COMPITO DI TEORIA DEI SISTEMI
21 Settembre 1999

Esercizio 1. Si consideri il seguente sistema dinamico non lineare a tempo continuo:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= a x_1(t) - x_1^3(t) + x_2^2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -2a^2 x_2(t) - 2x_1(t)x_2(t), \qquad t \geq 0, \end{aligned}$$

dove a é un parametro reale.

i) Determinare, al variare di a in $\mathbb{R}$, i punti di equilibrio del sistema.

ii) Si studi, al variare di a in $\mathbb{R}$, la stabilità dell'equilibrio nell'origine attraverso il metodo di linearizzazione, e,

iii) nei casi critici, si studi la stabilità dell'equilibrio nell'origine attraverso la seguente famiglia di funzioni: $V_k(x_1, x_2) = x_1^2 + \frac{k}{2}\, x_2^2$, con $k \in \mathbb{R}$.

Esercizio 2. Si consideri il seguente sistema dinamico lineare a tempo continuo:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Fx(t) + gu(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= Hx(t) = [\,1 \quad 1 \quad 0\,]\, x(t), \qquad t \geq 0. \end{aligned}$$

i) Si determini, se possibile, un controllo in retroazione in modo tale che il risultante sistema retroazionato sia BIBO stabile;

ii) si determini, se possibile, un controllo in retroazione in modo tale che il risultante sistema abbia solo i modi e^{-2t} e te^{-2t}.

Esercizio 3. Dato il sistema a tempo discreto

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + gu(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= Hx(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} x(t), \end{aligned}$$

i) si costruisca, se possibile, uno stimatore dead-beat di ordine ridotto per il sistema;

ii) si costruisca, se possibile, uno regolatore per il sistema, in modo tale che il sistema risultante, ottenuto dalla connessione di sistema e regolatore, abbia come unico autovalore -3.

Teoria 1. Sia $\Sigma = (F, G, H)$ un sistema dinamico lineare di dimensione n. Si dimostri che se Σ é un sistema raggiungibile, allora la matrice $[\, sI_n - F \quad | \quad G\,]$ ha rango pieno n per ogni $s \in \mathbb{C}$.

Teoria 2. Sia $\Sigma = (F, G, H)$ un sistema dinamico lineare a tempo continuo di dimensione 6, avente come matrice del sistema

$$F = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & & & & \\ 0 & \lambda_1 & & & & \\ & & \lambda_2 & 1 & & \\ & & 0 & \lambda_2 & & \\ & & & & \lambda_3 & \\ & & & & & \lambda_3 \end{bmatrix},$$

dove λ_1, λ_2 e λ_3 sono parametri a valori reali.

i) Si determinino, al variare di λ_1, λ_2 e λ_3, i modi del sistema.

ii) Si determinino, al variare di λ_1, λ_2 e λ_3, il numero minimo $p^* = p^*(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, di uscite necessarie per rendere osservabile il sistema.