COMPITO DI TEORIA DEI SISTEMI
7 Febbraio 2001

Esercizio 1. Si consideri il seguente sistema dinamico lineare a tempo continuo:

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= Fx(t) + Gu(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t) \\
y(t) &= Hx(t) = [\,1 \quad 0 \quad 1\,]\, x(t), \qquad\qquad t \geq 0.
\end{aligned}$$

i) Si progetti, se possibile, un controllo in retroazione dallo stato in modo tale che il risultante sistema retroazionato abbia solo i modi e^{-t} e e^{-2t};

ii) si progetti, se possibile, un controllo in retroazione dall'uscita, in modo tale che il sistema retroazionato sia asintoticamente stabile.

Esercizio 2. Dato il sistema a tempo continuo

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= -ax_1(t) + x_1(t)x_2(t), \\
\dot{x}_2(t) &= (1-a)[x_1(t) + x_2(t)] - x_2^2(t),
\end{aligned}$$

con a parametro reale

i) si determinino, al variare di a, i punti di equilibrio del sistema;

ii) si studi la stabilità, al variare di a, dei punti di equilibrio determinati al punto i) attraverso il metodo di linearizzazione;

iii) per i valori critici del parametro a, si studi la stabilità dell'equilibrio nell'origine attraverso l'analisi delle traiettorie.

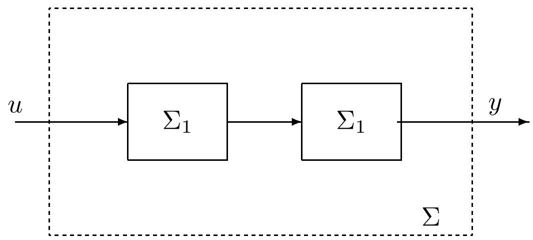
Esercizio 3. Si consideri il sistema lineare a tempo discreto descritto dalla seguente terna di matrici:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad H = [\,2 \quad 1\,] \qquad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

i) Si supponga di misurare, per $k \geq 1$ fissato, le uscite $y(0), y(k), y(2k), \ldots$. Si calcoli, se possibile, $x(0)$.

ii) Si supponga di misurare, per $k \geq 1$ fissato, le uscite $y(1), y(k+1), y(2k+1), \ldots$. Si calcoli, se possibile, $x(0)$.

Teoria 1. Si consideri il seguente sistema dinamico lineare a tempo continuo Σ ottenuto dalla connessione in serie, come mostrato in figura, di due copie del sistema SISO a tempo continuo $\Sigma_1 = (F_1, g_1, H_1)$, realizzazione minima della sua funzione di trasferimento.



Si dimostri che

i) se Σ_1 è asintoticamente stabile allora Σ è asintoticamente stabile;

ii) se Σ_1 è semplicemente stabile ma non asintoticamente stabile, allora il sistema Σ è instabile.

Teoria 2. Si dimostri il criterio di asintotica stabilità di Lyapunov per sistemi non lineari a tempo continuo (ipotizzando di aver già dimostrato la parte relativa alla stabilità semplice).

SOLUZIONI

Esercizio 1. i) [4 punti] Osserviamo, preliminarmente, che il sistema è raggiungibile con indici di Kronecker $k_1 = 2$ e $k_2 = 1$. Poichè la richiesta sui modi si traduce nella richiesta di avere polinomio minimo $\psi_1(s) = (s+1)(s+2)$ (mentre il secondo polinomio $\psi_2(s)$ può essere indifferentemente $s+1$ o $s+2$ - l'unico vincolo infatti è di grado e di divisibilità), è evidente che comunque scelto $\psi_2(s)$ tra le due possibili scelte, in base al teorema di Rosenbrock, parte di sintesi, il controllore K che consegue questo risultato esiste. Poniamo, ad esempio, $\psi_2(s) = s+1$. Osserviamo che se restringiamo il nostro campo di scelta e attribuiamo alla matrice $F+GK$ la seguente struttura

$$F + GK = \begin{bmatrix} * & * & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

e imponiamo ai coefficienti attualmente indicati con l'asterisco dei valori tali per cui il polinomio caratteristico del blocco

$$\begin{bmatrix} * & * \\ 2 & 2 \end{bmatrix},$$

sia pari a $(s+1)(s+2)$, certamente otterremo il risultato desiderato. A tal fine, è sufficiente che

$$\begin{bmatrix} * & * \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -6 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Riassumendo:

$$F + GK = \begin{bmatrix} -5 & -6 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

si ottiene prendendo

$$K = \begin{bmatrix} -6 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e porta al risultato richiesto.

ii) [3 punti] Consideriamo le equazioni del controllo in retroazione dall'uscita. Se K' è matrice del controllo in retroazione dall'uscita, ovvero

$$y(t) = v(t) + K'y(t),$$

$v(t)$ la componente autonoma dell'ingresso, allora la matrice del controllo in retroazione con riferimento allo stato è $K = K'H$. Posto allora $K' = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, si ha

$$K = K'H = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} [1 \quad 0 \quad 1] = \begin{bmatrix} a & 0 & a \\ b & 0 & b \end{bmatrix}.$$

La matrice $F + GK = F + GK'H$ del sistema retroazionato è

$$F + GK'H = \begin{bmatrix} 1+a & 0 & a-1 \\ 2 & 2 & 0 \\ b & 0 & b-1 \end{bmatrix}.$$

È evidente, allora, che per ogni scelta di a e b, parametri reali, la matrice $F + GK'H$ avrà come autovalore 2 che è instabile, e quindi non esistono controllori stabilizzanti dalla sola uscita.

Esercizio 2. i) [3 punti] I punti di equilibrio $\mathbf{x}_e = (x_{1e}, x_{2e})$ sono le soluzioni del sistema di equazioni

$$\begin{aligned} 0 &= -ax_{1e} + x_{1e}x_{2e} = x_{1e}(-a + x_{2e}) \\ 0 &= (1-a)(x_{1e} + x_{2e}) - x_{2e}^2. \end{aligned}$$

La prima equazione ha soluzioni 1) $x_{1e} = 0$ e 2) $x_{2e} = a$. Sostituendo $x_{1e} = 0$ nella seconda equazione si ottiene $0 = (1-a)x_{2e} - x_{2e}^2 = x_{2e}(1-a-x_{2e})$, le cui soluzioni sono $x_{2e} = 0$ e $x_{2e} = 1-a$.

Sostituendo, invece, $x_{2e} = a$ nella seconda equazione si ottiene $0 = (1-a)(x_{1e}+a) - a^2 = (1-a)x_{1e} + a(1-2a)$, che è priva di soluzioni per $a = 1$ ed ha soluzione $x_{1e} = [a(1-2a)]/(a-1)$ per $a \neq 1$.

Riassumendo, abbiamo:

- per $a \neq 1$, $(0,0)$, $(0, 1-a)$ e $\left(\frac{a(1-2a)}{a-1}, a\right)$;
- per $a = 1$, $(0,0)$.

ii) [4 punti] La matrice del sistema linearizzato nell'intorno di un arbitrario punto di equilibrio (x_{1e}, x_{2e}) è:

$$F_{(x_{1e},x_{2e})} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_{1e},x_{2e})} = \begin{bmatrix} -a + x_{2e} & x_{1e} \\ 1-a & 1-a-2x_{2e} \end{bmatrix}.$$

Pertanto, in corrispondenza all'origine si ottiene la matrice

$$F_{(0,0)} = \begin{bmatrix} -a & 0 \\ 1-a & 1-a \end{bmatrix},$$

i cui autovalori sono $-a$ e $1-a$. Tale matrice ha tutti gli autovalori nel semipiano sinistro aperto se e solo se $-a < 0$ e $1-a < 0$, pertanto se e solo se $a > 1$. $a < 1$ è situazione di instabilità per il linearizzato e per il non lineare, mentre il caso $a = 1$ è indecidibile.

In corrispondenza al punto di equilibrio $(0, 1-a)$ si ottiene la matrice

$$F_{(0,1-a)} = \begin{bmatrix} 1-2a & 0 \\ 1-a & -1+a \end{bmatrix},$$

i cui autovalori sono $1-2a$ e $-1+a$. Tale matrice ha tutti gli autovalori nel semipiano sinistro aperto se e solo se $1-2a < 0$ e $-1+a < 0$, pertanto se e solo se $1/2 < a < 1$. Per valori di a esterni all'intervallo $[1/2, 1]$ c'è una situazione di instabilità per il linearizzato e per il non lineare, mentre i casi $a = 1/2, 1$ sono indecidibili.

Infine, in corrispondenza al punto di equilibrio $\left(\frac{a(1-2a)}{a-1}, a\right)$ si ottiene la matrice

$$F_{\left(\frac{a(1-2a)}{a-1},a\right)} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{a(2a-1)}{1-a} \\ 1-a & 1-3a \end{bmatrix},$$

il cui polinomio caratteristico è $s(s-1+3a) - a(2a-1) = s^2 + (3a-1)s + a(1-2a)$. In base alla regola dei segni di Cartesio, questo polinomio ha tutti gli zeri in $\mathrm{Re}(s) < 0$ se e solo se sono simultaneamente verificate $3a - 1 > 0$ e $a(1-2a) > 0$, ovvero $1/3 < a < 1/2$. Per valori di a esterni all'intervallo $[1/3, 1/2]$ il punto è instabile, per $a = 1/3, 1/2$ il criterio di linearizzazione non permette di dire nulla.

iii) [3 punti] Per l'origine l'unico valore critico del parametro è $a = 1$. Per tale valore del parametro il sistema diventa

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -x_1(t) + x_1(t)x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= -x_2^2(t). \end{aligned}$$

Dalla seconda equazione è immediato rendersi conto che eventuali perturbazioni attorno all'origine che portino lo stato del sistema in un punto vicino a piacere all'origine, ma con coordinata $x_2(0) < 0$, innesca un meccanismo di allontanamento della coordinata x_2 dal valore nullo. Pertanto si ha instabilità.

Esercizio 3. i) [2 punti] È immediato rendersi conto del fatto che $F^k = F$ per ogni k intero maggiore o uguale a 1. Pertanto, $y(k) = y(2k) = ... = HFx(0)$, per ogni $k \geq 1$. Da ciò segue che la sola consocenza di $y(0)$ e di $y(k)$ per un fissato $k \geq 1$ permette di impostare l'equazione

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H \\ HF \end{bmatrix} x(0) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(0),$$

la cui soluzione $x(0)$ è sempre univocamente determinata. Dunque

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(0) \\ y(k) \end{bmatrix}.$$

ii) [2 punti] In questo caso poichè, per lo stesso ragionamento di prima (i.e., $F^k = F$ per ogni $k \geq 1$), conoscere la successione $y(1), y(k+1), y(2k+1), \dots$, k intero positivo fissato, equivale a consocere la successione costante $HFx(0), HFx(0), \dots$, è chiaro che dalla successione data di uscite posso solo determinare il valore di

$$HFx(0) = [\,0 \quad 1\,]\, x(0),$$

ovvero la seconda componente dello stato iniziale. Pertanto non è possibile ricostruire esattamente il valore vero di $x(0)$.

Teoria 1. i) [2 punti] La matrice F del sistema serie, in questo caso, non è altro che

$$F = \begin{bmatrix} F_1 & 0 \\ g_1 H_1 & F_1 \end{bmatrix}.$$

pertanto è ovvio che se Σ_1 è asintoticamente stabile, ovvero la matrice F_1 ha tutti gli autovalori a parte reale minore di zero, allora anche la matrice F ha tutti gli autovalori a parte reale minore di zero, e quindi Σ è asintoticamente stabile.

ii) [4 punti] Osserviamo, innanzitutto che, dal momento che Σ_1 è un sistema raggiungibile, la matrice F_1 è una matrice ciclica e quindi presenta un solo miniblocco per ogni autovalore. Pertanto, condizione necessaria affinchè Σ_1 sia semplicemente stabile è che ad ogni autovalore di F_1 a parte reale nulla venga associato (nella forma di Jordan complessa) un unico miniblocco di Jordan di dimensione 1. Dall'ipotesi di raggiungibilità di Σ_1 e dall'assenza di cancellazioni incrociate, segue che Σ è raggiungibile da un solo ingresso, e quindi anche la matrice F di Σ risulta ciclica. Ma allora, se λ è un autovalore di F_1 a parte reale nulla (e molteplicità unitaria), esso è autovalore di molteplicità due della matrice F, a cui viene associato, nella forma di Jordan della matrice F, un unico miniblocco di dimensione 2. Ciò significa che a tale autovalore sono associati, per il sistema Σ, due modi, di cui uno necessariamente divergente. Pertanto, il sistema Σ è instabile.

Teoria 2. [5 punti] Si veda il libro di testo "Appunti di Teoria di Sistemi" di E.Fornasini e G.Marchesini, al capitolo sulla stabilità.