COMPITO DI TEORIA DEI SISTEMI
25 Febbraio 2000

Esercizio 1. Dato il sistema a tempo discreto:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} x(t) \\ y(t) &= Hx(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) \end{aligned}$$

i) si costruisca, se possibile, uno stimatore dead beat dalla sola prima uscita che annulli l'errore di stima nel minimo numero di passi;

ii) si costruisca, se possibile, uno stimatore dead beat dalla sola seconda uscita che annulli l'errore di stima nel minimo numero di passi.

Esercizio 2. Si consideri il sistema dinamico non lineare a tempo continuo

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -x_1(t) + x_1^2(t)x_2(t) + 2x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_1^2(t) - 2x_2(t), \qquad\qquad t \geq 0. \end{aligned}$$

i) Si determini una funzione di Lyapunov quadratica attraverso cui sia possibile dimostrare che l'origine é punto di equilibrio asintoticamente stabile;

ii) sfruttando lo stesso tipo di ragionamento usato al punto precedente, si determini per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la funzione quadratica $V(x_1, x_2) = (a+1)\ x_1^2 + ax_2^2$ é una funzione che permette di dimostrare l'asintotica stabilità di 0.

Teoria 1. Si dimostri che se la matrice $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è asintoticamente stabile, con ciò intendendo che ha tutti gli autovalori in $\mathrm{Re}(s) < 0$, allora se l'equazione di Lyapunov per sistemi continui

$$F^T P + PF = -Q$$

ammette soluzione $\bar{P}$ in corrispondenza ad una fissata matrice Q, tale soluzione é necessariamente unica.

Teoria 2. Si considerino le due funzioni razionali e proprie

$$w_1(z) = \frac{n(z)}{z(n(z) + 1/4)} \qquad w_2(z) = \frac{2n(z)}{z^2 + n(z)},$$

dove $n(z)$ è un polinomio monico in $\mathbb{R}[z]$ di grado pari a 2. Siano $\Sigma_{1,n}$ e $\Sigma_{2,n}$ due sistemi a tempo discreto, realizzazioni minime di $w_1(z)$ e $w_2(z)$, rispettivamente, in corrispondenza allo specifico $n(z)$.

i) Si determinino, al variare di $n(z)$, le dimensioni di $\Sigma_{1,n}$ e $\Sigma_{2,n}$.

ii) Detto $\Sigma_{s,n}$ il sistema ottenuto dalla connessione in serie di $\Sigma_{1,n}$ e $\Sigma_{2,n}$ (nell'ordine), si dimostri che tale sistema è sempre raggiungibile, comunque scelto $n(z)$.

Teoria 3. Sia $\Sigma = (F, G, H)$ un sistema dinamico, lineare, a tempo discreto di dimensione n. Si dimostri che, detto X_k^c il sottospazio di controllabilità in k passi (ovvero l'insieme degli stati che sono controllabili a zero al tempo k), se $X_k^c = X_{k+1}^c$, allora $X_{k+1}^c = X_{k+2}^c$.