COMPITO DI TEORIA DEI SISTEMI
21 Settembre 2000

Esercizio 1. Si consideri il seguente sistema dinamico non lineare a tempo continuo:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= -x_1(t)x_2(t) + x_2(t) \\
\dot{x}_2(t) &= x_1^2(t) - x_2(t) \qquad\qquad t \geq 0, \\
\dot{x}_3(t) &= -x_1(t)^2 + x_2(t) + a x_3(t)
\end{aligned}$$

dove a è un parametro reale.

i) Determinare, al variare di a in $\mathbb{R}$, i punti di equilibrio del sistema.

ii) Si studi, al variare di a in $\mathbb{R}$, la stabilità dei punti di equilibrio appena trovati, ricorrendo ove possibile al metodo di linearizzazione.

Esercizio 2. Si consideri il seguente sistema a tempo discreto

$$\begin{aligned}
x(t+1) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2a & a-1 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) = Fx(t) + gu(t), \\
y(t) &= \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} x(t) = Hx(t), \qquad t \geq 0,
\end{aligned}$$

con a parametro reale.

i) Si studi, al variare di a in $\mathbb{R}$, l'osservabilità del sistema, e per quei valori di a per cui il sistema risulta non osservabile si determini esplicitamente il sottospazio non osservabile $X^{no}(a)$.

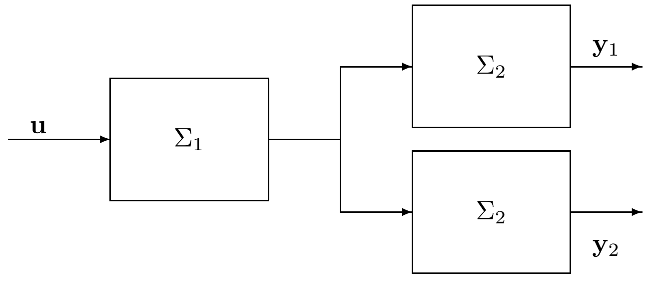
ii) Si progetti, se possibile, un controllo in retroazione dallo stato, funzione del parametro a, in modo tale che il risultante sistema retroazionato risponda al segnale di ingresso $u(t) = 2^t, t \geq 0$, con uscita in evoluzione forzata $y(1) = 1, y(t) = 0, t \neq 1$.

Esercizio 3. Si considerino le funzioni di trasferimento razionali scalari

$$w_1(s) = \frac{s+1}{s^2+3s} \qquad w_2(s) = \frac{s-2}{s^2+3s+2}.$$

i) Si determinimo due sistemi a tempo continuo, $\Sigma_1 = (F_1, g_1, H_1)$ e $\Sigma_2 = (F_2, g_2, H_2)$, che siano realizzazioni minime rispettivamente di w_1 e w_2.

Si consideri il sistema Σ, ottenuto dalla connessione dei sistemi Σ_1 e Σ_2 come illustrato in figura.



ii) Si discuta raggiungibilità ed osservabilità di Σ.

iii) Si discuta l'esistenza di controllori stabilizzanti e l'esistenza di stimatori asintotici per Σ.

Teoria 1. Sia $\Sigma = (F, G, H)$ un sistema dinamico a tempo continuo di dimensione n, e sia $X^{no}_{[0,t]}$ il sottospazio di non osservabilità nell'intervallo $[0, t]$, ovvero l'insieme degli stati indistinguibili dallo stato nullo, nel futuro, nell'intervallo $[0, t]$. Si dimostri che per ogni $t \in \mathbf{R}, t \geq 0$ vale

$$X^{no}_{[0,t]} = \ker \begin{bmatrix} H \\ HF \\ \vdots \\ HF^{n-1} \end{bmatrix}.$$

.

Teoria 2. Sia M una matrice reale $n \times n$ e non singolare.

i) Si dimostri che M é ciclica se e solo se lo é M^{-1}.

ii) Si sfrutti il risultato del punto i) per determinare che relazione sussiste tra la forma di Jordan di M e quella della matrice M^{-1} (equivalentemente: tra i polinomi invarianti di M e i polinomi invarianti di M^{-1}).