

PROGRAMMA del corso di Analisi Matematica 1

Ingegneria dell'Informazione, Canale 4

docente: Claudio Marchi

a.a. 2015-2016

Testi Consigliati:

“Analisi Matematica 1, teoria e applicazioni”, A. Marson, P. Baiti, F. Ancona & B. Rubino, Carocci Editore.

“Analisi Matematica 1”, M. Bramanti, C.D. Pagani & S. Salsa, Zanichelli Editore.

Dispensa a cura del Prof. Colombo, contenente i temi d'esame svolti.

Complementi in rete sulle pagine web dei docenti.

Legenda: dove compare **(D)** si intende che la dimostrazione del risultato è richiesta a tutti; dove compare (d) si intende che la dimostrazione del risultato sarà richiesta solo agli studenti ammessi alla prova orale con un voto non inferiore a 24. Le restanti dimostrazioni non sono richieste. **Tutte** le definizioni e tutti gli enunciati sono richiesti.

1 Elementi introduttivi

1.1 Logica elementare, sommatorie, principio di induzione

- Proposizioni, connettivi, quantificatori, predicati. Uso della negazione con connettivi o quantificatori.
- Sommatorie e loro proprietà.
- Principio di induzione. Formula della progressione geometrica **(D)**, della progressione telescopica (d). Disuguaglianza di Bernoulli (d).
- Definizione di fattoriale. Coefficienti binomiali e loro proprietà. Formula del binomio di Newton (d).

1.2 Elementi di teoria degli insiemi, insiemi numerici \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q}

- Simboli e operazioni sugli insiemi. Prodotto cartesiano. Insiemi numerici: \mathbb{N} , \mathbb{Z} e \mathbb{Q} . \mathbb{Q} è un campo ordinato. Proprietà di densità di \mathbb{Q} (d). Proprietà di Archimede di \mathbb{Q} (d). \mathbb{Q} non contiene $\sqrt{2}$ (d).
- L'insieme \mathbb{R} . Teorema di completezza. Simboli “ $+\infty$ ” e “ $-\infty$ ”, retta reale estesa.
- Definizione di modulo o valore assoluto, disuguaglianza triangolare (d).
- Insiemi limitati, superiormente o inferiormente limitati. Definizione di: maggiorante, minorante, massimo, minimo, estremo superiore ed estremo inferiore. Unicità del massimo e del minimo **(D)**. Caratterizzazione dell'estremo superiore/inferiore **(D)**.
- Proprietà di Archimede di \mathbb{R} (d), densità di \mathbb{Q} in \mathbb{R} (d), densità di $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ in \mathbb{R} .
- Radicali ed esponenti a potenza reale, logaritmi.

1.3 I numeri complessi

- I numeri complessi; loro operazioni. Forma algebrica dei complessi. \mathbb{C} è un campo (d). Coniugato di un complesso e sue proprietà. Teorema fondamentale dell'algebra e sue conseguenze. Piano di Gauss. Modulo e sue proprietà. Disuguaglianza triangolare su \mathbb{C} . Forma trigonometrica dei complessi. Formula di De Moivre **(D)**. Formula di Eulero. Forma esponenziale dei complessi. Radici di polinomi.

2 Funzioni

- Definizione di funzione. Dominio, codominio, immagine e grafico di una funzione. Funzioni reali di variabile reale. Funzioni elementari. Immagine e controimmagine di insiemi tramite una funzione. Composizione di funzioni. Funzioni iniettive e suriettive. Funzione inversa. Funzione invertibile su un insieme. Funzioni pari e dispari. Funzioni periodiche. Funzioni monotone.
- Funzioni iperboliche; funzioni iperboliche inverse e loro formula. Funzioni trigonometriche e loro inverse.
- Funzioni limitate ed illimitate. Massimo, minimo, estremo superiore ed inferiore di una funzione. Punti di estremo di una funzione.

3 Limiti di funzioni

- Intorni sferici. Intersezione di intorni è un intorno. Proprietà di separazione (**D**). Punti di accumulazione e punti isolati di un insieme. Proprietà verificate definitivamente.
- Definizione di limite di una funzione nelle sue varie formulazioni. Teorema di unicità del limite (**D**). Le funzioni con limite finito verificano la definitiva limitatezza (d).
- Punto di accumulazione destro e sinistro di un insieme. Limite destro e sinistro. Relazione tra limite ed i limiti destro e sinistro (d).
- Relazione tra limite di una funzione e limite del suo modulo (d). Teorema della permanenza del segno (**D**). Teorema del confronto (d). Teorema dei carabinieri (**D**). Limiti al finito della funzione $\sin x$ (d). Limite notevole $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)$ (d). Forme indeterminate. Teorema sull'algebra dei limiti (**D**). Teorema sul limite di funzioni monotone (**D**). Limiti al finito delle principali funzioni elementari. Teorema del cambio di variabile (d). Limiti notevoli derivanti da $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)$ (d).
- Definizione di numero di Nepero “ e ” limiti notevoli conseguenti (d).
- Asintoticità di due funzioni: simbolo “ \sim ”. Il simbolo “ o -piccolo” e la sua algebra. Relazione tra asintoticità ed o -piccolo (d). Cambio di variabile negli sviluppi (d). Teorema sostituzione degli infinitesimi e degli infiniti (**D**). Il simbolo “ O -grande”. Ordine di infinito e di infinitesimo. Ordine di infinito e di infinitesimo rispetto ad una funzione-campione.
- Gerarchia degli infiniti tra le funzioni elementari.

4 Successioni

- Successioni. Proprietà verificate definitivamente da una successione. Definizione di limite di una successione. Successioni convergenti, divergenti, infinitesime, indeterminate, monotone. Una successione è definitivamente limitata se e solo se è limitata (**D**). Una successione convergente è limitata (**D**).
- Teorema dell'unicità del limite, relazione tra limite e modulo, teorema sull'algebra dei limiti, teorema della permanenza del segno, teorema del confronto, teorema dei carabinieri, caratterizzazione del limite per le successioni monotone. Progressione geometrica.
- Gerarchia degli infiniti (d).
- $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ è una successione convergente (d).
- Sottosuccessioni. Una successione ha limite l se e solo se tutte le sue sottosuccessioni hanno limite l . Teorema di Bolzano-Weierstrass per le successioni. Teorema-ponte (**D**).

5 Serie

- Somme parziali. Definizione di serie convergente, divergente, indeterminata.
- Serie geometrica e suo carattere (**D**). Serie di Mengoli e suo carattere (**D**). Carattere della somma di serie convergenti e del prodotto di una serie regolare per una costante.
- Coda di una serie. Limite del termine generale di una serie convergente (**D**). Possibili caratteri di una serie con termini di segno definitivamente costante (**D**). Serie assolutamente convergenti. Convergenza assoluta implica convergenza semplice (**D**). Criterio di condensazione. Carattere della serie armonica (**D**). Carattere della serie armonica generalizzata (d). Carattere della serie di termine $a_k = [k^\alpha \log^\beta k]^{-1}$ (d). Criterio del confronto (**D**) e corrispondente criterio asintotico (**D**). Criterio del rapporto (**D**) e corrispondente criterio asintotico (**D**). Criterio della radice (**D**) e corrispondente criterio asintotico (**D**). Criterio di Leibniz (d).

6 Funzioni continue di una variabile reale

- Teorema di Bolzano-Weierstrass (d). Compatti di \mathbb{R} . Teorema di Heine-Borel.
- Definizione di funzione continua. Continuità della somma, del prodotto e del quoziente di funzioni continue. Teorema della definitiva limitatezza, teorema della permanenza del segno e teorema del cambio di variabili, tutti per funzioni continue. Continuità della composizione di funzioni continue. Teorema-ponte per funzioni continue. Sviluppo asintotico della composizione di funzioni.
- Punti di discontinuità eliminabile, di discontinuità di prima e seconda specie. Prolungamento per continuità.
- Teorema di Weierstrass (**D**). Teorema di Bolzano o degli zeri (**D**). Teorema dei valori intermedi (**D**). Teorema: se f è continua su un intervallo, allora essa è invertibile se e solo se è strettamente monotona (d). Teorema sulla continuità della funzione inversa (d).
- Continuità delle funzioni elementari.

7 Calcolo differenziale per funzioni reali di una variabile reale

- Definizione di derivata prima di una funzione e di derivabilità di una funzione. Suo significato geometrico. Rapporto incrementale di una funzione in un punto. Migliore approssimazione lineare di una funzione. Retta tangente al grafico di una funzione. Continuità di una funzione derivabile (**D**). Calcolo della derivata di alcune funzioni elementari (**D**). Derivata destra e derivata sinistra. Legame tra derivabilità e derivabilità da destra e da sinistra (**D**).
- Una funzione pari ha derivata dispari e una dispari ha derivata pari (**D**). Teorema sull'algebra delle derivate (derivata della somma, del prodotto e del quoziente di funzioni derivabili) (**D**). Derivata della funzione composta (**D**). Derivata della funzione inversa di una funzione invertibile e derivabile (d). Calcolo delle derivate delle principali funzioni elementari (d). Classificazione dei punti di non derivabilità: punti angolosi, flessi a tangente verticale e cuspidi.
- Funzione derivata. Derivate successive. Funzioni di classe C^n e funzioni di classe C^∞ .
- Teorema di Fermat (**D**). Teorema di Rolle (**D**). Teorema di Lagrange (**D**). Teorema di caratterizzazione delle funzioni costanti (**D**). Teorema di Cauchy (d). Legame tra monotonia e derivata prima (**D**). Teorema di de l'Hôpital (d, solo nel caso di $\frac{0}{0}$ in un punto di \mathbb{R}). Teorema sul limite della derivata (d).

- Funzioni convesse e concave. Monotonia della derivata prima di una funzione derivabile convessa o concava. Legame tra segno della derivata seconda e convessità/concavità (d). Punti di flesso. Legame tra zeri della derivata seconda e punti di flesso (d). Studio della natura dei punti critici con la derivata seconda.
- Asintoti verticali, orizzontali ed obliqui di una funzione. Teorema sul calcolo di asintoti obliqui (**D**).
- Studi di funzione.
- Polinomi di Taylor e di Mc Laurin. Principali proprietà dei polinomi di Taylor (d). Teorema di Peano (d). Sviluppi delle principali funzioni elementari (**D**). Calcolo dei limiti mediante gli sviluppi.
- Teorema sulla formula di Taylor con resto di Lagrange.
- Serie di Taylor. Funzioni sviluppabili in serie di Taylor e relativo teorema (d).

8 Calcolo integrale per funzioni reali di una variabile reale

- Partizioni e partizioni puntate di un intervallo. Norma di una partizione. Somma inferiore e superiore di Riemann; somma puntata di una funzione relativa ad una partizione. Relative proprietà.
- Definizione di funzione integrabile secondo Cauchy-Riemann su un intervallo e proprietà equivalenti. Integrale definito di una funzione e sua interpretazione geometrica. Esempi di funzioni integrabili (d). Non integrabilità della funzione di Dirichlet (d).
- Linearità dell'integrale, Additività rispetto all'intervallo di integrazione. Monotonia. Disuguaglianza sull'integrale del modulo di una funzione integrabile.
- Integrabilità delle funzioni monotone (d, su $[0, 1]$) e delle funzioni continue a tratti. Integrabilità delle principali funzioni elementari (d).
- Teorema della media integrale (**D**); relativa interpretazione geometrica.
- Primitiva di una funzione. Integrale indefinito di una funzione. Teorema fondamentale del calcolo integrale (**D**). Integrali immediati.
- Integrazione per sostituzione (**D**). Integrazione per parti (**D**). Sostituzioni classiche/canoniche per alcune classi di funzioni integrande.
- Integrazione di alcune funzioni razionali fratte (per denominatori di grado ≤ 2 : **D**; per il caso generale: d) o integrali ad esse riconducibili.
- Funzioni integrabili in senso improprio; integrali in senso improprio o generalizzato. Assoluta integrabilità. Assoluta integrabilità implica integrabilità. Criterio del confronto. Criterio del confronto asintotico. Integrabilità di $1/[x^\alpha |\ln x|^\beta]$ su $(0, 1/2]$ e su $[2, +\infty)$.