Esercizi di Controlli Automatici - 10
A.A. 2002/2003

Esercizio 1. Consideriamo il sistema lineare e tempo invariante a tempo discreto e causale descritto dalla seguente equazione alle differenze:

$$y(t) - \frac{3}{4}y(t-1) + \frac{1}{8}y(t-2) = 3u(t), \qquad t \in \mathbb{Z}_+.$$

Si determini

i) l'espressione dell'evoluzione libera del sistema in funzione delle generiche condizioni iniziali;

ii) l'espressione della risposta impulsiva del sistema;

iii) l'espressione dell'uscita in evoluzione forzata in corrispondenza alla successione di ingresso $u(t) = \delta(t) + \frac{1}{3^t}\delta_{-1}(t-2)$;

iv) si analizzi la stabilità asintotica e la stabilità BIBO del sistema.

Esercizio 2. Si consideri il sistema a tempo discreto

$$y(t) - ay(t-1) = u(t) - u(t-1), \qquad t \in \mathbb{Z}_+,$$

dove a è un parametro reale

i) Calcolare, al variare di a in $\mathbb{R}$, l'uscita in evoluzione libera del sistema in corrispondenza a $y(-1) = 2a$.

ii) Si determini, al variare di a in $\mathbb{R}$ la risposta impulsiva del sistema $w_a(t)$.

iii) Si studi, al variare di a in $\mathbb{R}$, la stabilità asintotica e la stabilità BIBO del sistema.

Esercizio 3. L'estinzione di un debito mediante pagamenti rateali può essere descritta mediante un sistema LTI a tempo discreto. Indichiamo con $u(t), t \in \mathbb{Z}_+$, l'ammontare della rata nel mese t-esimo e con $y(t)$ l'ammontare del debito alla fine del t-esimo mese (dopo aver pagato la rata mensile). Assumendo che il debito venga contratto nel mese -1, e pertanto $y(-1)$ rappresenti l'ammontare del debito inizialmente contratto, e che i pagamenti rateali inizino nel mese assunto come riferimento (ovvero 0-esimo), l'estinzione del debito viene allora descritta mediante l'equazione alle differenze

$$y(t) - (1+I)\, y(t-1) = -u(t), \qquad t \in \mathbb{Z}_+,$$

dove I è il tasso di interesse mensile, espresso in forma decimale (e non percentuale).

i) Si determini l'andamento del debito nell'eventualità in cui, dopo aver effettuato il pagamento della prima rata, per un ammontare pari al 10% dell'importo iniziale $y(-1)$, il debitore non sia più in grado di far fronte al pagamento delle rate.

ii) Si determini l'andamento del debito nell'eventualità in cui i pagamenti rateali siano costanti e pari al 10% dell'importo iniziale $y(-1)$, giustificando l'andamento dell'evoluzione temporale.

iii) Supponendo che il debitore voglia estinguere in N rate mensili di uguale entità il debito contratto, si determini, in funzione del tasso di interesse e dell'ammontare iniziale del debito contratto, il valore di ciascuna rata.

Esercizio 4. Si determini se i seguenti sistemi a tempo discreti sono lineari o non lineari, tempo invarianti o tempo varianti, causali o non causali. Nel seguito $u(t),\ t \in Z_+$, rappresenta l'ingresso e $y(t),\ t \in Z_+$, la corrispondente uscita. Laddove necessario si assumano condizioni iniziali nulle.

1. $y(t) = u(t) - u(t-1)$;
2. $y(t) = u(t) - u(t+1)$;
3. $y(t) = u(t-1)y(t-1)$;
4. $y(t) = 5 + u(t)$;
5. $y(t) = \delta_{-1}(t)u(t)$;
6. $y(t) = \delta_{-1}(u(t))$;
7. $y(t) + (t-1)y(t-1) = u(t-1)$;
8. $y(t) = \sum_{i=0}^{t} u(i)$;
9. $y(t) = \sum_{i=-\infty}^{t} (0.5)^{t-i}u(i)$;
10. $y(t) = \sum_{i=-\infty}^{t} (0.5)^{t}u(i)$.

Esercizio 5. Consideriamo il sistema LTI a tempo discreto e causale descritto dalla seguente equazione alle differenze:

$$y(t) - \frac{4}{5}y(t-1) + ay(t-2) = 2u(t) + 3u(t-2), \qquad t \in \mathbb{Z}_+.$$

i) Determinare i modi del sistema al variare di a in $\mathbb{R}$;

ii) studiare la stabilità asintotica del sistema al variare di a in $\mathbb{R}$;

iii) trovare il valore di a per cui la risposta in evoluzione libera è una successione sinusoidale e, per tale valore di a, determinare l'evoluzione libera a partire dalle condizioni iniziali $y(-1) = 1$ e $y(-2) = 0$.

Esercizio 6. Consideriamo il sistema lineare e tempo invariante a tempo discreto e causale descritto dalla seguente equazione alle differenze:

$$y(t) + 2y(t-1) + 2y(t-2) = 3u(t) - u(t-3), \qquad t \in \mathbb{Z}_+.$$

Si determini

i) l'espressione dell'evoluzione libera del sistema in funzione delle generiche condizioni iniziali;

ii) l'espressione della risposta impulsiva del sistema;

iii) l'espressione dell'uscita in evoluzione forzata in corrispondenza alla successione di ingresso $u(t) = \delta(t) + \frac{1}{3^t}\, \delta_{-1}(t-2)$;

iv) si analizzi la stabilità asintotica e la stabilità BIBO del sistema.

NOTA: Per l'espressione della risposta impulsiva è possibile utilizzare una formula più sintetica di quella che compare nell'equazione (9.13) del libro. Se l'equazione caratteristica del sistema a tempo discreto è

$$\sum_{i=0}^{n} a_i z^i = 0$$

e 0 è radice dell'equazione caratteristica con molteplicità ν, mentre le altre radici $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ hanno molteplicità $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r$ (chiaramente $\sum_{i=1}^{r} \mu_i = n - \nu$), la risposta impulsiva contiene $\nu + 1$ modi impulsivi e $n - \nu$ modi esponenziali:

$$w(t) = \sum_{i=0}^{\nu} w(i)\delta(t-i) + \sum_{i=1}^{r} \sum_{k=0}^{\mu_i - 1} d_{i,k}\; t^k \lambda_i^t\; \delta_{-1}(t-(\nu+1)). \tag{1}$$

SOLUZIONE ESERCIZIO 2 (RACCOLTA 10)

i) L'equazione caratteristica del sistema è:

$$z - a = 0,$$

e quindi ha un solo zero, collocato in a, di molteplicità 1. Se $a = 0$ il solo modo elementare associato al sistema è l'impulso $\delta(t+1)$. Pertanto per $t \geq 0$ l'evoluzione libera è identicamente nulla (e lo è anche per $t \geq -1$ dal momento che è espressa dalla formula

$$y_\ell(t) = 2a\delta(t+1) = 0\delta(t+1).)$$

Se $a \neq 0$, il modo elementare associato a tale zero è $\{a^t\}_{t\in\mathbb{Z}}$, e quindi l'evoluzione libera d'uscita generica del sistema è del tipo

$$y_\ell(t) = ca^t, t \in \mathbb{Z}.$$

Nel caso specifico in esame, la condizione iniziale assegnata si traduce nel seguente vincolo sul coefficiente c:

$$2a = y_\ell(-1) = ca^{-1}.$$

Pertanto

$$y_\ell(t) = 2\ a^{t+2}, \qquad t \in \mathbb{Z}.$$

ii) Consideriamo prima il caso $a = 0$. In questo caso, l'equazione caratteristica ha solo uno zero in 0 e pertanto, in base alla (**??**), la risposta impulsiva del sistema è combinazione lineare di due impulsi, collocati in 0 e in 1. Ovviamente, da una semplice riscrittura dell'equazione alle differenze del sistema in cui si sostituisca a $u(t)$ l'impulso $\delta(t)$ e a $y(t)$ la risposta impulsiva $w(t)$, segue immediatamente che

$$w_0(t) = \delta(t) - \delta(t-1).$$

Per $a \neq 0$, invece, tenendo conto del fatto che compare un unico modo del tipo a^t, la risposta impulsiva assume la seguente espressione

$$w_a(t) = w(0)\delta(t) + d_1 a^t \delta_{-1}(t-1).$$

Si trova immediatamente

$$w(0) = 1$$

e

$$w(1) = aw(0) - \delta(0) = a - 1.$$

Da ciò segue

$$a - 1 = w(1) = w_a(1) = d_1 a$$

ovvero

$$d_1 = \frac{a-1}{a},$$

e quindi

$$w_a(t) = \delta(t) + (a-1)a^{t-1}\delta_{-1}(t-1).$$

iii) Chiaramente il sistema risulta asintoticamente stabile se e solo se $|a| < 1$. Per tali valori del parametro a il sistema è pure BIBO stabile. Da un'analisi della risposta fornita alla precedente domanda emerge chiaramente che nel caso $a = 1$ la risposta impulsiva risulta sommabile e quindi c'è stabilità BIBO. In tutti gli altri casi non c'è stabilità BIBO.