III^o COMPITINO DI TEORIA DEI SISTEMI
10 Gennaio 2002

Esercizio 1. Si consideri il seguente sistema dinamico lineare a tempo discreto:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + gu(t) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= Hx(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} x(t), \qquad t \geq 0. \end{aligned}$$

i) Progettare, se possibile, uno stimatore asintotico dello stato a partire dalla sola prima uscita.

ii) Progettare, se possibile, uno stimatore dead-beat dello stato in modo tale che l'errore di stima vada a zero nel minimo numero di passi.

iii) Progettare, se possibile, un regolatore dead-beat per il sistema dato.

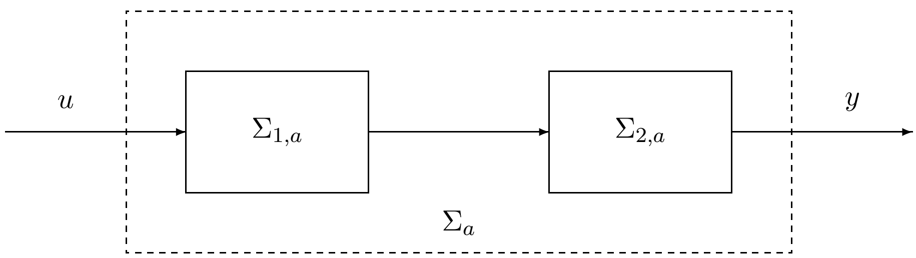
Esercizio 2. Si considerino le seguenti funzioni di trasferimento

$$w_{1,a}(z) = \frac{z}{(z-a)(z-2a)} \qquad w_{2,a}(z) = \frac{(z-a)}{(z-1)(z-1/2)},$$

con a parametro reale.

i) Determinare, al variare di a, un sistema a tempo discreto $\Sigma_{1,a}$ che sia realizzazione minima di $w_{1,a}(z)$ e un sistema a tempo discreto $\Sigma_{2,a}$ che sia realizzazione minima di $w_{2,a}(z)$.

Detto Σ_a il sistema ottenuto dalla connessione in serie dei sistemi $\Sigma_{1,a}$ e $\Sigma_{2,a}$ come mostrato in figura,



ii) si discuta (al variare di a) la stabilizzabilità e la rivelabilità di Σ_a;

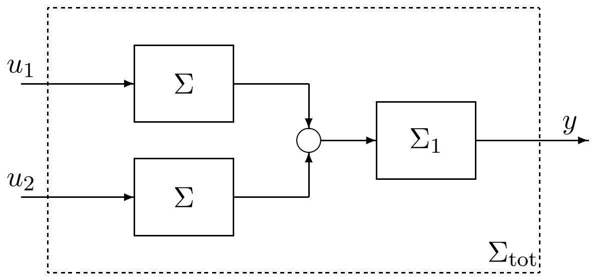
iii) si determini (al variare di a) la BIBO stabilità di Σ_a.

Teoria 1. Sia $\Sigma = (F, G, H)$ un sistema dinamico a tempo continuo di dimensione n e sia $\mathcal{O}$ la matrice di osservabilità del sistema, ovvero

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ \vdots \\ HF^{n-1} \end{bmatrix}.$$

Si dimostri che, per ogni $t > 0$, il sottospazio non osservabile relativo all'intervallo $[0, t]$, $X^{no}_{[0,t]}$, coincide con $\ker\mathcal{O}$.

Teoria 2. Sia $w(z) = n(z)/d(z)$ una funzione razionale (non nulla) strettamente propria e supponiamo che $n(z)$ e $d(z)$ siano coprimi tra loro. Sia Σ un sistema a tempo discreto, realizzazione minima di $w(z)$, e sia Σ_1 un sistema a tempo discreto, realizzazione minima di $w_1(z) := n^2(z)/d^2(z)$. Si discuta raggiungibilità ed osservabilità del sistema interconnesso



SOLUZIONI

Esercizio 1. i) [3 punti] È immediato rendersi conto del fatto che la coppia (F, h_1), dove h_1 rappresenta la prima riga della matrice H, è una coppia in forma standard di osservabilità, con matrice F_{22} del sottosistema non osservabile data da $F_{22} = [1/2]$. Pertanto, per ogni scelta della matrice L_1 dello stimatore (dalla sola prima uscita), la matrice $F+L_1h_1$, che regola la dinamica dell'errore di stima, avrà $1/2$ come autovalore. Poichè tale autovalore ha modulo minore di 1, la coppia (F, h_1) è rivelabile, ovvero esiste uno stimatore asintotico dalla sola prima uscita. Per determinare tale stimatore, è sufficiente scegliere $L_1 = [\,a \quad b \quad 0\,]^T$ ed imporre alla matrice

$$F + L_1h_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1+a & 0 \\ 1 & 3+b & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

un polinomio caratteristico del tipo $(z-1/2)(z-\lambda_1)(z-\lambda_2)$, con $|\lambda_i| < 1$ per $i = 1, 2$. Se assumiamo, per esempio, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, dall'identità

$$\Delta_{F+L_1h_1}(z) = (z-1/2)[z^2 - (4+b)z + (4+b-a)] \equiv (z-1/2)z^2,$$

si ottiene $b = -4$ e $a = 0$, ovvero

$$L_1 = [\,0 \quad -4 \quad 0\,]^T.$$

ii) [4 punti] Consideriamo la coppia (F, H) e la sua versione duale (F^T, H^T). La coppia (F^T, H^T) è raggiungibile, con indici di Kronecker $k_1 = 2$ e $k_2 = 1$. Pertanto esiste L tale che $F+LH$ ha indice di nilpotenza 2 e tale valore dell'indice di nilpotenza è il minimo ottenibile. Vista la struttura diagonale a blocchi della matrice F e il fatto che la matrice $F+LH$ ha le seconde due colonne completamente arbitrarie possiamo scegliere L in modo tale che

$$F + LH = \begin{bmatrix} 1 & -1+a & 0 \\ 1 & 3+b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

con

$$\begin{bmatrix} 1 & -1+a \\ 1 & 3+b \end{bmatrix}$$

matrice nilpotente. Ciò equivale ad attribuire alla matrice L la seguente struttura:

$$L = \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 0 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

Ripetendo gli stessi conti fatti al punto i), troviamo $a = 0$ e $b = -4$, da cui

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -4 & 0 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

iii) [3 punti] Per il principio di separazione del regolatore è sufficiente trovare (se possibile) una matrice K in modo tale che $F + gK$ sia nilpotente e una matrice L tale che $F+LH$ sia nilpotente. La matrice L esiste e possiamo scegliere, ad esempio, quella determinata al punto ii). Per quanto riguarda la matrice K che rappresenta un controllore stabilizzante, invece, è immediato rendersi conto del fatto che la coppia (F, g) è in forma standard di raggiungibilità , con matrice del sottosistema non raggiungibile $F_{22} = [1/2]$. Pertanto non esiste un controllore dead-beat e quindi nemmeno un regolatore dead-beat.

Esercizio 2. i) [4 punti] Bisogna distinguere tra quei valori del parametro a per cui si verificano cancellazioni tra il numeratore ed il denominatore di una o entrambe le funzioni di trasferimento, e i rimanenti valori del parametro a. Una volta ottenuta una rappresentazione irriducibile, infatti, la dimensione minima di realizzazione sarà pari al grado del polinomio al denominatore nella suddetta rappresentazione irriducibile.

Per $a = 0$, una volta effettuate le semplificazioni, si ottiene

$$w_{1,0}(z) = \frac{1}{z} \qquad w_{2,0}(z) = \frac{z}{(z-1)(z-1/2)},$$

che ammettono come realizzazioni minime, ad esempio, le seguenti (in forma canonica di controllo):

$$\Sigma_{1,0} = (0, 1, 1) \qquad \Sigma_{2,0} = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1/2 & 3/2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \right).$$

Per $a = 1$ si ha

$$w_{1,1}(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)} \qquad w_{2,1}(z) = \frac{1}{z-1/2},$$

che ammettono come realizzazioni minime, ad esempio, le seguenti:

$$\Sigma_{1,1} = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \qquad \Sigma_{2,1} = (1/2, 1, 1).$$

Per $a = 1/2$ si trova

$$w_{1,1/2}(z) = \frac{z}{(z-1/2)(z-1)} \qquad w_{2,1/2}(z) = \frac{1}{z-1},$$

che ammettono come realizzazioni minime, ad esempio, le seguenti:

$$\Sigma_{1,1/2} = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1/2 & 3/2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \qquad \Sigma_{2,1/2} = (1, 1, 1).$$

In tutti gli altri casi non si effettuano semplificazioni e possibili realizzazioni minime sono date da:

$$\Sigma_{1,a} = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2a^2 & 3a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \qquad \Sigma_{2,a} = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1/2 & 3/2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -a & 1 \end{bmatrix} \right).$$

ii) [5 punti] Affinchè il sistema serie risulti raggiungibile occorre e basta che i due sistemi siano raggiungibili (cosa banalmente vera, visto che i sistemi sono realizzazioni in forma canonica di controllo, e quindi raggiungibili) e i due polinomi $H_{1,a}\mathrm{adj}(zI - F_{1,a})g_{1,a}$ e $\Delta_{F_{2,a}}(z)$ siano privi di zeri comuni. Dalle realizzazioni determinate al punto precedente è immediato rendersi conto che, per ogni valore di a, i due polinomi non hanno zeri comuni e quindi il sistema serie è raggiungibile e perciò stabilizzabile.

Dal punto di vista dell'osservabilità, affinchè il sistema serie risulti osservabile occorre e basta che i due sistemi siano osservabili (cosa banalmente vera, visto che i sistemi sono realizzazioni minime) e i due polinomi $H_{2,a}\mathrm{adj}(zI - F_{2,a})g_{2,a}$ e $\Delta_{F_{1,a}}(z)$ siano privi di zeri comuni. Dalle realizzazioni determinate al punto precedente è immediato rendersi conto che,

- per $a = 0$, $H_{2,0}\mathrm{adj}(zI - F_{2,0})g_{2,0}$ e $\Delta_{F_{1,0}}(z)$ hanno uno zero nell'origine in comune, e quindi il sistema serie non è osservabile ma è ricostruibile e quindi rivelabile;
- per $a = 1/2$ e $a = 1$, $H_{2,a}\mathrm{adj}(zI - F_{2,a})g_{2,a}$ e $\Delta_{F_{1,a}}(z)$ sono privi di zeri in comune e quindi il sistema serie è osservabile;
- per ogni valore di $a \neq 0, 1/2, 1$, i due polinomi hanno uno zero collocato in a in comune e quindi il sistema serie non è osservabile, tuttavia è rivelabile se e solo se $|a| < 1$.

In definitiva, il sistema è rivelabile per $-1 < a \leq 1$.

iii) [3 punti] La funzione di trasferimento del sistema serie è il prodotto delle funzioni di trasferimento dei sistemi $\Sigma_{1,a}$ e $\Sigma_{2,a}$, ovvero:

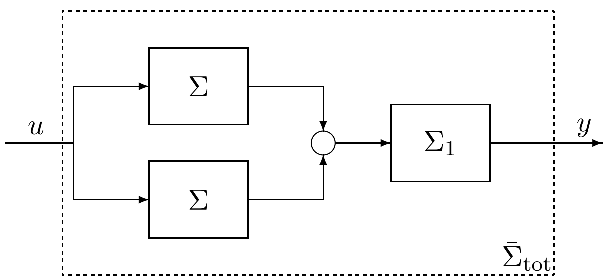
$$w_a(z) = w_{2,a}(z) \cdot w_{1,a}(z) = \frac{(z-a)}{(z-1)(z-1/2)} \cdot \frac{z}{(z-a)(z-2a)} = \frac{z}{(z-1)(z-1/2)(z-2a)}.$$

Poichè $w_a(z)$ ha, per ogni valore di a, un polo in 1, il sistema serie non è mai BIBO stabile.

Teoria 1. [4 punti] Si veda il testo "Appunti di Teoria dei Sistemi" di E.Fornasini, G.Marchesini, capitolo sull'osservabilità.

Teoria 2. [5 punti] Per lo studio di raggiungibilità e osservabilità, tenendo conto del fatto che tutte le realizzazioni in gioco sono minime, è sufficiente prendere in considerazione le opportune cancellazioni incrociate.

Per quanto riguarda l'osservabilità, lo studio dell'osservabilità del sistema è equivalente allo studio dell'osservabilità del sistema



Il parallelo di Σ e Σ è senz'altro non osservabile, dal momento che le matrici di sistema delle due copie di Σ hanno tutti gli autovalori in comune, e pertanto la serie di tale parallelo e Σ_1 non può essere osservabile.

Per quanto concerne la raggiungibilità, osserviamo, preliminarmente, che $n^2(z)/d^2(z)$ è una rappresentazione coprima di $w_1(z)$. Se infatti $n^2(z)$ e $d^2(z)$ avessero uno zero in comune, tale zero sarebbe anche uno zero comune di $n(z)$ e $d(z)$, contraddicendo, in tal modo, l'ipotesi di coprimalità. Ma allora è anche possibile osservare che la cascata di Σ e Σ_1 (nell'ordine) è raggiungibile, dal momento che $n(z)$ e $d^2(z)$ sono coprimi. Pertanto l'intero sistema è raggiungibile, dal momento che entrambe le cascate Σ e Σ_1 (nell'ordine) sono raggiungibili.