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{-2\sqrt{-x^2+5x-6}-(-2x+5)\frac{-2x+5}{2\sqrt{-x^2+5x-6}}}{2(-x^2+5x-6)} = \frac{-1}{4(-x^2+5x-6)^{3/2}} & \text{per } 2 < x < 3 \\ \frac{2\sqrt{x^2-5x+6}-(2x-5)\frac{2x-5}{2\sqrt{x^2-5x+6}}}{2(x^2-5x+6)} = \frac{-1}{4(x^2-5x+6)^{3/2}} & \text{per } x > 3. \end{cases}$$

La funzione è dunque concava in $[2, 3]$ e in $[3, +\infty)$.
d) Il grafico di f, con l'asintoto, è in figura 1.

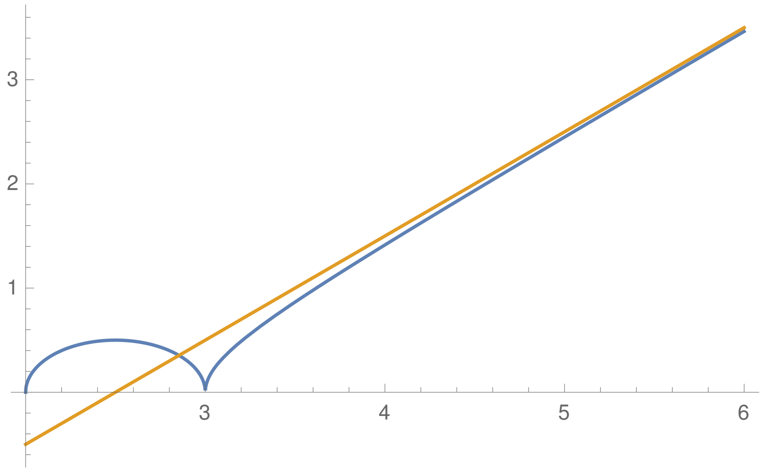

Figure 1: Il grafico di f (Tema 1).

Esercizio 2 [9 punti] Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos \arctan x - \cos x}{\log(1 + x^2) - \sin(\alpha x^2)}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Svolgimento. Ricordiamo che, per $y \to 0$, valgono le seguenti formule

$$\cos y = 1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{24} + o(y^5)$$
$$\arctan y = y - \frac{y^3}{3} + o(y^4)$$
$$\sin(y) = y - \frac{y^3}{6} + o(y^4)$$
$$\log(1 + y) = y - \frac{y^2}{2} + o(y^2).$$

Allora si ha

$$\begin{aligned}
\cos\arctan x &= \cos\left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)\right)\\
&= 1 - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)\right)^2 + \frac{1}{24}\left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)\right)^4 + o\left[\left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)\right)^5\right]\\
&= 1 - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)\right)^2 + \frac{1}{24}\left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)\right)^4 + o(x^5)\\
&= 1 - \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{2}{3}x^4\right) + \frac{1}{24}(x^4) + o(x^5)\\
&= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + o(x^5).
\end{aligned}$$

Ne deduciamo

$$\text{Numeratore} = \frac{1}{3}x^4 + o(x^5).$$

Dall'altra parte abbiamo

$$\begin{aligned}
\text{Denumeratore} &= \left(x^2 - \frac{1}{2}x^4 + o(x^4)\right) + \left(-\alpha x^2 + o(\alpha^2 x^4)\right)\\
&= (1-\alpha)x^2 - \frac{1}{2}x^4 + o(x^4).
\end{aligned}$$

Concludiamo

$$\lim_{x\to 0} \cdots = \begin{cases} 0 & \alpha \neq 1 \\ -\frac{2}{3} & \alpha = 1. \end{cases}$$

Esercizio 3 [9 punti] Stabilire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ il seguente integrale è convergente

$$\int_0^{\pi/8} \frac{\sin 2x}{|\log(\cos 2x)|^\alpha \cos 2x}\, dx$$

e calcolarne il valore per $\alpha = 1/2$.

Svolgimento. Convergenza. Osserviamo che, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, la funzione f è continua e nonnegativa in $(0, \pi/8]$. Rimane da studiarne il comportamento per $x \to 0^+$. Per $x \to 0^+$, usando l'asintoticità delle componente della f e gli sviluppi di Taylor, si ha

$$\begin{aligned}
f(x) \sim& \frac{2x}{(-\log(\cos 2x))^\alpha} = \frac{2x}{(-\log(1 - 2x^2 + o(x^3)))^\alpha} = \frac{2x}{(-(-2x^2 + o(x^3)) + o[(-2x^2 + o(x^3))])^\alpha}\\
=& \frac{2x}{(2x^2 + o(x^2))^\alpha} = \frac{2^{1-\alpha}}{x^{2\alpha-1}\,(1 + o(1))^\alpha} \sim \frac{2^{1-\alpha}}{x^{2\alpha-1}}.
\end{aligned}$$

Per confronto con la funzione $1/x^\beta$, concludiamo che l'integrale è convergente se, e solo se, $2\alpha - 1 < 1$ cioè $\alpha < 1$.

Calcolo. Per $\alpha = 1/2$ si ha

$$\int_0^{\pi/8} f(x)\, dx = \lim_{a\to 0^+} \int_a^{\pi/8} \frac{\sin 2x}{\sqrt{-\log(\cos 2x)}\cos 2x}\, dx;$$

operando la sostituzione $t = -\log(\cos 2x)$ (quindi "$dt = 2\frac{\sin 2x}{\cos 2x} dx$"), si ottiene

$$\int_0^{\pi/8} f(x)\, dx = \lim_{a\to 0^+} \frac{1}{2} \int_a^{\log 2/2} \frac{1}{\sqrt{t}}\, dt = \frac{1}{2} \lim_{a\to 0^+} \left[2\sqrt{t}\right]_a^{\log 2/2} = \sqrt{\frac{\log 2}{2}}.$$

Esercizio 4 [4 punti] Risolvere nel piano complesso l'equazione

$$2\bar{z}^3 = 3i,$$

rappresentandone le soluzioni in forma algebrica.

Svolgimento. Passando al coniugato di entrambi i membri dell'equazione otteniamo

$$z^3 = -\frac{3}{2}i;$$

quindi $|z| = \sqrt[3]{3/2}$ mentre $arg(z) = (\frac{3}{2}\pi + 2k\pi)/3$ con $k = 0, 1, 2$ cioè $arg(z) = \pi/2, 7\pi/6, 11\pi/6$. In conclusione

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt[3]{\frac{3}{2}} e^{i\pi/2} = \sqrt[3]{\frac{3}{2}} i, \\ z_2 &= \sqrt[3]{\frac{3}{2}} e^{i7\pi/6} = \sqrt[3]{\frac{3}{2}} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} i \right), \\ z_3 &= \sqrt[3]{\frac{3}{2}} e^{i11\pi/6} = \sqrt[3]{\frac{3}{2}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} i \right), \end{aligned}$$

che si rappresentano nel piano di Gauss come segue:

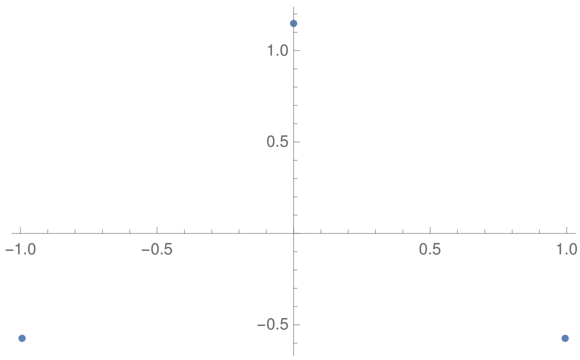

Figure 2: Soluzione dell'esercizio 4 (Tema 1).

NB: con log si indica il logaritmo in base e.

Appello del 11.07.2016
TEMA 2

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x) = \sqrt{(x-1)|4-x|}.$$

a) Determinare il dominio, calcolare i limiti significativi e gli eventuali asintoti di f.

b) Studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di f; determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto e calcolare i limiti significativi di f'.

c) Studiare la concavità e la convessità di f.

d) Disegnare un grafico qualitativo di f.

Svolgimento. a) Il dominio di f è dato dagli x per i quali l'argomento della radice è ≥ 0, cioè è

$$D = [1, +\infty).$$

Si ha

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x^2 + 5x - 4} & \text{per } 1 \leq x \leq 4 \\ \sqrt{x^2 - 5x + 4} & \text{per } x > 4. \end{cases}$$

L'unico limite significativo è per $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Si ha inoltre

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 5x + 4}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x\sqrt{1 - 5/x + 4/x^2}}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - x = \lim_{x \to +\infty} x \left(\sqrt{1 - \frac{5}{x} + \frac{4}{x^2}} - 1 \right) = \lim_{x \to +\infty} x \left(\frac{-5}{2x} + o(x) \right) = -\frac{5}{2}.$$

La retta $y = x - 5/2$ è perciò asintoto obliquo per $x \to +\infty$.
b) Le regole di derivazione non possono essere applicate per $x = 1$ e per $x = 4$, perché l'argomento della radice si annulla. In tutti gli altri punti del dominio f è derivabile e si ha

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-2x+5}{2\sqrt{-x^2+5x-4}} & \text{per } 1 < x < 4 \\ \frac{2x-5}{2\sqrt{x^2-5x+4}} & \text{per } x > 4, \end{cases}$$

per cui il segno di f' è dato dal segno del numeratore. Si ha quindi che f è strettamente crescente per $1 \leq x \leq \frac{5}{2}$, strettamente decrescente per $\frac{5}{2} < x \leq 4$ ed infine strettamente crescente per $x > \frac{5}{2}$. Quindi $x = 1$ e $x = 4$ sono punti di minimo assoluto, mentre $x = \frac{5}{2}$ è un punto di massimo relativo. Deduciamo anche dall'espressione di f' che

$$\lim_{x \to 1^+} f'(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to 4^-} f'(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to 4^+} f'(x) = +\infty;$$

in particolare, f non è derivabile né in $x = 1$ né in $x = 4$, che sono punti di cuspide.
c) Per $x \in D$, $x \neq 1, 4$ si ha

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{-2\sqrt{-x^2+5x-4} - (-2x+5)\frac{-2x+5}{2\sqrt{-x^2+5x-4}}}{2(-x^2+5x-4)} = \dfrac{-9}{4(-x^2+5x-4)^{3/2}} & \text{per } 1 < x < 4 \\ \dfrac{2\sqrt{x^2-5x+4} - (2x-5)\frac{2x-5}{2\sqrt{x^2-5x+4}}}{2(x^2-5x+4)} = \dfrac{-9}{4(x^2-5x+4)^{3/2}} & \text{per } x > 4. \end{cases}$$

La funzione è dunque concava in $[1, 4]$ e in $[4, +\infty)$.
d) Il grafico di f, con l'asintoto, è in figura 3.

Esercizio 2 Calcolare il limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cosh \arctan x - \cosh x}{\log(1 - x^2) + \sinh(\alpha x^2)}$$

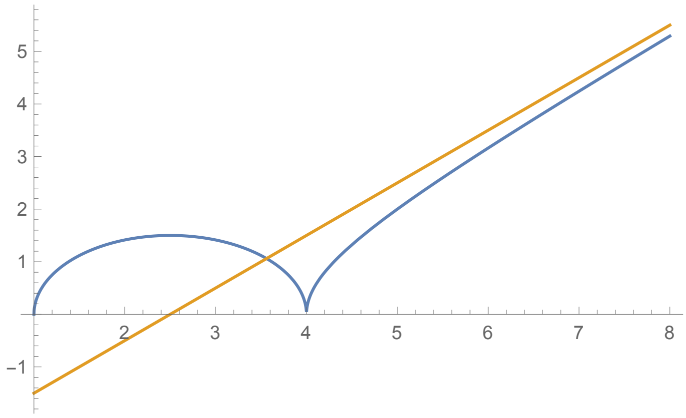

Figure 3: Il grafico di f (Tema 2).

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
Svolgimento. Si ha

$$\begin{aligned}\cosh y &= 1 + \frac{y^2}{2} + \frac{1}{24}y^4 + o(y^4) \quad \text{per } y \to 0,\\ \arctan y &= y - \frac{y^3}{3} + o(y^4) \quad \text{per } y \to 0,\\ \log(1+y) &= y - \frac{y^2}{2} + o(y^2) \quad \text{per } y \to 0,\\ \sinh y &= y + \frac{1}{6}y^3 + o(y^3) \quad \text{per } y \to 0,\end{aligned}$$

per cui risulta, per $x \to 0$,

$$\begin{aligned}\cosh\arctan x - \cosh x &= \cosh\Big(x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\Big) - \cosh x\\ &= 1 + \frac{1}{2}\Big(x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\Big)^2 + \frac{1}{24}\Big(x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\Big)^4 - \cosh x\\ &= 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{3} + \frac{x^4}{24} - 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^4) = -\frac{x^4}{3} + o(x^4)\\ \log(1-x^2) + \sinh(\alpha x^2) &= -x^2 - \frac{x^4}{2} + \alpha x^2 + o(x^4) = (-1+\alpha)x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4).\end{aligned}$$

Si ha perciò

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cosh\arctan x - \cosh x}{\log(1-x^2) + \sinh(\alpha x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{-x^4/3 + o(x^4)}{(-1+\alpha)x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)} = \begin{cases} 2/3 & \text{se } \alpha = 1\\ 0 & \text{se } \alpha \neq 1.\end{cases}$$

Esercizio 3 Stabilire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ il seguente integrale è convergente

$$\int_0^{\pi/9} \frac{\sin 3x}{|\log(\cos 3x)|^\alpha \cos 3x}\,dx$$

e calcolarne il valore per $\alpha = 1/2$.
Svolgimento. Convergenza. Nel dominio d'integrazione, l'integranda ha segno costante, per cui si può

studiare la convergenza usando il confronto asintotico. Si ha, per $x \to 0$,

$$\begin{aligned}\sin 3x &= 3x + o(x)\\ \big(-\log(\cos 3x)\big)^{\alpha} &= \big(-\log(1-9x^2/2+o(x^2))\big)^{\alpha} = \Big(\frac{9}{2}x^2+o(x^2)\Big)^{\alpha}\\ &= \Big(\frac{9}{2}\Big)^{\alpha} x^{2\alpha} + o(x^{2\alpha}),\end{aligned}$$

per cui

$$\frac{\sin 3x}{|\log(\cos 3x)|^{\alpha}\cos 3x} \sim \frac{1}{x^{2\alpha-1}}.$$

L'integrale è quindi convergente per $\alpha < 1$.
Calcolo. Con la sostituzione $\cos 3x = t$ si ha $-3\sin 3x\,dx = dt$, per cui

$$\int_0^{\pi/9} \frac{\sin 3x}{\sqrt{-\log(\cos 3x)}\cos 3x}\,dx = -\frac{1}{3}\int_1^{1/2}\frac{1}{t\sqrt{-\log t}}\,dt = \frac{1}{3}\int_{1/2}^{1}\frac{1}{t\sqrt{-\log t}}\,dt$$

(ponendo $\log t = u$, da cui $t = e^u$, $dt = e^u\,du$)

$$= \frac{1}{3}\int_{-\log 2}^{0}\frac{1}{\sqrt{-u}}\,du = \frac{2}{3}\sqrt{\log 2}.$$

In alternativa, intuendo che l'integrale dato era immediato per ogni α, si poteva calcolare e studiare la convergenza nel seguente modo: ponendo $\log(\cos 3x) = t$, da cui $\frac{-3\sin 3x}{\cos 3x}\,dx = dt$, si ricava

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/9}\frac{\sin 3x}{|\log(\cos 3x)|^{\alpha}\cos 3x}\,dx &= -\frac{1}{3}\int_0^{-\log 2}\frac{1}{(-t)^{\alpha}}\,dt\\ &= \frac{1}{3(-\alpha+1)}\,t^{-\alpha+1}\Big|_0^{\log 2}.\end{aligned}$$

Tale integrale converge, e vale $\frac{1}{3(-\alpha+1)}\,(\log 2)^{-\alpha+1}$, se e solo se $\alpha < 1$.

Esercizio 4 Risolvere nel piano complesso l'equazione

$$3\bar{z}^3 = -2i,$$

rappresentandone le soluzioni in forma algebrica.
Svolgimento. L'quazione equivale a

$$z^3 = \frac{2}{3}i.$$

Dobbiamo perciò esprimere in forma algebrica le radici cubiche di $\frac{2}{3}i = \frac{2}{3}e^{i\pi/2}$. La formula di De Moivre dà perciò

$$z = \sqrt[3]{\frac{2}{3}}e^{i\pi/6},\ \sqrt[3]{\frac{2}{3}}e^{5i\pi/6},\ \sqrt[3]{\frac{2}{3}}e^{3i\pi/2} = \sqrt[3]{\frac{2}{3}}\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\Big), \sqrt[3]{\frac{2}{3}}\Big(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\Big), -\sqrt[3]{\frac{2}{3}}i,$$

che si rappresentano nel piano di Gauss come segue:

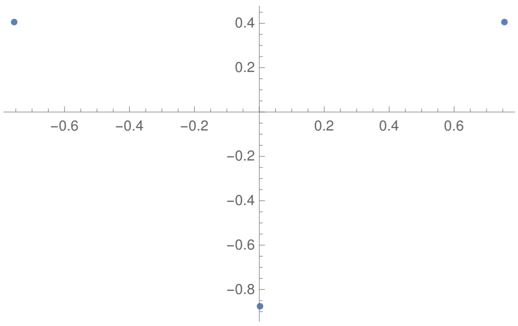

Figure 4: Soluzione dell'esercizio 4 (Tema 2).