

3° COMPITINO DI TEORIA DEI SISTEMI 13 Gennaio 2000

Esercizio 1. Si consideri il sistema a tempo discreto

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} x(t) \\ y(t) &= Hx(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t). \end{aligned}$$

- i) Si progetti, se possibile, uno stimatore dead-beat in catena chiusa (di ordine intero) che faccia uso della sola prima uscita e il cui errore di stima vada a zero nel minimo numero di passi.
- ii) Si progetti, se possibile, uno stimatore in catena chiusa (di ordine intero) in modo tale che l'errore di stima $e(t) := x(t) - \hat{x}(t)$ si comporti asintoticamente come $1/2^t$.

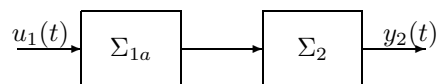
Esercizio 2. Si considerino le seguenti funzioni di trasferimento razionali:

$$w_{1a}(z) = \frac{z-1}{z(z+2a)} \quad w_2(z) = \frac{z+1/2}{z(z+1)}$$

con a parametro reale.

- i) Per ogni valore del parametro a , si determini un sistema dinamico lineare a tempo discreto Σ_{1a} che sia realizzazione minima della $w_{1a}(z)$, e si determini un sistema dinamico lineare a tempo discreto Σ_2 che sia realizzazione minima della $w_2(s)$.

Supponendo che i sistemi Σ_{1a} e Σ_2 vengano connessi in cascata come mostrato in figura



- ii) si studi, al variare di a in \mathbb{R} , raggiungibilità ed osservabilità del sistema serie.

Teoria 1. Si dimostri che, detto $\Sigma = (F, G, H)$ un generico sistema dinamico di dimensione n , sia nel caso in cui esso sia raggiungibile che nel caso in cui esso sia non raggiungibile, esiste una retroazione dallo stato K di modo tale che il risultante sistema retroazionato $\Sigma_K = (F + GK, G, H)$ risulti BIBO stabile.

Teoria 2. Sia $\Sigma = (F, G, H)$ un sistema dinamico a tempo continuo di dimensione n e sia \mathcal{O} la matrice di osservabilità del sistema, ovvero

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ \vdots \\ HF^{n-1} \end{bmatrix}.$$

Si dimostri che, per ogni $t \geq 0$, il sottospazio non osservabile relativo all'intervallo $[0, t]$, $X_{[0,t]}^{no}$, coincide con $\ker \mathcal{O}$.

SOLUZIONI

Esercizio 1. i) [6 punti] È immediato verificare che la coppia (F, h_1) , dove h_1 rappresenta la prima riga della matrice H , è in forma standard di osservabilità. Di conseguenza, l'unico autovalore del sottosistema non osservabile risulta 0, e quindi esiste uno stimatore dead-beat ottenuto a partire dalla sola prima uscita. Se indichiamo la matrice l_1 dello stimatore dalla prima uscita nella forma $l_1 = [a \ b \ c]^T$, allora per avere uno stimatore dead-beat è sufficiente imporre

$$\Delta_{F+l_1h_1}(z) = \det \left(zI_3 - \begin{bmatrix} 1+a & 2+a & 0 \\ 2+b & b & 0 \\ 1+c & c-1 & 0 \end{bmatrix} \right) \equiv z^3.$$

Si trova $\Delta_{F+l_1h_1}(z) = z^2 - (1+a+b)z + [b(1+a) - (2+a)(2+b)]$ e quindi $a = -3$, $b = 2$ e c arbitrario. Andiamo ora a scegliere c in modo tale da minimizzare l'indice di nilpotenza della matrice $F + l_1h_1$. Chiaramente per i valori di a e b sopra indicati la matrice $F + l_1h_1$ è diversa dalla matrice nulla, e quindi l'indice di nilpotenza minimo sarà maggiore o uguale a 2. Calcolando $(F + l_1h_1)^2$ per $a = -3$, $b = 2$ e c arbitrario otteniamo:

$$(F + l_1h_1)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2c-6 & c-3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pertanto è immediato verificare che per $c = 3$ la matrice $F + l_1h_1$ ha indice di nilpotenza 2, mentre per $c \neq 3$ essa ha indice di nilpotenza 3. La soluzione cercata pertanto è $l_1 = [-3 \ 2 \ 3]^T$.

ii) [6 punti] Affinchè l'errore di stima dello stimatore, la cui dinamica è governata dall'equazione $e(t+1) = (F + LH)e(t)$, $t \geq 0$, si comporti asintoticamente come $\frac{1}{2^t}$, è sufficiente che la matrice $F + LH$ abbia due autovalori di modulo minore di 1/2 e un autovalore (reale e semplice, e quindi dominante) in 1/2. È immediato rendersi conto che anche la coppia (F, H) si trova in forma standard di osservazione, e quindi l'unico autovalore del sottosistema non osservabile è ancora 0. Se attribuiamo alla matrice $F + LH$ lo spettro $(0, 0, 1/2)$, ad esempio, siamo in grado di risolvere il problema. A tal fine è sufficiente scegliere

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

e imporre

$$F + LH = \begin{bmatrix} 1+l_{11} & 2+l_{11}+l_{12} & 0 \\ 2+l_{21} & l_{21}+l_{22} & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si trova, allora $l_{11} = -1$, $l_{12} = 0$, $l_{21} = -2$ e $l_{22} = 3/2$.

Esercizio 2. i) [4 punti] Poichè nel caso di funzioni razionali scalari strettamente proprie, la dimensione minima di realizzazione coincide con il grado del polinomio che compare al denominatore in una qualunque rappresentazione irriducibile della funzione di trasferimento, andiamo a verificare per quali valori del parametro a la rappresentazione data per $w_{1,a}(z)$ risulta riducibile. È immediato verificare che la rappresentazione risulta irriducibile se e solo se i fattori $z - 1$ e $z + 2a$ non si semplificano tra di loro, ovvero se e solo se $a \neq -1/2$. Pertanto, per $a \neq -1/2$ la rappresentazione è irriducibile, la realizzazione minima ha dimensione 2 e posso sceglierla, ad esempio, in forma canonica di controllo, ovvero:

$$\Sigma_{1,a} = (F_{1,a}, g_{1,a}, H_{1,a}) = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, [-1 \ 1] \right).$$

Per $a = -1/2$, invece, $w_{1a}(z)$ diventa $1/z$ e quindi ammette come realizzazione minima

$$\Sigma_{1,-1/2} = (F_{1,-1/2}, g_{1,-1/2}, H_{1,-1/2}) = (0, 1, 1).$$

Invece la rappresentazione data per la $w_2(z)$, non dipendendo dal parametro a , risulta sempre irriducibile, ed una sua realizzazione minima (di dimensione pari al grado del denominatore nella rappresentazione data) ha grado 2. Scegliendo, ancora una volta, una realizzazione in forma canonica di controllo, otteniamo

$$\Sigma_2 = (F_2, g_2, H_2) = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, [1/2 \quad 1] \right).$$

ii) [4 punti] Poiché le realizzazioni con cui operiamo sono sempre minime, e quindi sia raggiungibili che osservabili, al fine di valutare raggiungibilità ed osservabilità del sistema serie occorre e basta valutare che non subentrino cancellazioni incrociate. Più precisamente, si tratta di valutare, ai fini della raggiungibilità del sistema serie, che non ci siano cancellazioni tra $H_{1,a} \text{adj}(zI - F_{1,a})g_{1,a}$ e $\Delta_{F_2}(z)$ (con a che varia in \mathbb{R}), e, ai fini della osservabilità del sistema serie, che non ci siano cancellazioni tra $H_2 \text{adj}(zI - F_2)g_2$ e $\Delta_{F_{1,a}}(z)$ (con a che varia in \mathbb{R}). Per $a = -1/2$ si trova $H_{1,-1/2} \text{adj}(zI - F_{1,-1/2})g_{1,-1/2} = 1$, che certamente non può presentare cancellazioni con nessun polinomio. Di conseguenza, per $a = -1/2$ il sistema serie è raggiungibile. Per $a \neq -1/2$ si trova $H_{1,a} \text{adj}(zI - F_{1,a})g_{1,a} = z - 1$, che non presenta cancellazioni con $\Delta_{F_2}(z) = z(z + 1)$. Di conseguenza, anche per $a \neq -1/2$ il sistema serie è raggiungibile. Infine, $H_2 \text{adj}(zI - F_2)g_2 = z + 1/2$ per ogni a , mentre per $a = -1/2$ abbiamo $\Delta_{F_{1,-1/2}}(z) = z$ e per $a \neq -1/2$ abbiamo $\Delta_{F_{1,a}}(z) = z(z + 2a)$. Si vede allora subito che per $a = -1/2$ non ci sono cancellazioni, e per $a \neq -1/2$ si ha una cancellazione se e solo se $z + 2a = z + 1/2$, ovvero $a = 1/4$. Di conseguenza, il sistema è osservabile per ogni $a \neq 1/4$.

Teoria 1. [6 punti] Se il sistema è raggiungibile allora, banalmente, attraverso retroazione dallo stato posso allocare liberamente tutti gli autovalori della matrice $F + GK$, in particolare, posso fare sì che $F + GK$ sia asintoticamente stabile e quindi, a maggior ragione, Σ_K risulti BIBO stabile. Se il sistema non è raggiungibile, e ipotizzo, senza perdita di generalità, che esso sia in forma standard di raggiungibilità, allora sappiamo che attraverso retroazione dallo stato, con una generica matrice di retroazione $K = [K_1 \quad K_2]$, ottengo un sistema Σ_K che è a sua volta in forma standard di raggiungibilità e la cui matrice $F_{11} + G_1 K_1$, relativa al sottosistema raggiungibile ha autovalori arbitrari. In particolare, posso far sì che essa sia asintoticamente stabile. Poiché la matrice di trasferimento del sistema Σ_K coincide con la matrice di trasferimento del solo sottosistema raggiungibile, ne consegue che la matrice di trasferimento di Σ_K ha solo poli nella regione di asintotica stabilità. Pertanto Σ_K risulta BIBO stabile.

Teoria 2. [4 punti] Si veda il testo “Appunti di Teoria dei Sistemi” di E.Fornasini, G.Marchesini, capitolo sull’osservabilità.