

### III° COMPITINO DI TEORIA DEI SISTEMI 23 Gennaio 2001

**Esercizio 1.** Si consideri il seguente sistema dinamico lineare a tempo discreto:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) \\ y(t) &= Hx(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} x(t), \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

- i) Progettare, se possibile, uno stimatore dead beat dello stato, a partire dalla sola prima uscita, in modo tale che l'errore di stima vada a zero in al più due passi.
- ii) Progettare, se possibile, uno stimatore dead beat dello stato in modo tale che l'errore di stima vada a zero nel minimo numero di passi.

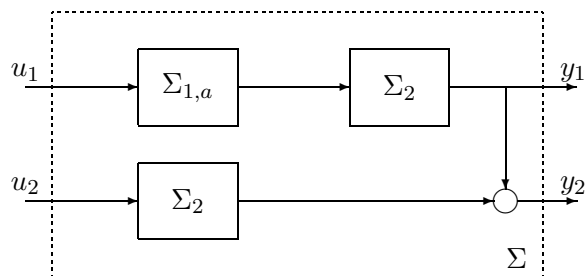
**Esercizio 2.** Si considerino le due funzioni di trasferimento

$$w_{1,a}(s) = \frac{s+a}{s^2+(a+1)s+(2a-2)} \quad w_2(s) = \frac{s-1}{(s+2)(s+1)},$$

dove  $a$  è un parametro reale.

- i) Si determinino, al variare di  $a$  in  $\mathbb{R}$ , due sistemi a tempo continuo  $\Sigma_{1,a} = (F_{1,a}, g_{1,a}, H_{1,a})$  e  $\Sigma_2 = (F_2, g_2, H_2)$  che siano realizzazioni minime rispettivamente di  $w_{1,a}(s)$  e di  $w_2(s)$ .

Si consideri il seguente sistema dinamico  $\Sigma$ , ottenuto dalla connessione di  $\Sigma_{1,a}$  e di due copie di  $\Sigma_2$ , come mostrato in figura.



- ii) Si studi, al variare di  $a$ , la raggiungibilità e l'osservabilità di  $\Sigma$ .
- iii) Si studi, al variare di  $a$ , la stabilità BIBO di  $\Sigma$ .

**Teoria 1.** Siano  $\Sigma_1 = (F_1, G_1, H_1)$  e  $\Sigma_2 = (F_2, G_2, H_2)$  due realizzazioni raggiungibili e osservabili della medesima matrice di trasferimento (razionale propria)  $W$ . Si dimostri che tali sistemi hanno la medesima dimensione.

**Teoria 2.** Sia  $\Sigma = (F, g, H)$  un sistema dinamico a tempo continuo, di dimensione 4, ad un ingresso ed un'uscita. Supponiamo inoltre che

$$\begin{aligned}H \operatorname{adj}(sI - F)g &= p(s) \\ \Delta_F(s) &= s^4 - s \cdot p(s) - 1\end{aligned}$$

dove  $p(s) \in \mathbb{R}[s]$  è un polinomio monico di grado 2.

- i) Si dimostri che  $\Sigma$  è raggiungibile ed osservabile se e solo se  $p(s)$  non ha come zero una radice quarta dell'unità.
- ii) Si dimostri che per nessuna scelta di  $p(s)$  il sistema  $\Sigma$  può essere asintoticamente stabile.

## SOLUZIONI

**Esercizio 1.** i) [2 punti] È immediato rendersi conto del fatto che la coppia  $(F, h_1)$ , dove  $h_1$  rappresenta la prima riga della matrice  $H$ , è una coppia osservabile e in forma canonica di osservabilità, giacché  $F^T$  è in forma compagna e  $h_1^T$  è l'ultimo vettore della base canonica. Pertanto, per ogni scelta della matrice  $L_1$  dello stimatore (dalla sola prima uscita), la matrice  $F + L_1 h_1$ , che regola la dinamica dell'errore di stima, sarà ciclica. Di conseguenza, non esiste uno stimatore dead beat dalla sola prima uscita che renda la matrice  $F + L_1 h_1$  nilpotente con indice di nilpotenza 2.

ii) [4 punti] Consideriamo la coppia  $(F, H)$  e la sua versione duale  $(F^T, H^T)$ . La coppia  $(F^T, H^T)$  è raggiungibile, con indici di Kronecker  $k_1 = 2$  e  $k_2 = 1$ . Pertanto, per il Teorema di Rosembrock, esiste una matrice  $K$  in modo tale che  $F^T + H^T K$  sia nilpotente con indice di nilpotenza 2 e tale indice di nilpotenza è il minimo possibile. Si vede a occhio che imponendo alla matrice  $F^T + H^T K$  la seguente struttura

$$F^T + H^T K = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

si ottiene il risultato desiderato. Ciò avviene per

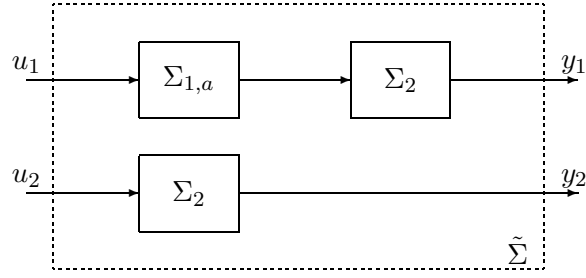
$$K = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Prendendo  $L = K^T$  abbiamo risolto il nostro problema.

**Esercizio 2.** i) [3 punti] La rappresentazione di  $w_2(s)$  è irriducibile e quindi la dimensione minima di realizzazione è pari a 2. Invece, nel caso di  $w_{1,a}(s)$ , la rappresentazione è irriducibile per ogni valore di  $a$  all'infuori di  $a = 2$ , valore di  $a$  per cui il numeratore  $s + a$  si semplifica con il denominatore dando luogo a  $w_{1,2}(s) = \frac{1}{s+1}$ , e quindi la realizzazione minima ha dimensione 1. In tutti gli altri casi, la dimensione minima di realizzazione è pari a 2. Ricorrendo a delle realizzazioni in forma canonica di controllo otteniamo:

$$\begin{aligned} \Sigma_{1,a} &= (F_{1,a}, g_{1,a}, H_{1,a}) = \left( \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2-2a & -a-1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, [a \quad 1] \right) \quad \text{per } a \neq 2 \\ \Sigma_{1,2} &= (F_{1,2}, g_{1,2}, H_{1,2}) = (-1, 1, 1) \\ \Sigma_2 &= (F_2, g_2, H_2) = \left( \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, [-1 \quad 1] \right). \end{aligned}$$

ii) [7 punti] Dal punto di vista della raggiungibilità (proprietà per cui il modo in cui sono prelevate le uscite dal sistema complessivo è irrilevante), il sistema  $\Sigma$  è equivalente al seguente sistema:



Pertanto  $\Sigma$  è raggiungibile se e solo se sono verificate simultaneamente queste due condizioni: 1) la serie di  $\Sigma_{1,a}$  e  $\Sigma_2$  (nell'ordine) è raggiungibile; 2)  $\Sigma_2$  è raggiungibile. Poichè  $\Sigma_{1,a}$  e  $\Sigma_2$  sono realizzazioni minime, e quindi raggiungibili, 1) e 2) sono simultaneamente verificate se e solo se non subentrano cancellazioni tra  $H_{1,a}\text{adj}(sI - F_{1,a})g_{1,a}$  e  $\Delta_{F_2}(s) = (s+1)(s+2)$ .

Per  $a = 2$ ,  $H_{1,a}\text{adj}(sI - F_{1,a})g_{1,a} = 1$  e quindi non ci sono cancellazioni.

Per  $a \neq 2$ ,  $H_{1,a}\text{adj}(sI - F_{1,a})g_{1,a} = s + a$  e quindi ci sono cancellazioni se e solo se  $a = 1$ . In definitiva,  $\Sigma$  è raggiungibile per ogni  $a \neq 1$ .

Dal punto di vista dell'osservabilità, il sistema  $\Sigma$  è ancora equivalente al sistema  $\tilde{\Sigma}$  della precedente figura. Infatti, si vede subito che la cascata di  $\Sigma_{1,a}$  e  $\Sigma_2$ , in alto, è del tutto indipendente dal blocco  $\Sigma_2$  in basso, dal p.d.v. dell'osservabilità. Per quanto riguarda il blocco sotto, poi, dalla conoscenza di  $y_1$  e  $y_2$  deduco subito, per differenza, l'uscita effettiva del blocco  $\Sigma_2$  in basso.

Pertanto, in definitiva,  $\Sigma$  è osservabile se e solo se sono verificate simultaneamente queste due condizioni: 1) la serie di  $\Sigma_{1,a}$  e  $\Sigma_2$  (nell'ordine) è osservabile; 2)  $\Sigma_2$  è osservabile. Poichè  $\Sigma_{1,a}$  e  $\Sigma_2$  sono realizzazioni minime, e quindi osservabili, 1) e 2) sono simultaneamente verificate se e solo se non subentrano cancellazioni tra  $H_2\text{adj}(sI - F_2)g_2 = s - 1$  e  $\Delta_{F_{1,a}}(s)$ .

Per  $a = 2$ ,  $\Delta_{F_{1,a}}(s) = s + 3$  e quindi non ci sono cancellazioni.

Per  $a \neq 2$ ,  $\Delta_{F_{1,a}}(s) = s^2 + (a+1)s + (2a-2)$  e quindi sono cancellazioni se e solo se esistono valori di  $a$  per cui 1 è zero di  $s^2 + (a+1)s + (2a-2)$ . Imponendo  $1 + (a+1)1 + (2a-2) = 0$  otteniamo  $a = 0$ . In definitiva,  $\Sigma$  è osservabile per ogni  $a \neq 0$ .

iii) [5 punti] La m.d.t. del sistema è

$$W(s) = \begin{bmatrix} w_2(s)w_{1,a}(s) & 0 \\ w_2(s)w_{1,a}(s) & w_2(s) \end{bmatrix}.$$

Pertanto,  $\Sigma$  è BIBO stabile se e solo se le due f.d.t.  $w_2(s)w_{1,a}(s)$  e  $w_2(s)$  hanno tutti i poli in  $\text{Re}(s) < 0$ . Chiaramente  $w_2(s)$  li ha. Consideriamo, ora, la funzione razionale  $w_2(s)w_{1,a}(s)$ . Per  $a = 2$  essa diventa

$$w_2(s)w_{1,a}(s) = \frac{(s-1)}{(s+3)(s+2)(s+1)}$$

e quindi ha tutti i poli nel semipiano sinistro aperto. Per  $a \neq 2$  abbiamo

$$w_2(s)w_{1,a}(s) = \frac{(s+a)(s-1)}{[s^2 + (a+1)s + (2a-2)](s+2)(s+1)}.$$

Certamente, in base alla regola dei segni di Cartesio, posso dire che per  $a > 1$  il polinomio al denominatore ha tutti gli zeri in  $\text{Re}(s) < 0$ , e quindi c'è stabilità BIBO. Si tratta allora di andare a vedere se per qualche  $a \leq 1$  si verificano delle cancellazioni tra  $s^2 + (a+1)s + (2a-2)$  e  $(s+a)(s-1)$  così che la risultante f.d.t. abbia tutti poli in  $\text{Re}(s) < 0$ . Abbiamo già visto che  $-a$  è zero di  $s^2 + (a+1)s + (2a-2)$  solo per  $a = 2$  e quindi per un valore esterno all'insieme di valori di  $a$  che stiamo esaminando. D'altra parte  $1$  è zero di  $s^2 + (a+1)s + (2a-2)$ , come abbiamo già visto, solo per  $a = 0$ . Per tale valore di  $a$ ,  $s^2 + (a+1)s + (2a-2)$  diventa  $s^2 + s - 2 = (s-1)(s+2)$ , pertanto per  $a = 0$

$$w_2(s)w_{1,a}(s) = \frac{s}{(s+2)^2(s+1)},$$

e quindi ha tutti i poli nel semipiano sinistro aperto.

In definitiva,  $\Sigma$  è BIBO stabile per ogni  $a \in \{0\} \cup (1, +\infty)$ .

**Teoria 1.** [5 punti] Si veda il testo “Appunti di Teoria dei Sistemi”, di E.Fornasini e G.Marchesini, pag. 324-325.

**Teoria 2.** i) [3 punti] Per quanto noto sulle realizzazioni minime di funzioni di trasferimento sclari,  $\Sigma$  è realizzazione minima (ovvero raggiungibile ed osservabile) della sua f.d.t. se e solo se  $H\text{adj}(sI - F)g = p(s)$  e  $\Delta_F(s) = s^4 - sp(s) - 1$  sono polinomi coprimi. Chiaramente in ogni punto  $\lambda \in \mathbb{C}$  tale che  $H\text{adj}(\lambda I - F)g = p(\lambda) = 0$  si ha  $\Delta_F(\lambda) = \lambda^4 - \lambda p(\lambda) - 1 = \lambda^4 - 1$ . Di conseguenza,  $\Delta_F(\lambda) = 0$  se e solo se  $\lambda$  è radice quarta di 1. Pertanto, si verificano delle cancellazioni tra  $H\text{adj}(sI - F)g$  e  $\Delta_F(s)$  se e solo se  $p(s)$  ha come zero una radice quarta dell'unità. In tutti gli altri casi,  $\Sigma$  è una realizzazione minima.

ii) [2 punti]  $\Sigma$  è asintoticamente stabile se e solo se tutti gli zeri di  $\Delta_F(s) = s^4 - sp(s) - 1$  si trovano in  $\text{Re}(s) < 0$ . Condizione necessaria perchè un polinomio abbia tutti gli zeri in  $\text{Re}(s) < 0$  è che abbia tutti i coefficienti di ugual segno e questo chiaramente non si verifica (il coefficiente conduttore è 1, mentre il termine noto è -1).