II^o COMPITINO DI TEORIA DEI SISTEMI
7 Dicembre 2000

Esercizio 1. Si consideri il seguente sistema dinamico non lineare a tempo continuo:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -x_1(t) + x_1(t)[x_1(t) + x_2^2(t)]\\ \dot{x}_2(t) &= 2x_1(t) - x_1^2(t) - \frac{1}{2}x_2(t) - 2x_2^2(t), \qquad t \geq 0.\end{aligned}$$

i) Si studi la stabilità dell'equilibrio nell'origine attraverso il metodo di linearizzazione.

ii) Si costruisca una funzione (di Lyapunov) quadratica con cui sia possibile studiare la stabilità nell'origine secondo il criterio di Lyapunov.

Esercizio 2. Si consideri il seguente sistema dinamico lineare a tempo discreto:

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} u(t) = Fx(t) + Gu(t).$$

i) Si progetti, se possibile, un controllo in retroazione dal solo primo ingresso che attribuisca al risultante sistema retroazionato il polinomio caratteristico $z^2(z+1)$.

ii) Si progetti, se possibile, un controllo in retroazione dal solo secondo ingresso che attribuisca al risultante sistema retroazionato il polinomio caratteristico z^3.

Le risposte precedenti vanno adeguatamente giustificate, con ciò intendendo che sia nel caso in cui il controllore esista (e prima del calcolo esplicito della matrice di controllo) sia nel caso in cui non esista devono essere fornite le motivazioni teoriche per affermare l'esistenza o la non esistenza di tale controllore.

iii) Si progetti un controllo in retroazione che faccia uso di entrambi gli ingressi e attribuisca al risultante sistema retroazionato il polinomio caratteristico $(z+1)^3$.

Teoria 1. Sia $\Sigma = (F, G, H)$ un sistema dinamico lineare di dimensione n. Si dimostri che se la matrice $[\, sI_n - F \;\; | \;\; G\,]$ ha rango pieno n per ogni $s \in \mathbb{C}$, allora Σ è un sistema raggiungibile.

Teoria 2. Si consideri il seguente sistema a tempo discreto:

$$x(t+1) = Fx(t) + gu(t) = \begin{bmatrix} a+1 & & \\ & a^2-1 & \\ & & a \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix} u(t),$$

dove a è un parametro reale e g_1, g_2, g_3 sono tre numeri reali non nulli.

i) Si studino, al variare di a in $\mathbb{R}$, la raggiungibilità e la controllabilità a zero del sistema.

ii) Per ogni valore di a per cui il sistema risulta controllabile a zero, ma non raggiungibile, si determini, se possibile, un controllo in retroazione dallo stato che renda la risultante matrice del sistema retroazionato nilpotente.

SOLUZIONI

Esercizio 1. i) [2 punti] Linearizzando il sistema in un intorno dell'origine, si trova che la matrice del sistema linearizzato è

$$F = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=0} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

è perciò immediato verificare che essa ha tutti gli autovalori in $\mathrm{Re}(s) < 0$. Ciò assicura la stabilità asintotica dell'equilibrio nell'origine.

ii) [4 punti] È sufficiente impostare un'equazione di Lyapunov per il sistema linearizzato di matrice F, scegliendo ad esempio come matrice Q l'identità. Si ha allora la seguente equazione:

$$-I_2 = F^T P + PF = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

La soluzione di questa equazione porta a $p_1 = 19/6, p_2 = 4/3, p_3 = 1$ e $V(x_1, x_2) = p_1 x_1^2 + 2p_2 x_1 x_2 + p_3 x_2^2 = \frac{19}{6} x_1^2 + \frac{8}{3} x_1 x_2 + x_2^2$ è la funzione cercata, come provato nella dimostrazione del criterio ridotto di Lyapunov. Si noti che per il sistema di partenza la $\dot{V}(x_1, x_2)$ non è $-x^T Q x$.

Esercizio 2. i) [4 punti] Se osserviamo la coppia (F, g_1), dove g_1 è la prima colonna di G, è immediato verificare che tale coppia è raggiungibile, dal momento che la matrice di raggiungibilità della coppia, i.e.

$$\mathcal{R}_1 = [\, g_1 \quad | \quad F g_1 \quad | \quad F^2 g_1 \,] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

è quadrata e non singolare. Pertanto esiste la matrice di retroazione k_1 che attribuisce alla matrice $F + g_1 k_1$ del risultante sistema retroazionato il polinomio caratteristico richiesto. Se pongo $k_1 = [\, a \quad b \quad c \,]$, considero il polinomio caratteristico della matrice

$$F + g_1 k_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ a & b & c \end{bmatrix},$$

ovvero $\Delta_{F+g_1k_1}(z) = z^3 - cz^2 - (b+2)z + (2c - a)$, e impongo $\Delta_{F+g_1k_1}(z) \equiv z^2(z+1) = z^3 + z^2$, ottengo $c = -1, b = -2$ e $a = -2$. In altre parole, $k_1 = [\, -2 \quad -2 \quad -1 \,]$.

ii) [4 punti] Considero la coppia (F, g_2), dove g_2 è la seconda colonna di G. È immediato verificare che il sistema si trova in forma standard di raggiungibilità, dal momento che ha la struttura appropriata e la coppia

$$(F_{11}, g_1^2) = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

è raggiungibile. Poichè la matrice F_{22} del sottosistema non raggiungibile è la matrice nulla di dimensione 1, e quindi $\Delta_{F_{22}}(z) = z$ divide il polinomio caratteristico assegnato

z^3, ne consegue che il problema ha soluzione. Vista la natura sparsa della matrice del sistema ed il fatto che g_2 è il secondo vettore della base canonica, è immediato verificare che per $k_2 = [\,-2 \quad 0 \quad 0\,]$, si ha

$$F + g_2 k_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

che è nilpotente e quindi ha polinomio caratteristico z^3.

iii) [3 punti] Sia

$$K = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \end{bmatrix}.$$

Si vede a occhio che imponendo ad $F+GK$ di essere in forma compagna, con polinomio caratteristico pari a $(z+1)^3 = z^3 + 3z^2 + 3z + 1$, ovvero

$$F + GK = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2+b_0 & b_1 & 1+b_2 \\ a_0 & a_1 & a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -3 \end{bmatrix},$$

si trova

$$K = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -3 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tale matrice di controllo in retroazione ovviamente coinvolge entrambi gli ingressi.

Teoria 1. [6 punti] Si veda il testo "Appunti di Teoria dei Sistemi", di E.Fornasini e G.Marchesini, pag.219 e successive.

Teoria 2. i) [5 punti] È noto che un sistema ad un solo ingresso, con la matrice F diagonale e la matrice g a componenti tutte diverse da zero è raggiungibile se e solo se gli elementi diagonali sono tutti distinti. Si tratta allora di andare ad escludere quei valori di $a \in \mathbb{R}$ per cui due o più degli elementi diagonali coincidono. Chiaramente $a \neq a+1$ per ogni a, per cui cerchiamo se esistono soluzioni reali alle equazioni

$$a + 1 = a^2 - 1 \qquad \text{e} \qquad a^2 - 1 = a.$$

La prima si riscrive $a^2 - a - 2 = (a-2)(a+1)$, ed ha soluzioni reali $a = -1$ e $a = 2$. La seconda diventa $a^2 - a - 1 = 0$, ed ha soluzioni $(1 \pm \sqrt{5})/2$. Pertanto, il sistema è raggiungibile per ogni valore reale di a ad eccezione di $a = -1, 2, (1 \pm \sqrt{5})/2$.

Per i valori di a per cui è raggiungibile è pure controllabile. Valutiamo, allora, per i rimanenti valori di a se il sistema è controllabile a zero.

Per $a = -1$ la matrice del sistema diventa

$$F = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & -1 \end{bmatrix},$$

ed è immediato verificare che

$$\operatorname{Im} F^3 = \operatorname{Im} \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & -1 \end{bmatrix} \subseteq \operatorname{Im}\mathcal{R} = \operatorname{Im} \begin{bmatrix} g_1 & 0 & 0 \\ g_2 & 0 & 0 \\ g_3 & -g_3 & g_3 \end{bmatrix}.$$

Pertanto il sistema è controllabile.

Per $a = 2$ la matrice del sistema diventa

$$F = \begin{bmatrix} 3 & & \\ & 3 & \\ & & 2 \end{bmatrix},$$

ed è quindi non singolare. ma poichè, per F non singolare, controllabilità e raggiungibilità diventano equivalenti, posso subito dire che il sistema non è controllabile a zero. Similmente, per gli altri due valori critici, la F diventa non singolare e quindi, non essendo raggiungibile, il sistema non può nemmeno essere controllabile.

ii) [3 punti] È immediato verificare che l'unico caso da prendere in considerazione è il caso $a = -1$. Applicando $k = [\,0 \quad 0 \quad \frac{1}{g_3}\,]$ è immediato verificare che

$$\begin{aligned} F + gK &= \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dfrac{1}{g_3} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & & \dfrac{g_1}{g_3} \\ & 0 & \dfrac{g_2}{g_3} \\ & & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

risulta nilpotente.