COMPITO DI TEORIA DEI SISTEMI
9 Febbraio 2000

Esercizio 1. Si consideri il seguente sistema dinamico lineare a tempo continuo:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Fx(t) + gu(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \\ y(t) &= Hx(t) = [\,1 \quad 0\,]\, x(t) \qquad\qquad t \geq 0. \\ x(0) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

i) Si determini, se possibile, un ingresso di controllo che porti lo stato del sistema da $x(0)$ per $t = 0$ allo stato nullo per $t = 1$.

ii) Si determini, se possibile, un ingresso di controllo, con supporto in $[0, 1]$, in modo tale che per $t \geq 1$ l'uscita (in evoluzione libera) sia nulla ma lo stato del sistema (ancora in evoluzione libera) non lo sia.

Esercizio 2. Si consideri un sistema dinamico lineare a tempo discreto SISO $\Sigma = (F, g, H)$. Supponendo che in corrispondenza al segnale di ingresso

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t = 0 \\ b^{t-1}(b-a) & t \geq 1 \end{cases}$$

a e b parametri reali, il sistema risponda, in sola evoluzione forzata, con il segnale di uscita

$$y(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 1 \\ -2\left(-\frac{1}{2}\right)^{t-1} & t \geq 2 \end{cases}$$

Si determini per quali valori della coppia a e b posso dire che il sistema Σ é BIBO stabile.

Esercizio 3. Si consideri il sistema dinamico non lineare a tempo discreto

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= ax_1(t) + x_1^2(t) \\ x_2(t+1) &= -ax_1(t) + ax_2(t) - x_2^2(t), \qquad\qquad t \geq 0, \end{aligned}$$

con a parametro reale che varia nell'intervallo $[1/2, 1]$.

i) Si studino, al variare di a in $[1/2, 1]$, i punti di equilibrio del sistema, e

ii) se ne studi la stabilità/instabilità, ove possibile, attraverso il metodo della linearizzazione.

iii) Negli eventuali casi critici si studi la stabilità/instabilità del sistema attraverso l'analisi delle traiettorie.

Teoria 1. Sia $\Sigma = (F, G, H)$ un sistema dinamico, lineare, a tempo discreto di dimensione n. Si dimostri che, detto X_k^R il sottospazio di raggiungibilità in k passi (ovvero l'insieme degli stati che sono raggiungibili al tempo k, a partire dallo stato nullo), se $X_k^R = X_{k+1}^R$, allora $X_{k+1}^R = X_{k+2}^R$.

Teoria 2. Si consideri la seguente matrice 6×6

$$F = \left[\begin{array}{cc|c|ccc} a+1 & 1 & & & & \\ 0 & a+1 & & & & \\ \hline & & 2a-2 & & & \\ \hline & & & a+b & 1 & 0 \\ & & & 0 & a+b & 1 \\ & & & 0 & 0 & a+b \end{array}\right],$$

dove a e b sono parametri reali. Si determini, al variare di a e b in $\mathbb{R}$, i polinomi invarianti di F.