COMPITO DI TEORIA DEI SISTEMI
13 Luglio 2000

Esercizio 1. Si consideri il sistema a tempo continuo

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= \Big(x_1(t) - x_2(t)\Big)\Big(x_2^2(t) - 1\Big), \\ \dot{x}_2(t) &= (x_1^2(t) + x_2(t))(x_1^2(t) - 1),\end{aligned} \qquad t \geq 0.$$

i) Si determinino i punti di equilibrio del sistema e,

ii) quando possibile, se ne studi la stabilità con il metodo di linearizzazione.

Esercizio 2. Si consideri il seguente sistema a tempo discreto:

$$x(t+1) = Fx(t) + gu(t) = \begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \qquad t \geq 0$$

dove a è un parametro reale.

i) Al variare di a in $\mathbb{R}$, si calcoli esplicitamente, se esiste, un controllore K in retroazione che attribuisce alla matrice $F + gK$ del risultante sistema retroazionato lo spettro $\{0, 2, -1\}$.

ii) Si determini per quali valori di a il sistema è controllabile a zero (equivalentemente, ammette un controllore dead-beat), e

iii) per tali valori si determini, al variare di a e se possibile, la famiglia dei controllori dead-beat che rendono la matrice $F + gK$ del sistema retroazionato nilpotente con indice di nilpotenza minimo.

Esercizio 3. Si consideri il seguente sistema dinamico lineare a tempo discreto:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + gu(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= Hx(t) = [\,1 \quad 0 \quad 0\,]\, x(t), \end{aligned} \qquad t \geq 0.$$

Si studi l'osservabilità del sistema e si determini tutte le condizioni iniziali $x(0)$ che sono compatibili con le osservazioni $y(0) = 3$, $y(1) = 3$ e $y(2) = 6$ in corrispondenza alla sollecitazione in ingresso $u(0) = 1$ e $u(1) = 1$.

Teoria 1. Si dimostri il teorema dell'equazione di Lyapunov per sistemi dinamici lineari e tempo invarianti, a tempo discreto.

Teoria 2. Dato un sistema dinamico di dimensione n, $\Sigma = (F, G, H)$, sia L la matrice di uno stimatore, così che la matrice che regola la dinamica dell'errore di stima sia $F + LH$. Si dimostri che la coppia $(F + LH, H)$ è osservabile se e solo se il sistema Σ (equivalentemente, la coppia (F, H) è osservabile. [Suggerimento: si ricorra alla dualità].