Esercizi di Controlli Automatici - 11
A.A. 2009/2010

Esercizio 1 Consideriamo il sistema LTI a tempo discreto e causale descritto dalla seguente equazione alle differenze:

$$y(t) - \frac{3}{4}y(t-1) + \frac{1}{8}y(t-2) = 3u(t).$$

Supponendo di operare nel solo dominio del tempo,

i) si determini l'espressione dell'evoluzione libera del sistema in funzione delle generiche condizioni iniziali;

ii) si determini l'espressione della risposta impulsiva del sistema;

iii) si determini l'espressione dell'uscita in evoluzione forzata in corrispondenza alla successione di ingresso $u(t) = \delta(t) + \frac{1}{3^t}\delta_{-1}(t-2)$;

iv) si analizzi la stabilità asintotica e la stabilità BIBO del sistema.

Supponendo di operare nel dominio delle trasformate zeta,

v) si determini l'espressione dell'uscita in evoluzione forzata in corrispondenza alla successione di ingresso $u(t) = \delta_{-1}(t) - \frac{1}{2}\delta_{-1}(t-1)$;

vi) si determini la successione di ingresso a cui corrisponde la successione di uscita (in evoluzione forzata)

$$y(t) = 4\ \delta_{-1}(t) - \frac{1}{4^{t-1}}\ \delta_{-1}(t).$$

Esercizio 2 Un sistema LTI a tempo discreto non causale ha la seguente risposta impulsiva:

$$w(t) = -\delta(t+1) + 2\delta(t) + \delta(t-1).$$

Determinare la risposta all'ingresso $u(t) = 3\delta(t+1) + 4\delta(t) - 2\delta(t-1) + \delta(t-2)$.

Esercizio 3 L'estinzione di un debito mediante pagamenti rateali può essere descritta mediante un sistema LTI a tempo discreto. Siano $u(t)$ e $y(t)$, $t \in \mathbb{Z}$, rispettivamente, l'ammontare della rata e il valore del debito residuo relativi al mese t-esimo. Supponendo che il debito venga contratto nel mese -1 (e, pertanto, l'importo del debito sia pari a $y(-1)$) e che la rata mensile venga pagata (a partire dal mese successivo) ogni primo del mese e, immediatamente dopo, si calcoli l'ammontare del debito residuo, l'estinzione del debito viene descritta mediante l'equazione alle differenze

$$y(t) - (1+I)\,y(t-1) = -u(t), \qquad t \in \mathbb{Z}_+,$$

dove I è il tasso di interesse mensile, espresso in forma decimale (e non percentuale).

i) Si determini l'andamento del debito nell'eventualità in cui, dopo aver effettuato il pagamento della prima rata, per un ammontare pari al 10% dell'importo iniziale $y(-1)$, il debitore non sia più in grado di far fronte al pagamento delle rate.

ii) Si determini l'andamento del debito nell'eventualità in cui i pagamenti rateali siano costanti e pari al 10% dell'importo iniziale $y(-1)$, giustificando l'andamento dell'evoluzione temporale.

iii) Supponendo che il debitore voglia estinguere in N rate mensili di uguale entità il debito contratto, si determini, in funzione del tasso di interesse e dell'ammontare iniziale del debito contratto, il valore di ciascuna rata.

Esercizio 4 Si vuole progettare un oscillatore numerico che generi la successione

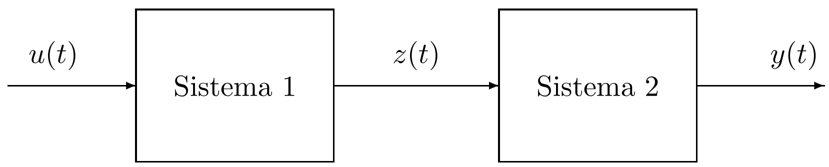
$$y(t) = A \cos\left(\frac{2\pi}{N} t + \phi\right), \qquad t \in \mathbb{Z}_+,$$

dove A è un numero reale positivo e ϕ un numero reale, come uscita in evoluzione libera di un modello ARMA del tipo:

$$y(t) + a_1 y(t-1) + a_2 y(t-2) = 0,$$

in corrispondenza ad una specifica scelta delle condizioni iniziali $y(-1)$ e $y(-2)$. Determinare i valori di a_1, a_2, $y(-1)$ e $y(-2)$ in funzione di pulsazione, ampiezza e fase, ovvero $(2\pi)/N$, A e ϕ.

Esercizio 5 Si consideri il sistema serie di figura:



dove il primo sistema viene descritto dal modello ARMA

$$z(t) = u(t-1),$$

mentre il secondo sistema viene descritto dal modello ARMA

$$y(t) + 2y(t-1) = z(t-1).$$

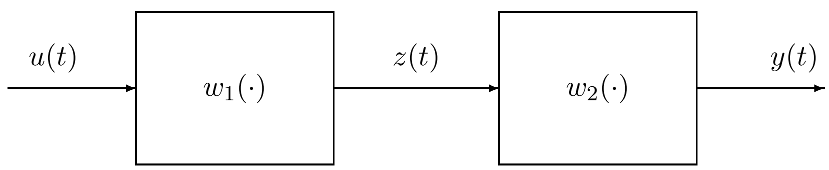
i) Determinare l'equazione alle differenze che descrive il sistema complessivo.

ii) Calcolare l'uscita del sistema quando $y(-1) = 1$ e $u(t) = 2\delta(t) - \delta(t-2)$.

iii) Si determini, facendo uso delle trasformate zeta, la successione in ingresso a cui corrisponde la successione d'uscita in evoluzione forzata

$$y(t) = (t-1)\ (-2)^{t-1} \delta_{-1}(t-1).$$

Esercizio 6 Si consideri il sistema serie di figura:



Supponendo che la risposta impulsiva del primo sistema sia

$$w_1(t) = a^t \delta_{-1}(t),$$

e la risposta impulsiva del secondo sistema sia

$$w_2(t) = b^t \delta_{-1}(t),$$

con $0 < a < b < 1$,

i) si determinino due modelli ARMA che rappresentano i due sistemi posti in serie;

ii) si determinino la risposta impulsiva e la funzione di trasferimento del sistema serie;

iii) si determini un modello ARMA di ordine 3 che rappresenta il sistema serie;

iv) si determinino le risposte in uscita al primo sistema ed al sistema serie in corrispondenza alla successione di ingresso

$$u(t) = e^{j\frac{\pi}{2}t}, \qquad t \in \mathbb{Z}.$$

Esercizio 7 Consideriamo il sistema LTI a tempo discreto e causale descritto dalla seguente equazione alle differenze:

$$y(t) - \frac{4}{5}y(t-1) + ay(t-2) = 2u(t) + 3u(t-2).$$

i) Determinare i modi del sistema al variare di a in $\mathbb{R}$;

ii) studiare la stabilità asintotica del sistema al variare di a in $\mathbb{R}$;

iii) trovare il valore di a per cui la risposta in evoluzione libera è una successione sinusoidale e, per tale valore di a, determinare l'evoluzione libera a partire dalle condizioni iniziali $y(-1) = 1$ e $y(-2) = 0$.

Esercizio 8 Si determini, eventualmente al variare di a in $\mathbb{R}$, la risposta impulsiva del sistema LTI causale a tempo discreto avente funzione di trasferimento

i) $W(z) = \dfrac{(z-1)(z+1/2)}{z(z-a)(z^2+1)}$;

ii) $W(z) = \dfrac{z}{(z+1)(z-a)}$;

iii) $W(z) = \dfrac{z-a}{z(z^2-1/4)}$;

iv) $W(z) = \dfrac{z^2+1}{z^2-1/2}$;

v) $W(z) = \dfrac{z^2+z+1}{z(z-1)^2}$;

vi) $W(z) = \dfrac{z}{(z^2-1)(z-1/2)}$.

Esercizio 9 Si consideri il sistema a tempo discreto

$$y(t) - ay(t-1) = u(t) - u(t-1),$$

dove a è un parametro reale.

i) Calcolare, per i valori di a in $\mathbb{R}$ per cui ciò ha significato, l'uscita in evoluzione libera del sistema in corrispondenza a $y(-1) = 2a$.

ii) Si determini, al variare di a in $\mathbb{R}$ la risposta impulsiva del sistema $w_a(t)$.

iii) Si studi, al variare di a in $\mathbb{R}$, la stabilità asintotica e la stabilità BIBO del sistema.

Esercizio 10 Consideriamo il sistema LTI a tempo discreto e causale descritto dalla seguente equazione alle differenze:

$$y(t) + 2y(t-1) + 2y(t-2) = 3u(t) - u(t-3).$$

Si determini

i) l'espressione dell'evoluzione libera del sistema in funzione delle generiche condizioni iniziali;

ii) l'espressione della risposta impulsiva del sistema;

iii) l'espressione dell'uscita in evoluzione forzata in corrispondenza alla successione di ingresso $u(t) = \delta(t) + \frac{1}{3^t}\delta_{-1}(t-2)$;

iv) si analizzi la stabilità asintotica e la stabilità BIBO del sistema.

Esercizio 11 Con riferimento al sistema LTI a tempo discreto e causale, descritto dalla seguente equazione alle differenze

$$y(t) - ay(t-1) = bu(t),$$

dove a e b sono parametri reali, si determini:

i) l'evoluzione libera in funzione della generica condizione iniziale $y(-1)$;

ii) la risposta impulsiva del sistema;

iii) la risposta in evoluzione forzata del sistema in corrispondenza alla successione di ingresso $u(t) = (1 - 2^t)\delta_{-1}(t)$.