Esercizi di Controlli Automatici - 1
A.A. 2009/10

Esercizio 1. Si consideri il sistema dinamico a tempo continuo descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{1}{3}u(t), \qquad t \in \mathbb{R}_+.$$

i) Si determinino le radici dell'equazione caratteristica.

ii) Si determini l'espressione dell'evoluzione libera del sistema a partire dalle condizioni inziali

$$y(0^-) = 1 \qquad \frac{dy(0^-)}{dt} = 2.$$

iii) Si determini la risposta impulsiva del sistema.

iv) Si determini la risposta di evoluzione forzata del sistema in corrispondenza all'ingresso $u(t) = (1+t)\ \delta_{-1}(t)$.

Esercizio 2. Si consideri il sistema dinamico a tempo continuo descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + 2\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} = \frac{du(t)}{dt}, \qquad t \in \mathbb{R}_+.$$

i) Si determinino le radici dell'equazione caratteristica.

ii) Si determini l'espressione dell'evoluzione libera del sistema a partire dalle condizioni inziali

$$y(0^-) = 1 \qquad \frac{dy(0^-)}{dt} = 2 \qquad \frac{d^2y(0^-)}{dt^2} = 0.$$

iii) Si determini la risposta impulsiva del sistema.

iv) Si determini la risposta di evoluzione forzata del sistema in corrispondenza all'ingresso $u(t) = \delta(t) - e^{-2t}\ \delta_{-1}(t)$.

Esercizio 3. Si consideri il sistema dinamico a tempo continuo descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\frac{dy(t)}{dt} + 5y(t) = \frac{du(t)}{dt} + u(t), \qquad t \in \mathbb{R}_+.$$

i) Si determini l'espressione dell'evoluzione libera del sistema a partire dalle condizioni inziali

$$y(0^-) = 1 \qquad \frac{dy(0^-)}{dt} = 1.$$

ii) Si determini la risposta impulsiva del sistema.

iii) Si calcoli l'uscita del sistema in corrispondenza all'ingresso $u(t) = \delta(t) - 3\delta_{-1}(t-1)$.

Esercizio 4. Si consideri il sistema dinamico a tempo continuo descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3a\frac{dy(t)}{dt} + 2a^2y(t) = \frac{du(t)}{dt} + u(t), \qquad t \in \mathbb{R}_+,$$

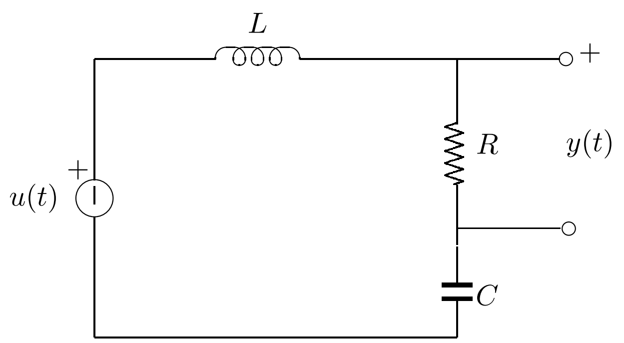
con a parametro reale.

i) Si determinino, al variare di a in $\mathbb{R}$, i modi elementari del sistema e se ne studi il carattere.

ii) Si determinino, al variare di a in $\mathbb{R}$, le condizioni iniziali a cui corrisponde un evoluzione libera di tipo puramente esponenziale (i.e., $y_\ell(t) = y(0^-)e^{\lambda t}$).

iii) Si determini, al variare di a in $\mathbb{R}$, la risposta impulsiva del sistema.

Esercizio 5. Si consideri la seguente rete elettrica lineare, comandata in tensione.



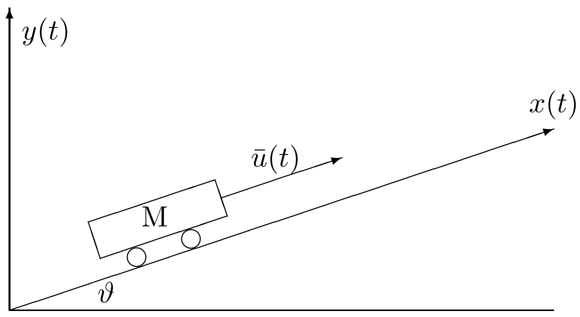
Sia $u(t)$ la tensione imposta dal generatore e $y(t)$ la caduta di tensione ai capi del resistore.

i) Determinare un modello ingresso/uscita che descriva il funzionamento della rete.

ii) Si studi, al variare dei parametri R, L e C il carattere dei modi.

iii) Si determini l'espressione della risposta impulsiva del sistema nel caso particolare in cui $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$.

Esercizio 6. Un carrellino di massa M viene trainato su una strada di montagna di pendenza ϑ con una forza $\bar{u}(t)$, come illustrato in figura.



Siano $x(t)$ e $y(t)$, rispettivamente, la posizione lungo la strada di montagna e la quota del carrellino al tempo t, avendo assunto come origine del sistema di riferimento il punto di inizio della salita. Indichiamo, infine, con ν il coefficiente di attrito al moto.

i) Si determini un modello ingresso/uscita descrittivo della dinamica del sistema.

ii) Si determini l'evoluzione del sistema in corrispondenza alle condizioni iniziali

$$y(0^-) = 0 \text{ (metri)} \qquad \text{e} \qquad \frac{dy(0^-)}{dt} = 1 \text{ (metri/secondo)},$$

e alla sollecitazione in ingresso

$$\bar{u}(t) = mg \sin\vartheta, \qquad t \in \mathbb{R}_+.$$

Esercizio 7. Si consideri il sistema dinamico a tempo continuo descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = u(t), \qquad t \in \mathbb{R}_+,$$

con a parametro reale.
Si determini per quale valore di a in $\mathbb{R}$ il sistema presenta, tra le sue evoluzioni libere, un'evoluzione del tipo

$$y_\ell(t) = 5e^{-t}\cos t,$$

e per tale valore di a si determini il valore delle condizioni iniziali che corrisponde a quella specifica evoluzione.

Soluzioni numeriche di alcuni esercizi

Esercizio 1. i) $\lambda_1 = -1, \mu_1 = 1, \lambda_2 = -2, \mu_2 = 1.$
ii) $y_\ell(t) = 4e^{-t} - 3e^{-2t}, t \geq 0.$
iii) $w(t) = \frac{1}{3}\ (e^{-t} - e^{-2t})\ \delta_{-1}(t).$
iv) $y_f(t) = -\frac{1}{12}\ \delta_{-1}(t) + \frac{1}{6}\ t\ \delta_{-1}(t) + \frac{1}{12}\ e^{-2t}\delta_{-1}(t).$

Esercizio 2. i) $\lambda_1 = -1, \mu_1 = 2, \lambda_2 = 0, \mu_2 = 1.$
ii) $y_\ell(t) = -4e^{-t} - 2t\ e^{-t} + 5, t \geq 0.$
iii) $w(t) = t\ e^{-t}\ \delta_{-1}(t).$
iv) $y_f(t) = (e^{-t} - e^{-2t})\ \delta_{-1}(t).$

Esercizio 3. i) $y_\ell(t) = e^{-t}\cos(2t) + e^{-t}\sin(2t), t \geq 0.$
iii) $w(t) = e^{-t}\cos(2t)\ \delta_{-1}(t).$
iii) $y_f(t) = e^{-t}\cos(2t)\ \delta_{-1}(t) - 3\Big[\frac{1}{5}\ \delta_{-1}(t-1) - \frac{1}{5}e^{-(t-1)}\cos(2(t-1))\ \delta_{-1}(t-1) + \frac{2}{5}e^{-(t-1)}\sin(2(t-1))\ \delta_{-1}(t-1)\Big].$