ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 19.09.2016

TEMA 1

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x) = \log\left(2e^{2|x|} - e^{|x|} - 1\right).$$

a) Determinare il dominio e le eventuali simmetrie, calcolare i limiti significativi e gli eventuali asintoti di f.

b) Studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di f.

c) Studiare il segno e determinare gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto di f.

d) **(Facoltativo, vale 2 punti in più)** Studiare la concavità e la convessità di f.

e) Disegnare un grafico qualitativo di f.

Svolgimento. (a) f è visibilmante pari, per cui la studiamo per $x \geq 0$. Il dominio è dato dagli $x(\geq 0)$ per i quali $2e^{2x} - e^x - 1 > 0$. Ponendo $e^x = y$, si ha $2y^2 - y - 1 > 0$, che ha per soluzioni $1, -\frac{1}{2}$. Tenendo conto che $y > 0$, le soluzioni sono $y > 1$, che corrisponde a $x > 0$ (cioè $x \neq 0$ su tutta la retta reale).
Si ha

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} = +\infty.$$

Per quanto riguarda il posssibile asintoto obliquo, si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log e^{2x} + \log(2 - e^{-x} - e^{-2x})}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x + \log(2 - e^{-x} - e^{-2x})}{x} = 2$$

e

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - 2x] = \lim_{x\to+\infty} [2x + \log(2 - e^{-x} - e^{-2x}) - 2x] = \log 2.$$

La retta $y = 2x + \log 2$ è perciò asintoto obliquo per $x \to +\infty$.
(b) e (c) In tutti i punti del dominio si possono applicare le regole di derivazione, quindi f è derivabile e la sua derivata, per $x > 0$, è

$$f'(x) = \frac{4e^{2x} - e^x}{2e^{2x} - e^x - 1}.$$

Siccome il denominatore, per $x > 0$, è > 0, il segno di f' dipende solo dal segno di $4e^{2x} - e^x$, cioè, per $x > 0$ si ha che $f'(x) > 0$ sempre. Quindi f è strettamente crescente per $x > 0$ ed è positiva se e solo se $2e^{2x} - e^x - 1 > 1$, cioè se e solo se $x > \log(1 + \sqrt{17}) - 2\log 2$.
(d) Per $x > 0$ si ha

$$f''(x) = \frac{-2e^{3x} - 8e^x + e^x}{(2e^{2x} - e^x - 1)^2},$$

il cui segno dipende solo dal numeratore. L'equazione $-2y^3 - 8y^2 + y = 0$ non ha soluzioni positive, per cui $-2e^{3x} - 8e^x + e^x < 0$ per ogni $x > 0$. La funzione risulta quindi concava per $x > 0$.
(e) Il grafico di f, con i due asintoti, è in Figura 1.

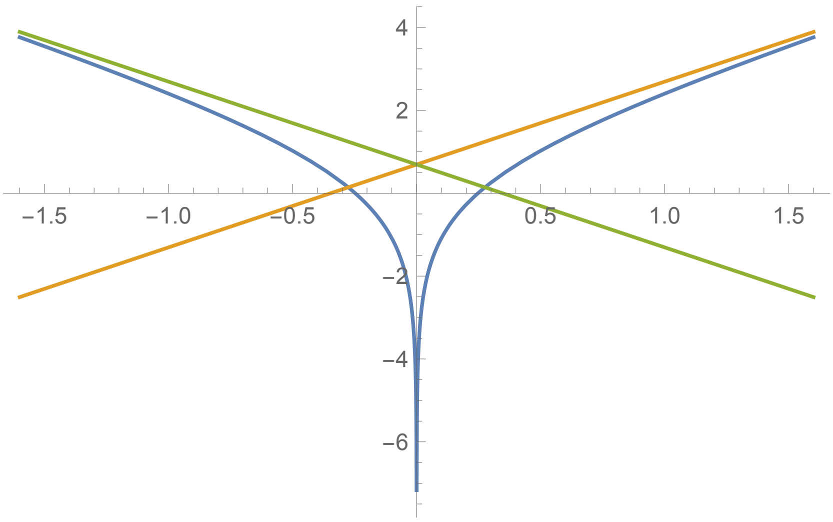

Figura 1: Il grafico di f (Tema 1).

Esercizio 2 Studiare la convergenza assoluta e la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2} e^{n(x^2-x)}\right)^n}{n+1}$$

al variare di $x \in \mathbb{R}$.

Svolgimento. Convergenza assoluta: conviene usare il criterio della radice. La serie converge assolutamente se

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{1}{2} - \frac{3}{2} e^{n(x^2-x)}\right|}{\sqrt[n]{n+1}} < 1,$$

mentre diverge assolutamente e non converge (perché il termine generale non è infinitesimo) se tale limite è maggiore di 1. Il valore del limite è

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{2} - \frac{3}{2} e^{n(x^2-x)}\right| = \begin{cases} \left|\frac{1}{2} - 0\right| = \frac{1}{2} & \text{se } x^2 - x < 0 \\ \left|\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\right| = 1 & \text{se } x^2 - x = 0 \\ \left|\frac{1}{2} - \infty\right| = +\infty & \text{se } x^2 - x > 0. \end{cases}$$

La serie pertanto converge assolutamente, e quindi converge, se $0 < x < 1$, mentre diverge assolutamente e non converge se $x < 0$ oppure $x > 1$.
Resta da studiare la convergenza per $x = 0$ e e per $x = 1$. In entrambi i casi la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1},$$

che converge per il criterio di Leibniz e diverge assolutamente per confronto con la serie armonica.

Esercizio 3 Calcolare l'integrale

$$\int_0^2 |x-1| \log x \, dx.$$

Svolgimento. Si tratta di un integrale improprio in $x = 0$. Allora si ha

$$\int_0^2 |x-1| \log x \, dx = \lim_{a \to 0^+} \int_a^1 (1-x) \log x \, dx + \int_1^2 (x-1) \log x \, dx.$$

Osserviamo che vale

$$\int (x-1) \log x \, dx = \left(\frac{x^2}{2} - x \right) \log x - \frac{x^2}{4} + x + c.$$

Concludiamo

$$\begin{aligned} \int_0^2 |x-1| \log x \, dx &= - \lim_{a \to 0^+} \left[\left(\frac{x^2}{2} - x \right) \log x - \frac{x^2}{4} + x \right] \Bigg|_a^1 \\ &\qquad + \left[\left(\frac{x^2}{2} - x \right) \log x - \frac{x^2}{4} + x \right] \Bigg|_1^2 \\ &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Esercizio 4 Risolvere la disequazione

$$\left| \frac{1}{z} - \frac{1}{\bar{z}} \right| \leq 1$$

e disegnarne le soluzioni sul piano di Gauss.

Svolgimento. Osserviamo che z deve essere diverso da 0. Si ha

$$\left| \frac{\bar{z} - z}{z \bar{z}} \right| \leq 1.$$

Ponendo $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$ risulta (ricordando che $z\bar{z} = |z|^2$ e che $z - \bar{z} = 2\mathrm{Im}\, z$)

$$\frac{2|y|}{x^2 + y^2} \leq 1.$$

La disequazione è pari rispetto a y (e a x). La risolviamo perciò per $y \geq 0$ e poi operiamo una riflessione rispetto all'asse x. La disequazione, per $y \geq 0$ è equivalente a $x^2 + y^2 - 2y \geq 0$, cioè $x^2 + (y-1)^2 \geq 1$, che descrive l'esterno della circonferenza di centro $(0, 1)$ e raggio 1. Le soluzioni sono rappresentate nella Figura 2.

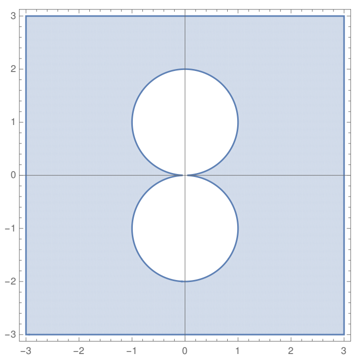

Figura 2: Le soluzioni dell'Esercizio 4 (Tema 1).

ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 19.09.2016

TEMA 2

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x) = \log\left(4e^{2|x|} - 3e^{|x|} - 1\right).$$

a) Determinare il dominio e le eventuali simmetrie, calcolare i limiti significativi e gli eventuali asintoti di f.

b) Studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di f.

c) Studiare il segno e determinare gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto di f.

d) **(Facoltativo, vale 2 punti in più)** Studiare la concavità e la convessità di f.

e) Disegnare un grafico qualitativo di f.

Svolgimento. (a) f è visibilmante pari, per cui la studiamo per $x \geq 0$. Il dominio è dato dagli $x(\geq 0)$ per i quali $4e^{2x} - 3e^x - 1 > 0$. Ponendo $e^x = y$, si ha $4y^2 - 3y - 1 > 0$, che ha per soluzioni $1, -\frac{1}{4}$. Tenendo conto che $y > 0$, le soluzioni sono $y > 1$, che corrisponde a $x > 0$ (cioè $x \neq 0$ su tutta la retta reale).
Si ha

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} = +\infty.$$

Per quanto riguarda il posssibile asintoto obliquo, si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log e^{2x} + \log(4 - 3e^{-x} - e^{-2x})}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x + \log(4 - 3e^{-x} - e^{-2x})}{x} = 2$$

e

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - 2x] = \lim_{x\to+\infty} [2x + \log(4 - 3e^{-x} - e^{-2x}) - 2x] = 2\log 2.$$

La retta $y = 2x + 2\log 2$ è perciò asintoto obliquo per $x \to +\infty$.
(b) e (c) In tutti i punti del dominio si possono applicare le regole di derivazione, quindi f è derivabile e la sua derivata, per $x > 0$, è

$$f'(x) = \frac{8e^{2x} - 3e^x}{4e^{2x} - 3e^x - 1}.$$

Siccome il denominatore, per $x > 0$, è > 0, il segno di f' dipende solo dal segno di $8e^{2x} - 3e^x$, cioè, per $x > 0$ si ha che $f'(x) > 0$ sempre. Quindi f è strettamente crescente per $x > 0$ ed è positiva se e solo se $4e^{2x} - 3e^x - 1 > 1$, cioè se e solo se $x > \log(3 + \sqrt{41}) - 3\log 2$.
(d) Per $x > 0$ si ha

$$f''(x) = \frac{-18e^{3x} - 16e^{2x} + 3e^x}{(4e^{2x} - 3e^x - 1)^2},$$

il cui segno dipende solo dal numeratore. L'equazione $-18y^3 - 16y^2 + 3y = 0$ non ha soluzioni positive, per cui $-18e^{3x} - 16e^{2x} + 3e^x < 0$ per ogni $x > 0$. La funzione risulta quindi concava per $x > 0$.
(e) Il grafico di f, con i due asintoti, è in Figura 3.

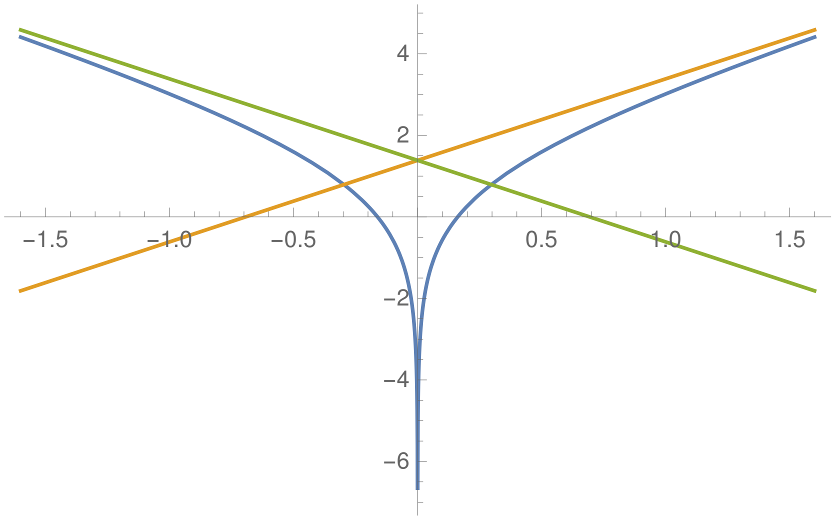

Figura 3: Il grafico di f (Tema 2).

Esercizio 2 Studiare la convergenza assoluta e la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2} e^{n(x^2-1)}\right)^n}{n+2}$$

al variare di $x \in \mathbb{R}$.
Svolgimento. Convergenza assoluta: conviene usare il criterio della radice. La serie converge assolutamente se

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{1}{2} - \frac{3}{2} e^{n(x^2-1)}\right|}{\sqrt[n]{n+2}} < 1,$$

mentre diverge assolutamente e non converge (perché il termine generale non è infinitesimo) se tale limite è maggiore di 1. Il valore del limite è

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{2} - \frac{3}{2} e^{n(x^2-1)}\right| = \begin{cases} \left|\frac{1}{2} - 0\right| = \frac{1}{2} & \text{se } x^2 - 1 < 0 \\ \left|\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\right| = 1 & \text{se } x^2 - 1 = 0 \\ \left|\frac{1}{2} - \infty\right| = +\infty & \text{se } x^2 - 1 > 0. \end{cases}$$

La serie pertanto converge assolutamente, e quindi converge, se $-1 < x < 1$, mentre diverge assolutamente e non converge se $x < -1$ oppure $x > 1$.
Resta da studiare la convergenza per $x = -1$ e e per $x = 1$. In entrambi i casi la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+2},$$

che converge per il criterio di Leibniz e diverge assolutamente per confronto con la serie armonica.

Esercizio 3 Calcolare l'integrale

$$\int_0^1 |2x-1| \log x \, dx.$$

Svolgimento. Si tratta di un integrale improprio in $x = 0$. Allora si ha

$$\int_0^1 |2x-1| \log x \, dx = \lim_{a\to 0^+} \int_a^{1/2} (1-2x) \log x \, dx + \int_{1/2}^2 (2x-1) \log x \, dx.$$

Osserviamo che vale

$$\int (2x-1) \log x \, dx = (x^2 - x) \log x - \frac{x^2}{2} + x + c.$$

Concludiamo

$$\begin{aligned}\int_0^1 |2x-1| \log x \, dx &= -\lim_{a\to 0^+} \left[(x^2-x) \log x - \frac{x^2}{2} + x \right] \Bigg|_a^{1/2} \\ &\quad + \left[(x^2-x) \log x - \frac{x^2}{2} + x \right] \Bigg|_{1/2}^1 \\ &= -\frac{1}{2} \log 2 - \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Esercizio 4 Risolvere la disequazione

$$\left| \frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}} \right| \leq 1$$

e disegnarne le soluzioni sul piano di Gauss.

Svolgimento. Osserviamo che z deve essere diverso da 0. Si ha

$$\left| \frac{\bar{z} + z}{z\bar{z}} \right| \leq 1.$$

Ponendo $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$ risulta (per $z \neq 0$, ricordando che $z\bar{z} = |z|^2$ e che $z + \bar{z} = 2\mathrm{Re}\, z$)

$$\frac{2|x|}{x^2 + y^2} \leq 1.$$

La disequazione è pari rispetto a x (e a y). La risolviamo perciò per $x \geq 0$ e poi operiamo una riflessione rispetto all'asse y. La disequazione, per $x \geq 0$ è equivalente a $x^2 - 2x + y^2 \geq 0$, cioè $(x-1)^2 + y^2 \geq 1$, che descrive l'esterno della circonferenza di centro $(1, 0)$ e raggio 1. Le soluzioni sono rappresentate nella Figura 4.

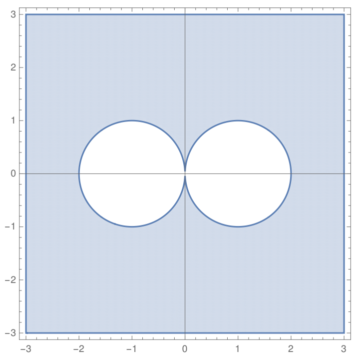

Figura 4: Le soluzioni dell'Esercizio 4 (Tema 2).