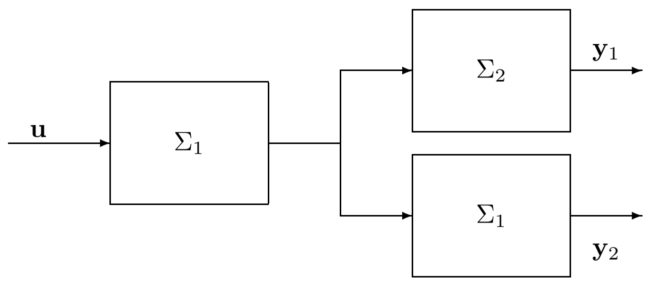
COMPITO DI TEORIA DEI SISTEMI
1 Marzo 1999

Esercizio 1. Si considerino le funzioni di trasferimento razionali scalari

$$w_1(s) = \frac{s+1}{s^2+3s} \qquad w_2(s) = \frac{s-2}{s^2-1}.$$

i) Si determinimo due sistemi a tempo continuo, $\Sigma_1 = (F_1, g_1, H_1)$ e $\Sigma_2 = (F_2, g_2, H_2)$, che siano realizzazioni minime rispettivamente di w_1 e w_2.

Si consideri il sistema Σ, ottenuto dalla connessione dei sistemi Σ_1 e Σ_2 come illustrato in figura.



ii) Si discuta raggiungibilità ed osservabilità di Σ.

iii) Si discuta l'esistenza di controllori stabilizzanti e l'esistenza di stimatori asintotici per Σ.

Esercizio 2. Si consideri il sistema a tempo continuo

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= ax_1(t) + x_1^2(t)[x_2(t) - 2x_1(t)]\\ \dot{x}_2(t) &= ax_2(t) + 1/4x_1^2(t)[x_1(t) - 2x_2(t)],\end{aligned}$$

con a parametro reale.

i) Si studi, al variare di a, la stabilità dell'equilibrio nell'origine facendo uso della tecnica di linearizzazione, ove possibile.

ii) Nei casi critici determinati al punto precedente, si studi la stabilità facendo uso della funzione $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$.

Esercizio 3. Si consideri il seguente sistema dinamico lineare a tempo continuo, descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned}\dot{x}_(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ a^2-1 & -2a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} x(t), \qquad\qquad t \geq 0,\end{aligned}$$

con a parametro reale. Si discuta, al variare di a, la stabilità interna (semplice e asintotica) del sistema.

Teoria 1. Sia $\dot{x}(t) = f(x(t))$, $t \geq 0$, un sistema non lineare a tempo continuo di dimensione n, avente l'origine come punto di equilibrio. Sia V una funzione di classe C^1 e definita positiva, definita in un intorno aperto W di 0 in $\mathbb{R}^n$ e a valori in $\mathbb{R}$. Si dimostri che se $\dot{V} := \frac{\partial V}{\partial x} f(x)$ é semidefinita negativa, allora l'origine é punto di equilibrio (almeno) semplicemente stabile per il sistema.

Teoria 2. Si consideri il sistema a tempo discreto $\Sigma = (F, G, H)$, di dimensione $n = 5$, con

$$F = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & & & \\ & \lambda_1 & & & \\ & & \lambda_2 & 1 & \\ & & & \lambda_2 & \\ & & & & \lambda_3 \end{bmatrix}.$$

i) Nel caso

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

si dimostri che Σ é raggiungibile se e solo se $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

ii) Nel caso $\lambda_1 = \lambda_2$, si determini per quali valori di λ_3 esiste una matrice $\tilde{G} \in \mathbb{R}^{5\times 2}$ tale che il sistema Σ risulta raggiungibile e la si scriva esplicitamente.